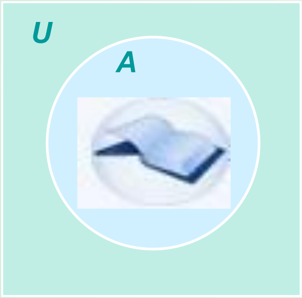
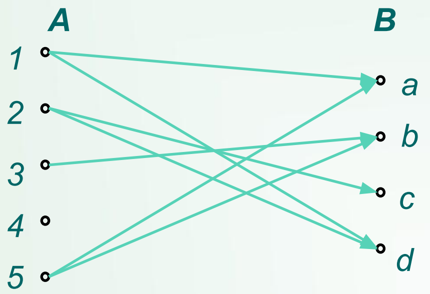
Теорія множин. Відношення.

Лекція 2

$$\overline{((A\&(\overline{B}))}$$





План

- Поняття множини.
- Операції над множинами.
- Діаграми Венна.
- Булеві алгебри.
- Відношення.
- Частково впорядковані множини.
- Відношення еквівалентності.

ПОНЯТТЯ МНОЖИНИ

Множиною називають деяку, цілком певну сукупність об'єктів або елементів. Це твердження не слід розглядати як строге означення. Скінченні множини можна описувати, перераховуючи їх елементи. Елементи, що належать скінченній множині, домовимося записувати між двома фігурними дужками й розділяти їх комами. Приклади

Очевидно, що перерахування елементів зручно тільки в тому випадку, коли множина елементів мала або довільний елемент характеризується властивістю, що легко описати. Використовуючи цей метод, не так легко описати множину громадян України й зовсім немислимо описати множину дійсних чисел.

Наприклад, {1,2,3,4} є множина, що містить натуральні числа 1, 2, 3 і 4. Множину голосних літер можна представити як {*а*, *о*, *є*, *е*, *і*, *и*}. Як правило, для позначення множин будемо використовувати прописні букви. A = {Борис, Діна, Неллі} є множина, що складається з Бориса, Діни і Ненсі. Множину перших n додатних цілих чисел позначаємо $\{1,2,3,...,n\}$, де точками показане продовження переліку елементів. Це ж позначення можна використати для деяких нескінченних множин. Наприклад, множину додатних цілих чисел можна позначити як {1,2,3,4,...}. Часто при переліку елементів множини використовується опис характеристичної властивості елементів цієї множини. Наприклад, $C=\{1,8,27,..., k^3,...\}$ описує множину кубів усіх додатних чисел, $A=\{1,4,9,... ,n^2\}$ описує множину квадратів всіх додатних чисел, які менші або рівні n.

У загальному випадку множина задається шляхом вказівки характеристичної властивості, тобто властивості, якій задовольняють елементи даної множини, і тільки вони. Для задання звичайно використовуються фігурні дужки, а в них наводиться характеристична властивість, що описує множину. Таким чином, множина $\{x : x \text{ має властивість } P\}$ містить тільки ті об'єкти, які мають властивість *P*.Спосіб задання множини повинен бути адекватним, тобто повинен повністю визначати множину. Це не важко, якщо об'єкти множини задані переліком елементів.

Приклади

Розглянемо, однак, множину $A = \{x : x$ - високий студент даної групи$\}$ або $B = \{x : x$ - гарний студент даної групи$\}$. Якщо різним студентам групи запропонувати означити множини A і B, вони можуть зробити це неоднозначно, обираючи елементами як множини A, так і множини B не тих самих людей. При розгляді множини $C = \{x : x$ – приваблива студентка групи$\}$ вибрати елементи множини C не тільки важко - не варто навіть намагатися це зробити. Однак, якщо множина $A = \{x : x$ - студент даної групи, зріст якого вище 180см$\}$ і $B = \{x : x$ - студент даної групи, середній бал якого не нижче 4$\}$, то можна сказати чітко, чи є даний студент елементом A або B.

ОЗНАЧЕННЯ 2.1. Якщо a - один з об'єктів множини A, то говорять, що a - ***елемент*** множини A, або a ***належить*** A. Приналежність елемента a множині A записується як $a \in A$. Якщо a не є елементом A, це записується як $a \notin A$. Наприклад, $3 \in \{1,2,3,4\}$, але $5 \notin \{1,2,3,4\}$. Якщо P є множина $\{x : x$ був президентом України$\}$, то Леонід Кравчук $\in P$, а Віктор Берман $\notin P$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.2. Множина A є ***підмножиною*** множини B (позначається $A \subseteq B$), якщо кожен елемент A є елемент B; тобто якщо $x \in A$, то $x \in B$. Зокрема, кожна множина є підмножиною самої себе. Якщо A не є підмножиною B, це записується як $A \not\subset B$. Таким чином, $A \not\subset B$, якщо існує елемент A, що не належить B.

Отже, $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, але $\{1, 2, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Якщо $A = \{x : x$ - студент спеціальності «математика»$\}$, $B = \{ x : x$ - студент факультету фізики, математики та інформатики$\}$, а $C = \{x : x$ - студент спеціальності «хімія»$\}$, то $A \subseteq B$, але $C \not\subseteq B$. Множини рівні, якщо вони містять ті самі елементи. Якщо A є множина $\{2, 4, 6\}$, а B є множина $\{x : x$ - додатне парне ціле число, менше $7\}$, тоді A і B - рівні множини. Таким чином, ми приходимо до наступного означення.

ОЗНАЧЕННЯ 2.3. Нехай A і B - деякі множини. Говорять, що *A **дорівнює** B*, і пишуть $A = B$, якщо для будь-якого x маємо: $x \in A$ тоді і тільки тоді, коли $x \in B$. Інакше кажучи, $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$. Якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$, то це записують $A \subset B$ і говорять, що A є ***власною підмножиною*** B.

Таким чином, доведення рівності множин *A* і *B* складається з двох етапів:

1) Довести, що *A* є підмножиною *B*.

2) Довести, що *B* є підмножиною *A*.

Оскільки множина однозначно визначається тільки елементами, які вона містить, порядок їх переліку ролі не грає. Наприклад, $\{1,2,4,6\} = =\{2,1,6,4\}$. Крім того, будь-який елемент або належить даній множині, або ні. Кожен елемент може входити в множину не більше одного разу.

Введемо дві нових множини: універсальна множина, або універсум, і порожня множина. У деякому смислі вони являють собою протилежності, оскільки порожня множина не містить елементів, а універсальна множина містить "всі" елементи.

ОЗНАЧЕННЯ 2.4. ***Порожня множина*** (позначається $\varnothing$ або $\{\}$) є множина, що не містить елементів. ***Універсальна множина*** U є така множина, яка містить всі розглянуті множини.

У теорії чисел універсальна множина звичайно збігається із множиною всіх цілих або натуральних чисел. Слід зазначити, що універсальна множина U, хоча й названа універсальною, однозначно не визначена, якщо точно не зазначена область розгляду (предметна область). Звичайно, будь-яка множина, що містить U, може бути використана як універсальна множина.

За означенням, кожна множина є підмножиною універсальної множини. Порожня множина є підмножиною будь-якої даної множини A, оскільки кожен елемент порожньої множини належить A. Можна сказати, що не існує елементів порожньої множини, які не належали б A.

Операції над множинами

ОЗНАЧЕННЯ 2.5. ***Перетином*** множин A і B називається множина, що складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать і A, і B. Перетин множин A і B позначається $A \cap B$. Це означення рівносильне наступному:$A \cap B = \{x : x \in A$ і x Î $B\}$.Наприклад, якщо $A =\{1,2,3,4,5\}$ і $B =\{1,3,5,7,9\}$, тоді $A \cap B =\{1,3,5\}$. Якщо $C =\{x : x$ має зріст вище 180см$\}$ і $D = \{x : x$ любить грати в шахи$\}$, тоді $C \cap D = \{x : x$ має зріст вище 180см і любить грати в шахи$\}$. Зверніть увагу, що в описі перетину множин $B \cap C$ використана зв'язка "і". Надалі ми переконаємося, що символи $\cap$ і $\wedge$, введені раніше, пов'язані між собою й мають схожі властивості.

