ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

Крім логічних зв’язок в математичних міркуваннях часто зустрічаються *квантори* “для всякого ($\forall$)” і “існує ($\exists$)”. Наприклад, визначення неперервності починається словами “для всякого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, ...”.

Можна формулювати різні твердження, що включають квантори. Ми будемо записувати такі твердження з допомогою *формул* і дамо визначення істинності формул при даній інтерпретації вхідних символів.

Формули і інтерпретації

Почнемо з прикладу. Нехай M – деяка непуста множина, а R – бінарне відношення на ній. Розглянемо формулу

$$\forall x \exists y R(x,y).$$

Ця формула виражає деяку властивість відношення R (а саме, для всякого елемента $x \in M$ існує елемент $y \in M$ такий, що R(x,y)) і може бути істинною або фальшивою в залежності від області M.

Питання про істинність чи фальшивість формули

$$\forall x \exists y R(x,y)$$

для даних множини M і бінарного відношення R на ній не має змісту, поки не уточнена область M. Наприклад, якщо M = **N** і R(x,y) є x>y, то формула є фальшивою. Якщо R(x,y) є x<y, то формула є істинною.

Перейдемо до формальних визначень.

Нехай M – непорожня множина.

Df. Назвемо k-місною *функцією* довільне відображення M^k в M визначене на всьому M^k.

Df. Назвемо k-місним *предикатом* на множині M довільне відображення M^k в множину $\{0,1\}$.

Зафіксуємо деякий набір символів, які будемо називати *змінними*. Як правило, це латинські букви x, y, z, u, … або ті ж букви з індексами.

Символи f, g, h, … будемо називати *функціональними*.

Символи P, Q, R, … будемо називати *предикатними*.

Всякий функціональний або предикатний символи, як було зазначено, мають визначе-ну кількість аргументів.

Функціональний символ без аргументів будемо ототожнювати з елементами множи-ни M.

Визначимо поняття *терма*.

Df. *Термом* називається послідовність змінних, ком, дужок і функціональних символів, яку можна побудувати за наступними правилами:

1. *Змінна* є терм.

2. *Константа* є терм (функ. символ без аргументів).

3. Якщо $t_1, \ldots, t_k$ – терми, а f – функціональний символ розмірності $k>0$, то $f(t_1, \ldots, t_k)$ є *термом*.

Df. Якщо A – предикатний символ розмірності k, а $t_1, \ldots, t_k$ – терми, то вираз $A(t_1, \ldots, t_k)$ є *атомарною формулою*.

Формули логіки предикатів будуються за такими правилами:

1. Атомарна формула – формула.
2. Якщо α - формула, то ¬α - формула.
3. Якщо α і β - формули, то вирази $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ – формули.

Якщо α є формулою, а ξ - змінна, то вирази $\forall \xi \alpha$ і $\exists \xi \alpha$ - формули.

Отже, поняття формули повністю визначене. Такі формули іноді називають *формулами першого порядку* або *формулами мови першого порядку*.

Наступний крок – це визначення *інтерпретації*. Щоб задати інтерпретацію необхідно:

1. Задати не порожню множину M (носій інтерпретації).

2. Для кожного предикатного символа вказати предикат, визначений на множині M.

3. Для кожного функціонального символу вказати функцію з аргументами і значеннями в множині М.

Для кожної інтерпретації формула може приймати значення 1 або 0 згідно з наступними правилами:

1. Якщо задані значення формул α і β, то значення формул $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ можна одержати з відповідних таблиць.

2. Значення формули $(\forall x)\alpha$ рівне 1 $\Leftrightarrow$ коли α приймає значення 1 для кожного $x \in M$.

3. Значення формули $(\exists x)\alpha$ рівне 1 $\Leftrightarrow$ коли α приймає значення 1 хоча б для одного $x \in M$.

Df. *Параметрами* (***вільними змінними***)

- терма є всі змінні, що в нього входять;
- атомарної формули є параметри всіх термів, що в неї входять;
- формули $\neg\alpha$ є параметри формули α;
- формул $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ є всі параметри формул α і β;

- формул $(\forall x)\alpha$ і $(\exists x)\alpha$ є всі параметри формули α, крім змінної x.

Зазначимо, що формула може мати змінну, яка вільно і зв'язано входить в формулу.