Означимо перетин трьох і більше множин. Нехай A_1, A_2 і A_3 множини. Їх перетин можна записати так:

$$B = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

Очевидно, $x \in B$ тоді і тільки тоді, коли $x \in A_1$, $x \in A_2$ і $x \in A_3$;

($x \in B$ тоді і тільки тоді, коли x належить всім трьом множинам A_1, A_2 і A_3.

Нехай $J = \{1,2,3\}$, тоді $x \in B$ тоді і тільки тоді, коли $x \in A_j$ для всіх $j \in J$, що рівносильне запису $B = \{x : x \in A_j \ \forall\ j \in J\}$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.6. Якщо $I = \{1,2,3,..., k\}$, то

$\cap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdot \cdot \cdot \cap A_k = \{x : x \in A_i$ для всіх $i \in I\}$.

Об'єднанням множин A і B називається множина, що складається з усіх тих елементів, які належать хоча б одній із множин A або B і позначається $A \cup B$. Це можна записати так: $A \cup B = \{x : x \in A$ або $x \in B\}$.

Приклади

Об'єднання множин A_1, A_2 і A_3 визначається в такий спосіб: $B = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$. Далі буде показано, що $A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$, тому можна використати запис $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Очевидно, $x \in B$ тоді і тільки тоді, коли $x \in A_1$ або $x \in A_2$ або $x \in A_3$; іншими словами, $x \in B$ тоді і тільки тоді, коли x належить хоча б одній із трьох множин A_1, A_2 або A_3. Таким чином, $x \in B$ тоді і тільки тоді, коли для деякого $j \in \{1,2,3\}$, $x \in A_j$, що рівносильно запису

$B = \{x : x \in A_j$ для деякого $j \in \{1, 2, 3\}\}$.

ПРИКЛАД . Наприклад, якщо $A = \{1,2,6,7\}$, а $B = \{2,3,5,6\}$, тоді $A \cup B = \{1,2,3,5,6,7\}$.

Об'єднання $A \cup B$ утворено з A та B шляхом з'єднання разом елементів з A і B.

Якщо $A = \{x : x$ - політик$\}$, а $B = \{x : x$ - випускник ХДУ$\}$, то $A \cup B = \{x : x$ - політик або випускник ХДУ$\}$. Зверніть увагу, що в описі об'єднання $A \cup B$ використана зв'язка "або" так само, як в описі перетину множин використана зв'язка "і".

ОЗНАЧЕННЯ 2.8. Нехай $I = \{1,2,..., k\}$, тоді

$\cup_{i\in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \{x$: існує $i \in I$ таке, що $x \in A_i\}$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.9. Нехай A і B множини. ***Різницею множин*** $A - B$ називається множина всіх тих і тільки тих елементів A, які не належать B. Або $A - B = \{x : x \in A$ і $x \notin B\}$.

Симетричною різницею множин A і B (позначається $A \Delta B$), є множина $(A - B) \cup (B - A)$.

Приклади

ОЗНАЧЕННЯ 2.10. ***Доповнення*** множини A (позначається A') - це множина елементів універсума, які не належать A. Отже, $A' = U - A = \{x : x \in U$ і $x \notin A\}$.

Наприклад, якщо $A = \{1,2,4,6,7\}$, а $B = \{2,3,4,5,6\}$, то $A - B = \{1,7\}$, а $A \Delta B = \{1,3,5,7\}$.

Симетрична різниця множин A і B складається з тих елементів, які належать у точності одній із двох множин A або B. Якщо $A = \{x : x$ грає в теніс$\}$, а $B = \{x : x$ грає в гольф$\}$, то $A - B = \{x : x$ грає в теніс, але не грає в гольф$\}$. Множина $A\Delta B = \{x : x$ грає тільки в теніс або грає тільки в гольф$\}$. Зверніть увагу на подібність зі зв'язкою " виключаюче або" попередньої лекції.

Якщо U - множина додатних цілих чисел, а $A = \{2,4,6,8,...\}$ – множина всіх парних додатних чисел, то
$A' = \{1,3,5,7,...\}$ - множина всіх непарних додатних чисел.
Якщо U - множина всіх букв англійського алфавіту, $V = \{a, e, u, o, i\}$, то V' - множина всіх букв, що позначають в англійській мові приголосний звук. Якщо $A = \{x : x$ – фанат наукової фантастики$\}$, тоді $A' = \{x : x$ не любить наукову фантастику$\}$. Зверніть увагу, що доповнення множини пов'язане із символом ~ у логіці.

ТЕОРЕМА 2.13. Для довільних множин A, B і C справедливі рівності

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

ДОВЕДЕННЯ. Нижче наведене доведення частини (а). Доведення частини (б) проведіть самостійно.

Покажемо, що кожна з множин, що входять у рівність, є підмножиною іншої.

$a \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in (B \cup C)) \Leftrightarrow$ означення перетину

$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge ((a \in B) \vee (a \in C)) \Leftrightarrow$ означення об'єднання

$\Leftrightarrow ((a \in A) \wedge (a \in B)) \vee ((a \in A) \wedge (a \in C)) \Leftrightarrow$ властивість дистрибутивності логіки

$\Leftrightarrow$ $(a \in (A \cap B)) \vee (a \in (A \cap C)) \Leftrightarrow$ означення перетину

$\Leftrightarrow a \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ означення об'єднання

Ми переконалися, що властивості, доведені в теорії множин, мають свої аналоги у логіці.

ОЗНАЧЕННЯ 2.14. ***Множиною всіх підмножин*** множини A, або ***булеаном*** множини A, (позначається $P(A)$), є множина, що складається з усіх підмножин множини A.

Отже, булеаном множини $A = \{1,2,3\}$ є множина

$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Коли A містить 3 елементи, $P(A)$ складається з $2^3 = 8$ елементів або, що те ж саме, A включає $2^3 = 8$ підмножин.

У загальному випадку, якщо A містить n елементів, множина $P(A)$ включає 2^n елементів, тому що A має 2^n підмножин. Із цієї причини $P(A)$ часто позначають через $\mathbf{2}^A$. Ще однією операцією над множинами є декартовий добуток.

ОЗНАЧЕННЯ 2.15. ***Декартовим добутком*** множин A і B (позначається $A \times B$), є множина $\{(a, b) : a \in A \text{ і } b \in B\}$. Об'єкт (a, b) називається ***впорядкованою парою*** з першим компонентом a і другим компонентом b.

Множина $A \times B$ складається з усіх упорядкованих пар, що мають першим компонентом елемент із A, а другим компонентом - елемент із B. Порядок компонентів у парі суттєвий!

ДІАГРАМИ ВЕННА

Діаграми Венна - дуже зручний інструмент, що дозволяє зображувати множини й ілюструвати операції над ними. Множини в діаграмах Венна зображуються внутрішніми частинами кіл, їх перетином, об'єднанням і т.д. Прямокутник зображує універсальну множину. На рис. 2.1 наведена діаграма Венна для множини *A*, що зображена внутрішньою частиною кола. Зовнішня частина кола, що перебуває усередині прямокутника, зображує *A'*.

На рис. 2.2 наведена діаграма Венна для двох множин, скажемо, *A* і *B*, кожна множина зображена колом, і кола перетинаються.

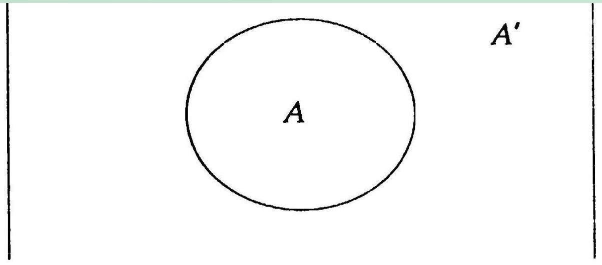


Рис. 2.1

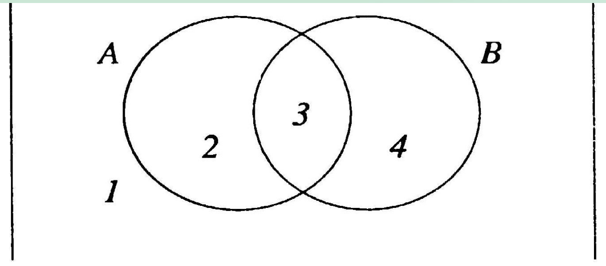


Рис. 2.2

Як показує діаграма, внутрішня частина прямокутника розділена на чотири частини. Множині $A \cap B$ відповідає зафарбована частина діаграми на рис. 2.3. Зафарбована область на рис. 2.4 представляє $A \cup B$.

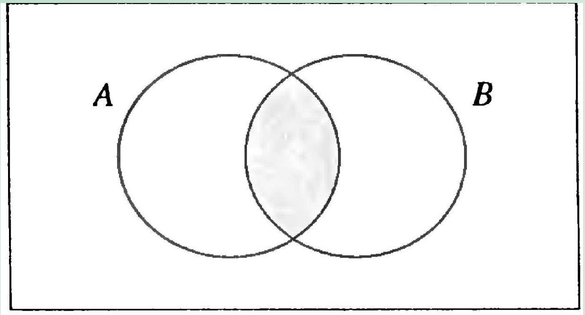


Рис. 2.3

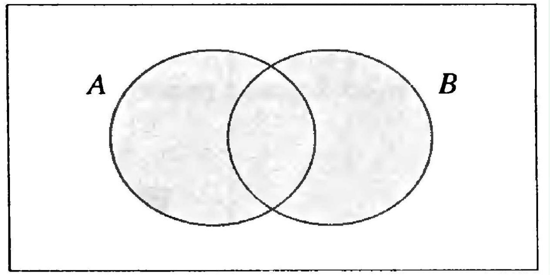


Рис. 2.4

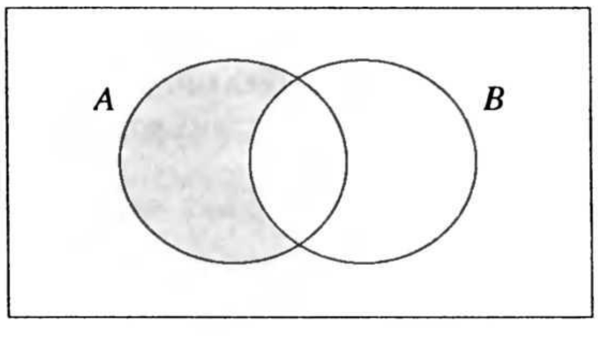


Рис. 2.6

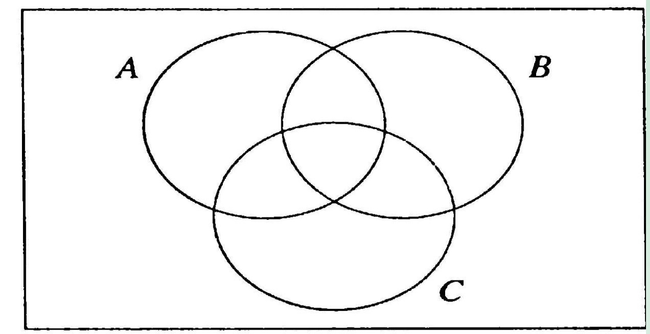


Рис. 2.7

Зафарбовані області на рис. 2.5 зображують множини $A \cap B$, $(A \cup B \cup C)$, $(A \cap B \cap C)$, $(A \cup B) - C$ і $(A \cap C) \cup B$. Множина $A - B$ представлена зафарбованою областю на рис. 2.6. Діаграма Венна для трьох множин, наприклад, A, B і C, показана на рис. 2.7. Ця діаграма складається з восьми частин.

Використовуючи діаграми Венна, можна показати рівність двох множин.

Приклади

ПРИКЛАД 2.16. Покажемо, що $(A \cup B)' = A' \cap B'$. Множина $(A \cup B)'$ - доповнення множини $A \cup B$, представленої діаграмою Венна на рис. 2.4, тому її зображує зафарбована область, показана на рис. 2.8.

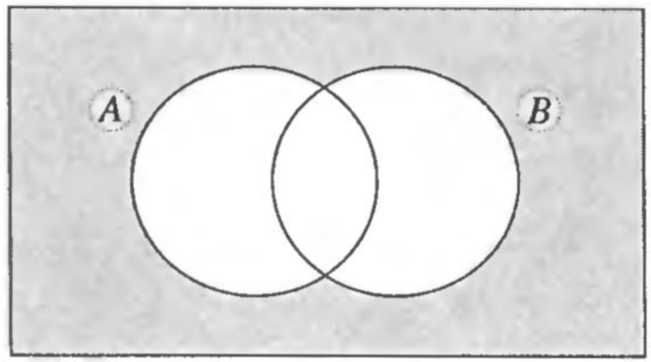


Рис. 2.8

Множині A' відповідає зафарбована область на рис. 2.9. А множині B' - зафарбована область на рис. 2.10.

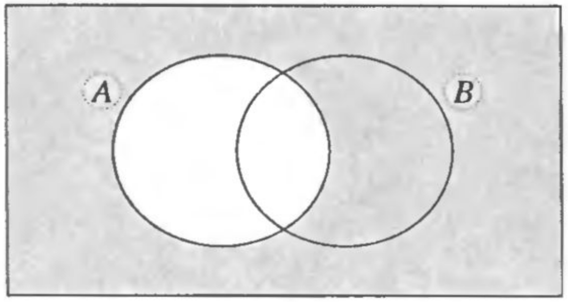


Рис. 2.9

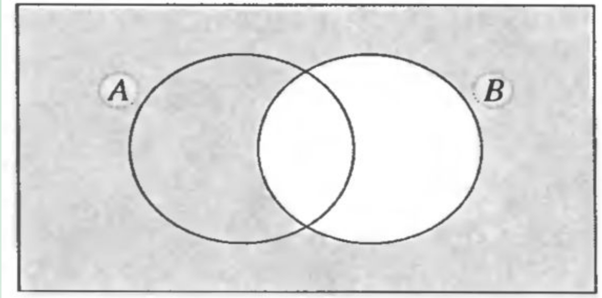


Рис. 2.10

Множині $A' \cap B'$ відповідають частини, зафарбовані на обох попередніх діаграмах, тому на рис. 2.11 вона зображена більш темною областю.

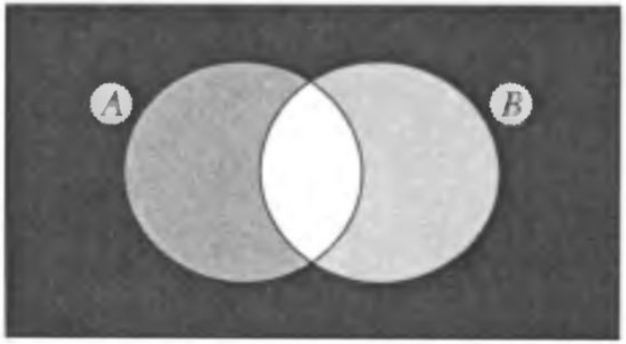


Рис. 2.11

Оскільки і $(A \cup B)'$, і $A' \cap B'$ однаково зображуються на діаграмі Венна, тому $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

ПРИКЛАД 2.17. Покажіть, що

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Множина A представлена зафарбованою областю на рис. 2.12. Множині $B \cup C$ відповідає зафарбована область на рис. 2.13.