Приклад. Розглянемо формули

$$(\forall x)\, P(x) \text{ і } (\exists x)\neg P(x).$$

Нехай задана інтерпретація:

$$M = \{1,2\},\ P(1) = 1,\ P(2) = 0.$$

Легко бачити, що значення формули $(\forall x)\, P(x)$ є 0 так, як $P(2) = 0$. Значення формули $(\exists x)\neg P(x)$ є 1 так, як $\neg P(2) = 1$ в цій інтерпр.

Приклад. Розглянемо формулу

$$(\forall x)\ (\exists y)\ P(x,y).$$

Задамо наступну інтерпретацію: $M=\{1,2\}$, $P(1,1)=1$, $P(1,2)=0$, $P(2,1)=0$, $P(2,2)=1$.

Якщо $x=1$, то існує y ($y=1$) таке, $P(1,y)= 1$. Якщо $x=2$, то існує y ($y=2$) таке, $P(1,y) = 1$. Отже, при заданій інтерпретації для кожного x із M існує y таке, що $P(x,y) = 1$, тобто формула $(\forall x)\ (\exists y)\ P(x,y)$ є істинною в цій інтерпретації.

Приклад. Розглянемо формулу

$$(\forall x)\ (P(x) \to Q(f(x),a)).$$

В цій формулі маємо константу a, одномісний функціональний символ f, одномісний предикатний символ P і один двохмісний предикатний символ Q.

Нехай маємо наступну інтерпретацію: $M=\{1,2\}$, $a=1$, $f(1)=2$, $f(2)=1$, $P(1)=0$, $P(2)=1$, $Q(1,1)=1$, $Q(1,2)=1$, $Q(2,1)=0$, $Q(2,2)=1$.

Якщо $x=1$, то

$P(x) \rightarrow Q(f(x),a) = P(1) \rightarrow Q(f(1),a) = P(1) \rightarrow Q(2,1) = 0 \rightarrow 0 = 1.$

Якщо $x=2$, то

$P(x) \rightarrow Q(f(x),a) = P(2) \rightarrow Q(f(2),a) = P(2) \rightarrow Q(1,1) = 1 \rightarrow 1 = 1.$

Так як $P(x) \rightarrow Q(f(x),a)$ істинна для всіх $x \in M$, то формула $(\forall x)\,(P(x) \rightarrow Q(f(x),a))$ істинна в заданій інтерпретації.

Приклад. В формулі $(\forall x)\ P(x,y)$ парамет-ром (вільною змінною) є змінна y.

В формулі $(\forall x)\ P(x,y) \wedge (\forall y)\ Q(y)$ змінна y є одночасно і вільною і зв'язаною.

В формулі $(\forall x)\ P(x,y)$ змінна x є зв'язаною.

Df. Формула називається *замкнутою*, якщо вона не має параметрів.

Приклад. Формула

$$(\forall x)\ (\exists y)\ P(x,y)$$

є замкнутою формулою.

Як і у випадку алгебри (логіки) висловлювань, можна ввести наступні визначення:

Df. Говорять, що формула G істинна при деякій інтерпретації I, якщо її значення є істиною при цій інтерпретації. При цьому говорять, що I є *моделлю* формули G.

Df. Говорять, що формула *загальнозначима (тавтологія)*, якщо вона істинна при всіх можливих інтерпретаціях.

Df. Формула *незагальнозначима*, якщо вона не є загальнозначимою.

Df. Говорять, що формула *суперечлива*, якщо вона фальшива при всіх можливих інтерпретаціях.

Df. Формула *несуперечлива (виконувана)*, якщо вона не є суперечливою.

Df. Говорять, що G є *логічним наслідком* формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, якщо для всякої інтерпретації I в якій $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$ істинна, G також істинна.

Так як в логіці предикатів існує нескінченна кількість областей, то відповідно існує і нескінченна кількість інтерпретацій. Отже, на відміну від алгебри висловлювань, *не можна* довести загальнозначимість чи суперечливість формули її оцінкою при всіх можливих інтерпретаціях.

В випадку логіки предикатів потрібна інша процедура або інший метод перевірки загальнозначимості формули.

В алгебрі висловлювань ми вводили дві нормальні форми – кон’юнктивну і диз’юнктивну. В логіці предикатів теж є нормальні форми. Мета їх введення – спрощення процедури доведення загальнозначимості. Одна з них – так звана *попередня нормальна форма*.