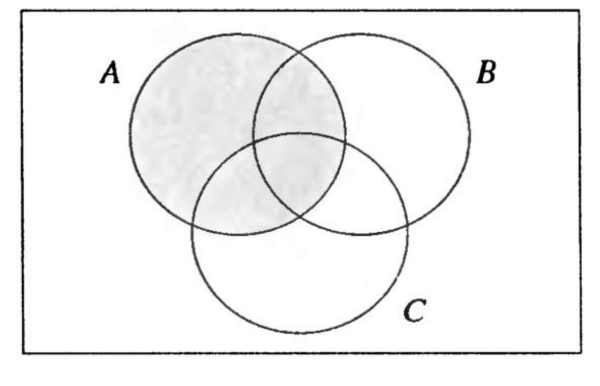


Рис. 2.12

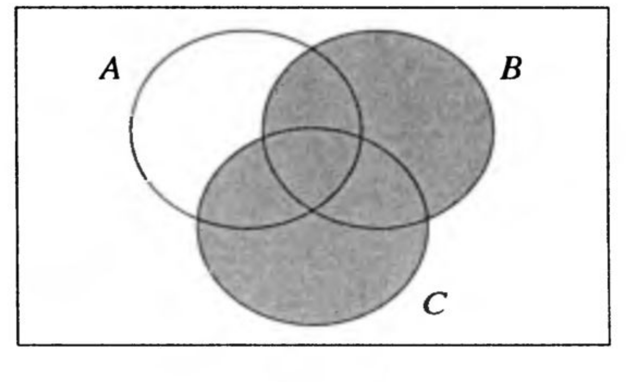


Рис. 2.13

Множину $A \cap (B \cup C)$ зображує область, зафарбована на обох попередніх діаграмах, тому вона представлена на рис. 2.14 більш темною областю. Множину $A \cap B$ представлено на рис. 2.15 зафарбованою областю.

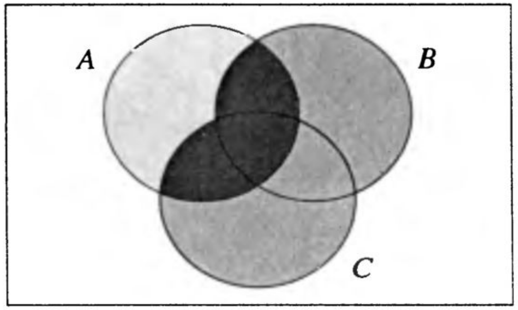


Рис. 2.14

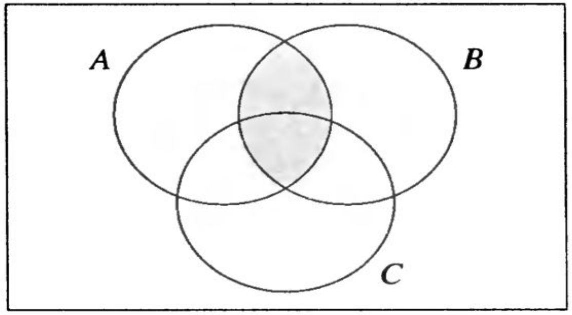


Рис. 2.15

Множину $A \cap B$ зображено на рис. 2.16 більше темною областю, а множину $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ зображено зафарбованою областю на рис. 2.17.

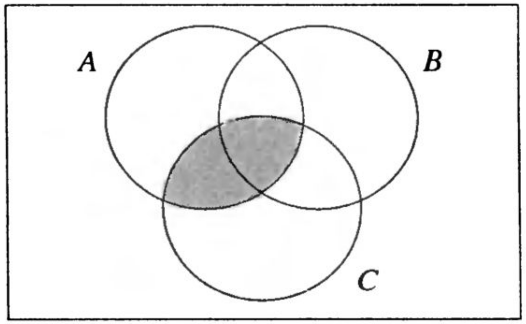


Рис. 2.16

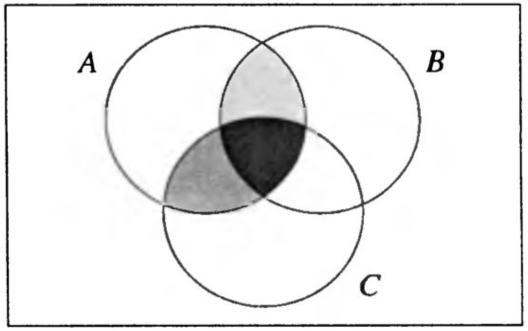


Рис. 2.17

Отже, $A \cap (B \cup C)$ і $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ зображуються однаково на діаграмах Венна, тому

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Властивості множин, сформульовані в наведених нижче теоремах, можуть бути перевірені шляхом формального доведення або на діаграмах Венна. Зверніть увагу, що вони дублюють відповідні властивості у численні висловлень.

ТЕОРЕМА 2.18. Нехай A, B і C - підмножини універсальної множини U. Тоді справедливі

а)*Закони ідемпотентності*

$$A \cap A = A;\ A \cup A = A.$$

б) *Подвійне доповнення*

$$(A')' = A.$$

в) *Закони де Моргана*

$$(A \cup B)' = A' \cap B';$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

г) *Властивості комутативності*

$$A \cap B = B \cap A;$$

$$A \cup B = B \cup A.$$

д) ***Властивості асоціативності***

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

е) ***Властивості дистрибутивності***

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

ж) ***Властивості тотожності***

$$A \cup \varnothing = A;$$

$$A \cap U = A.$$

з) ***Властивості доповнення***

$$A \cup A' = U;$$

$$A \cap A' = \varnothing.$$

Порівняння основних властивостей множин і логіки висловлень показало, що ці властивості мають багато загальних рис. Дана обставина знайшла своє втілення в загальній теорії, відомій як ***булева алгебра***. Свою назву теорія одержала на честь Дж. Буля, основоположника математичної логіки.

ОЗНАЧЕННЯ 2.19. Операція, задана на деякій множині, називається ***бінарною***, якщо вона діє на два елементи цієї множини і її результатом є елемент цієї ж множини.
ОЗНАЧЕННЯ 2.20. Операція, задана на множині, називається ***унарною***, якщо вона діє на один елемент множини і її результатом є елемент цієї ж множини.

БУЛЕВІ АЛГЕБРИ

ОЗНАЧЕННЯ 2.21. ***Булевою алгеброю*** є множина B, що містить спеціальні елементи 1 і 0, на якій задані дві бінарні операції + і · і одна унарна операція '. Для всіх x, y і z з B повинні виконуватись наступні аксіоми:

а) Закони комутативності

$$x \cdot y = y \cdot x;$$

$$x + y = y + x.$$

б) Закони асоціативності

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

в) Закони дистрибутивності

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z);$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z).$$

г) Закони тотожності

$$x + 0 = x;$$

$$x \cdot 1 = x.$$

д) Закони доповнення

$$x + x' = 1;$$

$$x \cdot x' = 0.$$

Елемент 1 називається ***одиничним елементом***, або ***одиницею***; елемент 0 називається ***нульовим елементом***, або ***нулем***; а x' називається ***доповненням*** x. Знак бінарної операції · часто опускається, і $x \cdot y$ записується просто як xy.

ТЕОРЕМА 2.22. Для всіх елементів x і y булевої алгебри виконуються такі співвідношення:

а) Закони ідемпотентності

$x + x = x$;

$x \cdot x = x$.

б) Властивості констант

$x + 1 = 1$;

$x \cdot 0 = 0$.

в) Закони поглинання

$x + (x \cdot y) = x$;

$x \cdot (x + y) = x$.

ДОВЕДЕННЯ. У кожному випадку доведемо перше із тверджень теореми.

а) $x + x = (x + x) \cdot 1 =$ властивість констант

$= (x + x) \cdot (x + x') =$ закон доповнення

$= x + (x \cdot x') =$ закон дистрибутивності

$= x + 0 =$ закон доповнення

$= x$; закон тотожності

б) $x + 1 = (x + 1) \cdot 1 =$ закон тотожності

$= (x + 1) \cdot (x + x') =$ закон доповнення

$= x + (1 \cdot x') =$ закон дистрибутивності

$= x + (x' \cdot 1) =$ закон комутативності

$= x + x' =$ закон тотожності

$= 1$; закон доповнення

в) $x + (x \cdot y) = (x \cdot 1) + (x \cdot y) =$ закон тотожності

$= x \cdot (1 + y) =$ закон дистрибутивності

$= x \cdot (y + 1) =$ закон комутативності

$= x \cdot 1 =$ властивість констант

$= x.$ закон тотожності

ТЕОРЕМА 2.23. (Закон єдиності доповнення) Доповнення довільного елемента x булевої алгебри єдиним чином визначається його властивостями: якщо $x + x' = 1$, $x \cdot x' = 0$, $x + x^* = 1$, а $x \cdot x^* = 0$, то $x' = x^*$.

ДОВЕДЕННЯ. Якщо $x + x' = 1$ і $x + x^* = 1$, тоді

$x' = x \cdot 1 =$ закон тотожності

$= x' \cdot (x + x^*) =$ задано

$= x' \cdot x + x' \cdot x^* =$ закон дистрибутивності

$= x \cdot x' + x' \cdot x^* =$ закон доповнення

$= 0 + x' \cdot x^* =$ задано

$= x' \cdot x^* + 0 =$ закон комутативності

$= x' \cdot x^*$ закон тотожності

і

$x^* = x^* \cdot 1 =$ закон тотожності

$= x^* \cdot (x + x') =$ задано

$= x^* \cdot x + x^* \cdot x' =$ закон дистрибутивності

$= x \cdot x^* + x' \cdot x^* =$ закон комутативності

$= 0 + x' \cdot x^* =$ задано

$= x' \cdot x^* + 0 =$ закон комутативності

$= x' \cdot x^*,$ закон тотожності

т ак що $x^* = x' x^* = x'$.

ТЕОРЕМА 2.24. Для всіх елементів x і y булевої алгебри мають місце такі співвідношення:

а) Закон інволюції

$(x')' = x.$

б) Доповнення законів тотожності

$0' = 1;$

$1' = 0.$

в) Закони де Моргана

$(x + y)' = x' \cdot y';$

$(x \cdot y)' = x' + y'.$

ДОВЕДЕННЯ. Для доведення пункту (а) відмітимо, що

$x' + x = x + x' =$ закон комутативності

$= 1;$ закон доповнення

$x' \cdot x = x \cdot x' =$ закон комутативності

$= 0.$ закон доповнення

Отже, x є доповнення x' і відповідно до закону єдиності доповнення $(x')' = x$. Зверніть увагу, що кожна аксіома булевої алгебри складається з пари рівностей, які є двоїстими в тому розумінні, що якщо в одній рівності замінити + на · , · на + , 0 на 1 і 1 на 0, отримаємо другу рівність.

У результаті кожна теорема має двоїсту теорему у тому розумінні, що якщо у кожній теоремі булевої алгебри замінити + на · , · на + , 0 на 1 , а 1 на 0, знову одержимо теорему (хоча вона може й не відрізнятися від вихідної)

Ця відповідність має місце, оскільки кожний крок у доведенні двоїстої теореми є двоїстим відповідному кроку в доведенні вихідної теореми. Для прикладу розглянемо наведені нижче доведення першого із законів де Моргана

$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

і двоїстого до нього співвідношення

$$(x \cdot y)' = x' + y'.$$

Спочатку доведемо, що $(x + y)' = x' \cdot y'$. Для цього покажемо, що $(x + y) + x' \cdot y' = 1$ і $(x + y) \cdot (x' \cdot y') = 0$. Після цього, використовуючи закон єдиності доповнення, отримаємо $(x + y)' = x' \cdot y'$.

$(x + y) + x' \cdot y' = ((x + y) + x') \cdot ((x + y) + y') =$

закон дистрибутивності

$= ((y + x) + x') \cdot ((x + y) + y') =$ закон комутативності

$= (y + (x + x')) \cdot (x + (y + y')) =$ закон асоціативності

$= (y + 1) \cdot (x + 1) =$ закон доповнення

$= 1 \cdot 1 =$ властивість констант

$= 1;$ закон тотожності

$(x + y) \cdot (x' \cdot y') = (x' \cdot y') \cdot (x + y) =$ закон комутативності

$= ((x' \cdot y') \cdot x) + ((x' \cdot y') \cdot y) =$ закон дистрибутивності

$= (x \cdot (x' \cdot y')) + ((x' \cdot y') \cdot y) =$ закон комутативності

$= ((x \cdot x') \cdot y') + (x' \cdot (y' \cdot y)) =$ закон асоціативності

$= ((x \cdot x') \cdot y') + (x' \cdot (y \cdot y')) =$ закон комутативності

$= (0 \cdot y') + (x' \cdot 0) =$ закон доповнення

$= (y' \cdot 0) + (x' \cdot 0) =$ закон комутативності

$= 0 + 0 =$ властивість констант

$= 0.$ закон тотожності

Тепер покажемо, що $(x \cdot y)' = x' + y'$. Спочатку покажемо, що $(x \cdot y) \cdot (x' + y') = 0$ і $(x \cdot y) + (x' + y') = 1$. На основі закону єдиності доповнення, отримуємо, що $(x \cdot y)' = x' + y'$.

$(x \cdot y) \cdot (x' + y') = ((x \cdot y) \cdot x') + ((x \cdot y) \cdot y') =$

закон дистрибутивності

$= ((y \cdot x) \cdot x') + ((x \cdot y) \cdot y') =$ закон комутативності

$= (y \cdot (x \cdot x')) + (x \cdot (y \cdot y')) =$ закон асоціативності

$= (y \cdot 0) \cdot (x \cdot 0) =$ закон доповнення

$= 0 \cdot 0 =$ властивість констант

$= 0;$ закон тотожності

$(x \cdot y) + (x' + y') = (x' + y') + (x \cdot y) =$ закон комутативності

$= ((x' + y') + x) \cdot ((x' + y') + y) =$ закон дистрибутивності

$= (x + (x' + y')) \cdot ((x' + y') + y) =$ закон комутативності

$= ((x + x') + y') \cdot (x' + (y' + y)) =$ закон асоціативності

$= ((x + x') + y') \cdot (x' + (y + y')) =$ закон комутативності

$= (1 + y') \cdot (x' + 1) =$ закон доповнення

$= (y' + 1) \cdot (x' + 1) =$ закон комутативності

$= 1 \cdot 1 =$ властивість констант

$= 1.$ закон тотожності

Використовуючи правила теорії множин ,можна показати, що підмножини довільної множин утворюють булеву Алгебру, де $\cap$ і $\cup$ аналогічні бінарним операціям $\cdot$ і $+$, відповідно, а A - B відповідає B'. Множина A є одиничним елементом 1.