Df. Формула F логіки предикатів знаходиться в *попередній нормальній формі* тоді і тільки тоді, коли формула F має вигляд

$$(Q_1x_1)\ \dots\ (Q_nx_n)\ (M),$$

де (Q_ix_i), $i=1,\dots n$, є або $(\forall x_i)$ або $(\exists x_i)$, M -

формула, яка не містить кванторів.

$(Q_1x_1) \ldots (Q_nx_n)$ є *префіксом* , а M – *матрицею* формули F.

Приклад. Формули

$$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge Q(y)),$$

$$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \rightarrow Q(y)),$$

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Q(x,y) \rightarrow R(z))$$

знаходяться в попередній нормальній формі.

Як перетворити формулу до попередньої нормальної форми?

Df. Формули F і G *еквівалентні* (записується F=G) тоді і тільки тоді, коли істинносні значення цих формул одні і ті ж при будь-яких інтерпретаціях.

Основні пари еквівалентних формул алгебри висловлювань будуть, зрозуміло, еквівалентними і логіці предикатів. Крім них існують еквівалентності, що містять квантори. Розглянемо такі еквівалентності.

Нехай F є формулою, що містить вільну змінну x. Щоб підкреслити, що вільна змінна x входить в F, будемо записувати F в вигляді F[x]. Нехай G є формулою, яка не містить змінної x. Тоді будемо мати наступні пари еквівалентних формул (де Q є $\forall$ або $\exists$):

1. $(Qx)F[x] \vee G = (Qx)(F[x] \vee G)$,
2. $(Qx)F[x] \wedge G = (Qx)(F[x] \wedge G)$,
3. $\neg((\forall x)F[x]) = (\exists x)(\neg F[x])$,
4. $\neg((\exists x)F[x]) = (\forall x)(\neg F[x])$.

Еквівалентності 1 і 2 істинні, так як G не містить x, a, отже, може бути внесена в область дії квантора Q.

Еквівалентності 3 і 4 можна довести безпосередньо. Нехай I – довільна інтерпретація з областю M. Якщо $\neg((\forall x)F[x])$ істинна в I, то $(\forall x)F[x]$ фальшива в I. Це означає, що існує такий елемент e в M, що F[e] фальшива, тобто $\neg F[e]$ істинна в I. Отже, $(\exists x)(\neg F[x])$ істинна в I.

З іншого боку, якщо $\neg((\forall x)F[x])$ фальшива в I, то $(\forall x)F[x]$ істинна в I. Це означає, що $F[x]$ істинна для кожного елемента x в M, тобто $\neg F[x]$ фальшива для кожного елемента x в M. Отже, $(\exists x)(\neg F[x])$ фальшива в I. Так як $\neg((\forall x)F[x])$ і $(\exists x)(\neg F[x])$ завжди приймають одне і те ж істиносне значення для довільної інтерпретації I, то за визначенням

$$\neg((\forall x)F[x])=(\exists x)(\neg F[x]).$$

Аналогічно доводиться 4.

Нехай F[x] і H[x] – формули з вільною змінною x. Тоді справедливі наступні тотожності:

5. $(\forall x)F[x] \wedge (\forall x)H[x] = (\forall x)(F[x] \wedge H[x])$,
6. $(\exists x)F[x] \vee (\exists x)H[x] = (\exists x)(F[x] \vee H[x])$,

тобто квантор загальності $\forall$ і квантор існу-вання $\exists$ можна розподіляти по $\wedge$ і $\vee$ відповід-но.

В загальному випадку справедливі нас-тупні тотожності:

7. $(Q_1x)F[x] \vee (Q_2x)H[x] = (Q_1x)(Q_2z)(F[x] \vee H[z])$,

8. $(Q_3x)F[x] \wedge (Q_4x)H[x] = (Q_3x)(Q_4z)(F[x] \wedge H[z])$,

де Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 є $\forall$ або $\exists$, а z не входить в $F[x]$.

Використовуючи тотожності алгебри вис-

Алгоритм перетворення формул ЛП до попередньої нормальної форми

1. Використовуючи правила

$$F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F),$$

$$F \rightarrow G = \neg F \vee G,$$

виключити логічні операції $\leftrightarrow$, $\rightarrow$.

2. Використовуючи правило

$$\neg(\neg F) = F,$$

закони де Моргана і закони

$$\neg((\forall x)F[x]) = (\exists x)(\neg F[x]), \neg$$

$$((\exists x)F[x]) = (\forall x)(\neg F[x]),$$

переносимо знак заперечення всередину формули.