ВІДНОШЕННЯ

Серед розглянутих операцій над множинами був декартовий добуток множин A і B, що позначається через $A \times B$. Він являє собою множину $\{(a, b) : a \in A$ і $b \in B\}$. Таким чином, множина $A \times B$ складається з усіх впорядкованих пар, що мають як перший компонент елемент з множини A, а в якості другого компонента - елемент із B.

ОЗНАЧЕННЯ 2.25. ***Відношенням*** R з множини A в множину B називається довільна підмножина $A \times B$. Якщо $(a, b) \in R$, це записують як aRb; при цьому говорять, що a і b перебувають у відношенні R, або a ***відноситься до*** b. Якщо $A = B$, то відношення є підмножиною $A \times A$; таке відношення називають ***бінарним відношенням*** на A.

Надалі на множині будемо звичайно розглядати бінарні відношення, тому замість терміну “бінарне відношення” будемо вживати термін “відношення”.

Якщо $A = \{1,2,3\}$, $B = \{r, s\}$ і $A \times B = \{(1,r), (1,s), (2,r), (2,s), (3,r), (3,s)\}$, то $R = \{(1,r), (1,s), (3,s)\}$ є відношенням множин A і B. Можна записати, наприклад, пару $(3,s) \in R$ у вигляді $3Rs$. Множина $A \times B$ містить шість елементів, тому існує $2^6 = 64$ підмножин множини $A \times B$. Отже, існують 64 різні відношення на $A \times B$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.26. ***Область визначення*** відношення R з A в B - це множина всіх $x \in A$ таких, що для деяких $y \in B$ маємо $(x, y) \in R$. Інакше кажучи, область визначення R є множина всіх перших координат упорядкованих пар з R.

Множина значень відношення R з A в B - це множина всіх $y \in B$ таких, що для деякого $x \in A$ маємо $(x, y) \in R$. Інакше кажучи, множина значень R є множина всіх других координат упорядкованих пар з R.

ОЗНАЧЕННЯ 2.27. Нехай $R \subseteq A \times B$ є відношення на $A \times B$. Тоді відношення R^{-1} на $B \times A$ визначається в такий спосіб:

$R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$.

Інакше кажучи, $(b,a) \in R^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $(a,b) \in R$ або, що рівносильно, $b\, R^{-1}\, a$ тоді і тільки тоді, коли aRb.

Відношення R^{-1} називається ***оберненим відношенням*** до даного відношення R.

Нехай $R = \{(1, r), (1, s), (3, s)\}$, тоді $R^{-1} = \{(r, 1), (s, 1), (s, 3)\}$.

Нехай R - відношення $\{(x, y) : y$ є чоловіком $x\}$, тоді R^{-1} відношення $\{(x, y) : y$ - дружина $x\}$.

Нехай R - відношення $\{(x, y) : y$ є родичем $x\}$ або R відношення $\{(x, y) : x^2+y^2 = 4\}$, тоді $R^{-1}= R$.

З двох заданих відношень можна утворити нові відношення зазначеним нижче способом.

ОЗНАЧЕННЯ 2.28. Нехай $R_1 \subseteq A \times C$ - відношення на $A \times C$, а $R_2 \subseteq C \times B$ - відношення на $C \times B$.

Композицією відношень R_2 і R_1 називається відношення $R \subseteq A \times B$, задане в такий спосіб: $R =\{(a, b)$: існує такий елемент c з C, що $(a,c) \in R_1$ і $(c,b) \in R_2\}$.

Ця множина позначається $R = R_2 \circ R_1$.

Приклади

ПРИКЛАД Нехай $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x, y\}$, а $C = \{\square, \blacktriangle, \circ, \blacklozenge\}$, і нехай відношення R на $A \times B$ і S на $B \times C$ задані у вигляді:

$$R = \{(1,x), (1,y), (3,x)\};$$

$$S = \{(x, \square), (x, \blacktriangle), (y, \circ), (y, \blacklozenge)\}.$$

Тоді $S \circ R = \{(1, \square), (1, \blacktriangle), (1, \circ), (1, \blacklozenge), (3, \square), (3, \blacktriangle)\}$,

оскільки з $(1,x) \in R$ і $(x, \square) \in S \Rightarrow (1, \square) \in S \circ R$;

з $(1,x) \in R$ і $(x, \blacktriangle) \in S \Rightarrow (1, \blacktriangle) \in S \circ R$;

з $(1,y) \in R$ і $(y, \circ) \in S \Rightarrow (1, \circ) \in S \circ R$;

.

.

.

з $(3,x) \in R$ і $(x, \blacktriangle) \in S \Rightarrow (3, \blacktriangle) \in S \circ R$.

ПРИКЛАД. Нехай R і S - бінарні відношення на множині додатних цілих чисел, задані у вигляді $S = \{(x, x+2)$: x - додатне ціле число$\}$ і $R = \{(x, x^2)$: x – додатне ціле число$\}$. Тоді $S \circ R = \{(x, x^2+2)$: x - додатне ціле число$\}$ і $R \circ S = \{x,(x+2)^2)$: x - додатне ціле число$\}$.

ТЕОРЕМА 2.31. Композиція відношень асоціативна;

Тобто, якщо A, B і C - множини і якщо $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ і $T \subseteq C \times D$, тоді $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

ДОВЕДЕННЯ. Покажемо спочатку, що $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$. Нехай $(a, d) \in T \circ (S \circ R)$, тоді існує

таке $c \in C$, що $(a, c) \in S \circ R$ і $(c, d) \in T$.

Оскільки $(a, c) \in S \circ R$, існує таке $b \in B$, що $(a, b) \in R$ і (b, c)

$\in S$. Оскільки $(b, c) \in S$ і $(c, d) \in T$, то $(b, d) \in T \circ S$.

Оскільки $(b, d) \in T \circ S$ і $(a, b) \in R$, то $(a, d) \in (T \circ S) \circ R$.

Таким чином, $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.32.

Відношення R на $A \times A$ ***рефлексивне***, якщо (a, a) належить R для всіх a з A.

Відношення R називається ***антирефлексивне*,** якщо з $(a, b) \in R \Rightarrow a \neq b$ для всіх $a, b \in A$.

Відношення R ***симетричне*,** якщо для всіх a і b, що належать A, з $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

Відношення R ***транзитивне***, якщо для всіх a, b і $c \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Відношення R називається ***антисиметричним***, якщо для всіх a і b з A, з приналежності (a, b) і (b, a) відношенню $R \Rightarrow a = b$.

Приклади

ПРИКЛАД 2.33. Нехай $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ і нехай відношення $R_1 \subseteq A \times A$ є множина $R_1 = \{(1,1), (2,2,), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (1,4), (2,1), (2,4), (3,5), (5,3), (4,1), (4,2)\}$.

Відношення R_1 рефлексивне, тому що для кожного $a \in A$, $(a, a) \in R_1$.

Розглянувши всі можливі випадки й показавши, що в кожному з них з $(a, b) \in R_1 \Rightarrow \Rightarrow (b, a) \in R_1$, можна показати,

що відношення R_1 є симетричним.

Випадок	$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R_1}$	$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$	$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{R_1}$**?**
1	(1,2)	(2,1)	Так
2	(1,4)	(4,1)	Так
3	(2,1)	(1,2)	Так
. . .	. . .	. . .	. . .

Також можемо показати, що R_1 транзитивне, використовуючи метод прямого перебору, як показано на прикладі наступної таблиці.

Випадок	**(a, b) ∈ R_1**	**(b, c) ∈ R_1**	**(a, c)**	**(a, c) ∈ R_1?**
1	(1,2)	(2,1)	(1,1)	Так
2	(1,2)	(2,2)	(1,2)	Так
3	(1,2)	(2,4)	(1,4)	Так
4	(1,4)	(4,1)	(1,1)	Так
5	(1,4)	(4,2)	(1,2)	Так
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Проаналізувавши кожен можливий випадок, коли (a, b) ∈ R_1 і (b, c) ∈ R_1, одержуємо, що (a, c) ∈ R_1.