3. Перейменовуємо зв'язані змінні, якщо це потрібно.

4. Використовуємо тотожності ЛП 1-6 з тим, щоб винести квантори на початок формули.

Приклад. Привести формулу

$$(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)$$

до попередньої нормальної форми.

$(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x) = \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) =$

$= (\exists x)(\neg P(x)) \vee (\exists x)Q(x) =$

$= (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x)).$

Отже, попередня нормальна форма формули

$(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$ є $(\exists x)(\neg P(x) \vee Q(x)).$

Приклад. Привести формулу $(\forall x)\ (\forall y)((\exists z)P(x,z) \wedge P(y,z)) \to (\exists u)Q(x,y,u))$.

до попередньої нормальної форми.

$(\forall x)\ (\forall y)((\exists z)P(x,z) \wedge P(y,z)) \to (\exists u)Q(x,y,u)) =$

$(\forall x)(\forall y)(\neg((\exists z)P(x,z) \wedge P(y,z))) \vee (\exists u)Q(x,y,u))=$

$(\forall x)(\forall y)((\forall z)(\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z)) \vee (\exists u)Q(x,y,u))$

Теорема Ербрана

Як показав Чьорч, *не існує* ніякої загальної процедури, ніякого алгоритму для перевірки загальнозначимості формули логіки предикатів.

Разом з тим, *існують* алгоритми, які можуть підтвердити, що формула логіки предикатів є тавтологією, якщо це дійсно так.

В їх основі лежить метод Ербрана, який є основою більшості сучасних алгоритмів пошуку доведень.

За визначенням тавтологія – це формула істинна при всіх інтерпретаціях. Ербран розробив алгоритм знаходження інтерпретації, яка спростовує дану формулу. Однак, якщо формула справді є тавтологією, то ніякої інтерпретації не існує і алгоритм завершує роботу за скінченну кількість кроків.

Метод Ербрана є основою більшості сучасних алгоритмів пошуку доведень.

Скулемівські стандартні форми

Подальші процедури пошуку доведень насправді є процедурами *спростування*, тобто замість доведення загальнозначимості формули доводиться, що її заперечення суперечливе. Це тільки питання зручності.

Крім цього ці процедури використовують так звану “стандартну форму” логічної формули.

Використовувались наступні ідеї:

1. Формула логіки предикатів може бути зведена до *попередньої нормальної форми (ПНФ)*.

2. Оскільки матриця не містить кванторів, вона може бути зведена до КНФ.

3. Зберігаючи суперечливість формули, в ній можна елімінувати квантори існування шляхом використання скулемівських функцій.

Ми вже обговорювали, як звести формулу до попередньої нормальної форми. Ми, також, можемо зводити матрицю до КНФ. Зараз ми поговоримо про те, як елімінувати квантори існування.

Нехай формула F знаходиться в ПНФ $(Q_1x_1) \ldots (Q_nx_n)$ (M), де M є КНФ і Q_r є квантор існування в префіксі $(Q_1x_1) \ldots (Q_nx_n)$, $1 \leq r \leq n$.

1. Якщо ніякий квантор загальності не стоїть в префіксі лівіше Q_r , то вибираємо нову константу c, відмінну від інших констант, які входять в M, замінюємо всі x_r, що зустрічаються в M, на c і викреслюємо $(Q_r x_r)$ з префікса.

2. Якщо $Q_{s_1}, \ldots, Q_{s_m}$ - список всіх кванторів загальності, що знаходяться лівіше Q_r , $1 \le s_1 < \ldots < s_m < r$, то вибираємо новий функціональний символ f, відмінний від інших, всі x_r в M міняємо на $f(x_{s_1}, \ldots, x_{s_m})$, елімінуємо $(Q_r x_r)$.

3. Повторюємо пункти 1 або 2 для всіх кванторів існування в префіксі. Остання з одержаних формул є *скулемівською стандартною формою* (або просто *стандартною формою*) формули F.

Константи і функції, що використовуються для заміни змінних квантора існування, називаються *скулемівськими функціями*.

Приклад. Одержати стандартну форму для формули

$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)\ P(x,y,z,u,v,w)$.