R_1 не є антисиметричним, оскільки (1,2) ∈ R_1 і (2,1) ∈ R_1, але

1 ≠ 2.

ПРИКЛАД 2.34. Нехай $A = \{\square, \blacktriangle, \circ, \blacklozenge\}$ і нехай $R_2 \subseteq A \times A$ визначено у вигляді $R_2 = \{(\square,\square), (\square,\blacktriangle), (\square,\blacklozenge), (\blacktriangle,\square), (\blacklozenge,\square), (\blacklozenge,\blacklozenge), (\circ,\blacklozenge), (\circ,\circ)\}$. R_2 не є рефлексивним, оскільки $\blacktriangle \in A$, але $(\blacktriangle,\blacktriangle) \notin R_2$. R_2 не є симетричним, оскільки $(\circ,\blacklozenge) \in R_2$, але $(\blacklozenge,\circ) \notin R_2$. R_2 не є антисиметричним, оскільки $(\blacktriangle,\square) \in R_2$ і $(\square,\blacktriangle) \in R_2$, але $\blacktriangle \neq \square$. R_2 не є транзитивним, так як $(\blacktriangle,\square) \in R_2$ і $(\square,\blacklozenge) \in R_2$, але $(\blacktriangle,\blacklozenge) \notin R_2$.

ПРИКЛАД 2.35. Нехай A - множина додатних цілих чисел. Визначимо відношення R, задаючи $(x, y) \in R$ умовою: y кратне x. R рефлексивне, оскільки для кожного додатного цілого числа n, $n = 1 \cdot n$ і $(n, n) \in R$. R не є симетричним, так як $(2,4) \in R$, але $(4,2) \notin R$; однак, R антисиметричне, так як, якщо $(m, n) \in R$ і $(n, m) \in R$, тоді n кратне m і m кратне n, так що $m = n$. R транзитивне, тому що якщо $(m, n) \in R$ і $(n, p) \in R$, тоді n кратне m і p кратне n, так що p кратне m і $(m, p) \in R$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.36. Нехай R - бінарне відношення на множині A.***Рефлексивне замикання*** R є найменше Рефлексивне відношення на A, що містить R як підмножину.

Симетричне замикання R є найменше симетричне відношення на A, що містить R як підмножину.

Транзитивне замикання R є найменше транзитивне відношення на A, що містить R як підмножину.

ТЕОРЕМА 2.37. Нехай R - відношення на множині A і $I = \{x: x = (a, a)$ для будь-якого $a \in A\}$. Тоді

а) $R \cup I$ є рефлексивне замикання R;

б) $R \cup R^{-1}$ є симетричне замикання R;

в) якщо A - скінченна множина з n елементів, то відношення $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$ є транзитивне замикання R.

ОЗНАЧЕННЯ 2.38. ***Граф*** - це скінченна множина V, названа ***множиною вершин***, на якій задане симетричне антирефлексивне відношення R і виділено множину E двохелементних підмножин V, обумовлених як $\{a, b\} \in E$ тоді і тільки тоді, коли $(a, b) \in R$ і $a \neq b$. Множина E називається ***множиною ребер.*** Усякий елемент E називається ***ребром***. Граф позначається $G(V,E)$. Говорять, що елементи a і b графа V ***з'єднані*** або ***зв'язані*** ребром $\{a, b\}$, якщо $\{a, b\} \in E$.

Скінченний граф звичайно зображується за допомогою діаграми, у якій вершини представлені точками, а ребра, що з'єднують дві вершини, - лініями між цими точками.

Приклади

ПРИКЛАД 2.39. Граф у якому множина вершин $V = \{a,b,c\}$, а $E = \{\{a,b\}, \{b,c\}\}$, може мати вигляд, як на рис. 2.18 або рис. 2.19.

рис. 2.18 рис. 2.19

$R = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\}$.

ОЗНАЧЕННЯ 2.41. ***Орієнтований граф***, або ***орграф*** G, ($G(V,E)$), складається із множини V вершин і відношення E на V, названого множиною ***орієнтованих ребер***, або просто ***ребер***, якщо зрозуміло, що граф орієнтований. Елемент множини E називається ***орієнтованим ребром.*** Якщо $(a, b) \in E$, тоді a називається ***початковою вершиною*** (a, b), а b - його ***кінцевою вершиною.***

Ребро (a, b) орграфа позначається на діаграмі стрілкою від a до b.В простому графі ребро представляється двоелементною підмножиною, щоб підкреслити, що ребро як відношення симетричне, тоді як в орграфі ребро представлене впорядкованою парою, щоб підкреслити те, що порядок має значення, і , що (a,b) може бути ребром діаграми, а (b, a) -ні.

Приклади

ПРИКЛАД 2.42. Орграф з вершинами $V = \{a,b,c\}$ і ребрами $E = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,b), (c,a)\}$ показаний на рис.2.21.

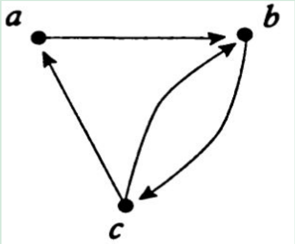


Рис.2.21

ПРИКЛАД 2.43. Орграф з вершинами $V = \{a,b,c,d\}$ і ребрами $E = \{(a,b), (b,c), (c,c), (b,d), (d,b), (c,d), (d,a)\}$ показаний на рис. 2.22.

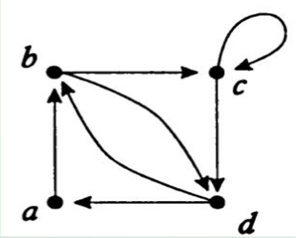


Рис.2.22.

Частково впорядковані множини

ОЗНАЧЕННЯ 2.44. Відношення *R* на *A* називають відношенням ***часткового порядку***, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне. Якщо відношення *R* на *A* є відношенням часткового порядку, то (*A*,*R*) називають ***частково впорядкованою множиною***, або ***ЧУ-множиною*** з порядком *R*. Якщо відношення порядку *R* передбачається за замовчуванням, то (*A*,*R*) можна позначати просто через *A*.

ОЗНАЧЕННЯ 2.47. Два елементи *a* і *b* частково впорядкованої множини $(S, \leq)$ ***порівнянні***, якщо $a \leq b$ або $b \leq a$. Якщо кожні два елементи частково впорядкованої множини $(S, \leq)$ порівнянні, то $(S, \leq)$ називається ***цілком упорядкованою множиною***, або ***ланцюгом***.

Приклади

ПРИКЛАД 2.45. Нехай $C = \{1,2,3\}$, а X - множина всіх підмножин множини C: $X = P(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Визначимо відношення R на X за допомогою $(T, V) \in R$ якщо $T \subseteq V$. Так, $(\{2\}, \{1,2\}) \in R$, оскільки $\{2\} \subseteq \{1,2\}$ і $(\{2,3\}, \{3\}) \notin R$, оскільки $\{2,3\} \not\subset \{3\}$. Можна легко перевірити, що R - відношення часткового порядку, а (A,R) –ЧУ-множина.

ПРИКЛАД 2.46. Нехай S - множина дійсних чисел, а R_1 – відношення, визначене умовою (x, y) R_1, якщо x y. Легко показати, що R_1 - відношення часткового порядку, а (S, R_1) – ЧУ-множина.Часткове впорядкування прийнято позначати через $\leq$, а частково впорядковану множину - через $(S, \leq)$, де $\leq$ частковий порядок на множині S. Якщо $(a, b) \in \leq$, то, відповідно $a \leq b$.

ПРИКЛАД 2.48. Нехай T - множина додатних дільників числа 30 і $\leq_1$ є відношення $m \leq_1 n$, якщо m ділить n без остачі. Цілі числа 5 і 15 порівнянні, оскільки 5 ділить 15 без остачі, а 5 і 6 - ні.

ПРИКЛАД 2.49. Нехай A - множина цілих чисел і $R = \leq_2$ – відношення $x \leq_2 y$, якщо x менше або дорівнює y. Упорядкована множина $(A, \leq_2)$ є ланцюгом.

ВІДНОШЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Відношення R на A ***рефлексивне*,** якщо (a, a) належить R для всіх a з A. Відношення R ***симетричне***, якщо для всіх a і b з A з того, що (a, b) належить R, випливає, що (b, a) належить R. Відношення R ***транзитивне*,** якщо для всіх a, b і c із A таких, що (a, b) і (b, c) належать R, (a, c) також належить R. Ці властивості об'єднані в наведеному нижче означенні.

ОЗНАЧЕННЯ 2.51. Відношення R на A є ***відношення еквівалентності***, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Приклади

ПРИКЛАД 2.52. Нехай A - множина цілих чисел. Визначимо відношення $R_3 \subseteq A \times A$ за допомогою $R_3 = \{(a,b) : a - b = 5 \cdot k$ для деякого цілого числа $k\}$. Наприклад,(7, 2) $\in R_3$, оскільки 7 - 2 = 5 = 5 · 1, і (-11,4) $\in R_3$, тому що (-11)-4=-15 = 5 · (-3).

Відношення R_3 рефлексивне. Якщо a - ціле число (тобто $a \in A$), то $a - a = 0 = 5 \cdot 0 = 5 \cdot k$ для $k = 0$, так що $(a, a) \in R_3$.

Відношення R_3 симетричне. Припустимо, $(a, b) \in R_3$. Тоді існує таке ціле число m, що $a - b = 5 \cdot m$ і

$b - a = -(a - b) = -(5 \cdot m) = 5 \cdot (-m)$ для цілого числа $-m$.

Таким чином, $(b, a) \in R_3$. Відношення R_3 транзитивне.

Припустимо, що a, b і c - цілі числа, $(a, b) \in R_3$ і $(b, c) \in R_3$.

За означенням, якщо $(a, b) \in R_3$, тоді $a - b = 5 \cdot k$ для деякого

цілого числа k, і якщо $(b, c) \in R_3$, тоді $b - c = 5 \cdot m$ для деякого цілого числа m.

Додавання лівих і правих частин цих двох рівностей дає

$$(a - b) + (b - c) = 5 \cdot k + 5 \cdot m \qquad \text{або}\ a - c = 5 \cdot (k + m)$$

для цілого числа $k + m$. За означенням R_3, $(a, c) \in R_3$, тому R_3 транзитивне. Оскільки R_3 рефлексивне, симетричне і транзитивне, воно є відношенням еквівалентності.

Відношення еквівалентності R на множині A розбиває її на підмножини, елементи яких еквівалентні один одному і не еквівалентні елементам інших підмножин. У контексті відношень еквівалентності ці підмножини називають ***класами еквівалентності*** по відношенню R.

ОЗНАЧЕННЯ 2.53. Нехай $a \in A$, і R – відношення еквівалентності на $A \times A$. Нехай $[a]$ позначає множину $\{x : xRa\} = \{x: (x, a) \in R\}$, названу ***класом еквівалентності***, що містить a. Символ $[A]_R$ позначає множину всіх класів еквівалентності множини A по відношенню R.

ОЗНАЧЕННЯ 2.56. Нехай A і I - множини і нехай $\langle A\rangle = \{A_i : i \in I\}$, де $I \neq \varnothing$, є множина непустих підмножин множини A. Множина $\langle A\rangle$ називається ***розбиттям*** A, якщо виконуються дві умови :

а) $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всіх $i \neq j$;

б) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, тому що a належить A тоді і тільки тоді, коли $a \in A_i$ для деякого $i \in I$.

Приклади

ПРИКЛАД 2.55. Розглянемо відношення еквівалентності R_3 із приклада 2.52. Для множини A всіх цілих чисел $R_3 \subseteq A \times A$ було визначено за допомогою $R_3 = \{(a, b) : a - b = 5 \cdot k$ для деякого цілого числа $k\}$. Оскільки $[a] = \{x : (x, a) \in R_3\} =$
$= \{x : xR_3a\} = \{x : x - a = 5 \cdot k$ для деякого цілого числа $k\} =$
$=\{x : x = a + 5 \cdot k$ для деякого цілого $k\}$,одержуємо, що класи
$[0] = \{..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, ...\} = … = [-5] = [0] = [5] = [10] = …,$
$[1] = \{..., -14, -9, -4, 1, 6, 11, ...\} = … = [-9] = [-4] = [1] = [6] = …,$
$[2] = \{..., -13, -8, -3, 2 , 7 , 12, ...\} = … = [-3] = [-2] = [7] = [12] = …,$
$[3] = \{..., -12, -7, -2, 3, 8, 13,...\} = … = [-2] = [3] = [8] = [13] = …,$
$[4] = \{..., -11, -6, -1, 4 , 9, 14, ...\} = … =[-6] = [-1] = [4] = [9] = …$
являють собою різні класи еквівалентності по відношенню R_3. Таким чином, $[A]_{R3} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$.

ТЕОРЕМА 2.57. Непуста множина підмножин $\langle A \rangle$ множини A є розбиттям A тоді і тільки тоді, коли $\langle A \rangle = [A]_R$ по деякому відношенню еквівалентності R.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $\langle A \rangle = \{A_1 : i \in I\}$ є розбиттям A. Визначимо відношення R на $A \times A$ в такий спосіб: xRb тоді і тільки тоді, коли a і b належать тій самій підмножині A_i для деякого i. Безсумнівно, що для всіх a з A маємо aRa, тому R рефлексивне. Якщо a і b належать одній підмножині A_i, тоді b і a також належать цій підмножині A_i, тому R симетричне. Якщо елементи a і b належать одній підмножині і елементи b і c належать одній підмножині, то a і c теж перебувають в одній підмножині, в силу умови $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Отже, R транзитивне і являє собою відношення еквівалентності.

Тепер припустимо, що R - відношення еквівалентності.

Необхідно показати, що $[A]_R = \{[a] : a \in A\}$ є розбиттям A.

Очевидно, $[a]$ непусте для всіх a, тому що $a \in [a]$. Очевидно також, що A є об'єднанням $[a]$, так що $a \in A$. Припустимо, що перетин $[a] \cap [b]$ непустий і $x \in [a] \cap [b]$. Тоді xRa і xRb, і, у силу симетричності відношення, aRx. Але оскільки aRx і aRb, то, у силу транзитивності відношення, aRb. Тому, $a \in [b]$.

Якщо $y \in [a]$, то yRa, а оскільки aRb, то yRb, у силу транзитивності відношення. Тому $[a] \subseteq [b]$.

Аналогічно можна показати, що $[b] \subseteq [a]$, тому $[a] = [b]$ і $[A]_R$ являє собою розбиття A.

Приклади

ПРИКЛАД 2.58. Нехай $A = \{□, ▲, ○, ♦\}$. Розглянемо розбиття

$$A_1 = \{□\},\ A_2 = \{▲, ○, ♦\}.$$

Відповідно до доведення попередньої теореми, необхідно визначити R у такий спосіб: $R = \{(a,b) : a \in A_i$ і $b \in A_i$ для деякого $i\}$. Отже,

$R = \{(□,□), (♦,▲),(♦,○), (♦,♦), (○,▲), (○,○), (○,♦), (▲,▲), (▲,○), (▲,♦)\}$

є відношення, що відповідає заданому розбиттю.