В цій формулі лівіше $(\exists x)$ нема ніяких кванторів загальності, лівіше $(\exists u)$ стоять $(\forall y)$ і $(\forall z)$, лівіше $(\exists w)$ стоять $(\forall y)$ і $(\forall z)$ і $(\forall v)$. Отже, замінюємо змінну x на константу a, змінну u – на двомісну функцію f(y,z), змінну w – на тримісну функцію g(y,z,v). Таким чином одержимо стандартну форму

$(\forall y)(\forall z)(\forall v)\ P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))$.

Приклад. Одержати стандартну форму для формули

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)\,((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z)).$$

Спочатку зведемо матрицю до КНФ:

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x,y) \vee R(x,y,z)) \wedge (Q(x,z) \vee R(x,y,z))).$$

Змінні y, z замінюємо одномісними функціями f(x), g(x) відповідно. Одержимо СФ

$$(\forall x)((\neg P(x,f(x)) \vee R(x,f(x),g(x))) \wedge (Q(x,g(x)) \vee R(x,f(x),g(x))))$$

Df. *Диз'юнкт* є диз'юнкція літер.

Іноді будемо розглядати множину літер, як синонім диз'юнкту. Наприклад, $P \vee Q \vee \neg R = \{P, Q, \neg R\}$.

Df. Диз'юнкт, що містить r літер, називається *r-літерним* диз'юнктом. Диз'юнкт, що не містить літер, називається *пустим* диз'юнктом і позначається $\square$.

Диз'юнкції $\neg P(x,f(x)) \vee R(x,f(x),g(x))$ і $Q(x,g(x)) \vee R(x,f(x),g(x))$ в стандартній формі з останнього прикладу суть диз'юнкти.

Будемо вважати, що множина диз'юнктів S є кон'юнкцією всіх диз'юнктів із S, де кожна змінна вважається керованою квантором загальності. При такій домовленості стандартна форма може задаватись множиною диз'юнктів. Наприклад, стандартна форма з останнього прикладу може бути задана множиною:

$\{\neg P(x,f(x)) \vee R(x,f(x),g(x)),\ Q(x,g(x)) \vee R(x,f(x),\ g(x))\}$.

Теорема. Нехай S – множина диз'юнктів, які задають стандартну форму формули F. Тоді F суперечлива тоді і тільки тоді коли S суперечлива.

Доведення. Будемо вважати, що F знаходиться в ПНФ, тобто $F = (Q_1 x_1) \ldots (Q_n x_n) M[x_1, \ldots, x_n]$ ($M[x_1, \ldots, x_n]$ означає, що матриця M містить змінні $x_1, \ldots, x_n$). Нехай Q_r – перший квантор існування і

$F_1 = (\forall x_1)\ldots(\forall x_{r-1}) (Q_{r+1} x_{r+1}) \ldots (Q_n x_n) M[x_1, \ldots, x_{r-1}, f(x_1, \ldots, x_{r-1}), x_{r+1}, \ldots x_n]$, де f – скулемівська функція для x_r, $1 \le r \le n$. Ми хочемо показати, що F суперечлива тоді і тільки тоді, коли F_1 суперечлива.

Нехай F суперечлива. Якщо F_1 несуперечлива, то існує інтерпретація I така, що F_1 істинна в I. Тобто, формула $(Q_{r+1}x_{r+1}) \ldots (Q_n x_n) M[x_1, \ldots, x_{r-1}, f(x_1, \ldots, x_{r-1}), x_{r+1}, \ldots x_n]$ буде істинною в I для всіх $x_1, \ldots, x_{r-1}$. Отже, для всіх $x_1, \ldots, x_{r-1}$ буде існувати x_r $(= f(x_1, \ldots, x_{r-1}))$ для якого $(Q_{r+1}x_{r+1}) \ldots (Q_n x_n) M[x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \ldots x_n]$ істинна.

Таким чином, F суперечлива. Отже, F_1 повинна бути суперечливою.

З іншого боку, припустимо, що F_1 суперечлива. Якщо F несуперечлива, то існує інтерпретація I така, що для всіх $x_1, \ldots, x_{r-1}$ буде існувати x_r для якого $(Q_{r+1}x_{r+1}) \ldots (Q_n x_n)$ $M[x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \ldots x_n]$ істинна в I. Розширимо I, включаючи функцію f, яка відображає $x_1, \ldots, x_{r-1}$ в x_r. Позначимо це розширення через I'.

Зрозуміло, що для всіх $x_1, \ldots, x_{r-1}$ формула $(Q_{r+1}x_{r+1}) \ldots (Q_n x_n)\, M[x_1, \ldots, x_{r-1}, f(x_1, \ldots, x_{r-1}), x_{r+1}, \ldots x_n]$ буде істинною в I', тобто F_1 істинна в I', що суперечить припущенню про те, що F_1 суперечлива. Отже, F повинна бути суперечливою.

Аналогічно у випадку декількох кванторів існування.

Якщо F суперечлива, то за попередньою теоремою F=S. Якщо F несуперечлива, то взагалі кажучи, $F \neq S$. Наприклад, якщо $F = (\exists x)P(x)$, то стандартна форма цієї формули є $S=P(a)$. Але в інтерпретації I з носієм $M=\{1,2\}$, значеннями для предиката $P(1) = 0$, $P(2)=1$, значенням для константи $a=1$формула F буде істинною в I, а S – фальшивою. Таким чином $F \neq S$.

Зауваження. Якщо $F=F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$, то ми можемо побудувати множини S_i диз'юнктів, де кожна S_i є стандартною формою F_i.

Якщо $S = S_1 \cup \ldots \cup S_n$, то можна показати (за аналогією з попередньою теоремою), що F суперечлива тоді і тільки тоді, коли S суперечлива.

Приклад. Як довести наступне твердження: *якщо xx=e для всіх x в групі G, то G комутативна, де e – одиниця групи*.

Формалізуємо це твердження мовою логіки предикатів разом з деякими основними аксіомами теорії груп, а потім подамо заперечення цього твердження множиною диз’юнктів.

Група задовольняє наступним аксіомам:

A_1. Якщо $x,y \in G$, то $xy \in G$ (властивість замкнутості)

A_2. Якщо $x,y,z \in G$, то $x(yz)=(xy)z$ (асоціативність).

A_3. Існує $e \in G$ таке, що $xe=ex=x$ для всіх $x \in G$ (існування одиниці).

A_4. Для кожного $x \in G$ існує елемент $x^{-1} \in G$ такий, що $x\,x^{-1}= x^{-1}x=e$ (існування оберненого елемента).

Нехай $P(x,y,z)$ позначає предикат $xy=z$, а $i(x)$ позначає x^{-1}. Тоді аксіоми A_1-A_4 можна переписати у вигляді формул ЛП:

A_1. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\, P(x,y,z)$

A_2.

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)(P(x,y,u)\wedge P(y,z,v)\wedge P(u,z,w)\to P(x,v,w))\ \wedge$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)(P(x,y,u)\wedge P(y,z,v)\wedge P(x,v,w)\to P(u,z,w))$$

A_3. $(\forall x)P(x,e,x)\wedge(\forall x)P(e,x,x)$

A_4. $(\forall x)P(x,i(x),e)\wedge(\forall x)P(i(x),x,e)$

Саме твердження може бути представлене наступною формулою ЛП:

B. $(\forall x)P(x,x,e) \rightarrow ((\forall u)(\forall v)(\forall w)(P(u,v,w) \rightarrow P(v,u,w)))$

Тепер наше твердження може бути представлене формулою $F = A_1 \wedge \ldots \wedge A_4 \rightarrow B$. Отже, $\neg F = A_1 \wedge \ldots \wedge A_4 \wedge \neg B$.

Для того, щоб одержати множину диз'юнктів S для ¬F, одержимо множини диз'юнктів S_i для кожної з аксіом A_1-A_4 та

Будемо мати

S_1. $\{P(x,y,f(x,y))\}$;

S_2. $\{\neg P(x,y,u) \vee \neg P(y,z,v) \vee \neg P(u,z,w) \vee P(x,v,w), \neg P(x,y,u) \vee \neg P(y,z,v) \vee \neg P(x,v,w) \vee P(u,z,w)\}$;

S_3. $\{P(x,e,x), P(e,x,x)\}$;

S_4. $\{P(x,i(x),e), P(i(x),x,e)$.

Так як

$\neg B = \neg((\forall x)P(x,x,e) \rightarrow ((\forall u)(\forall v)$
$(\forall w)\ (P(u,v,w) \rightarrow P(v,u,w)))) =$
$\neg(\neg(\forall x)P(x,x,e) \vee ((\forall u)(\forall v)(\forall w)$
$(\neg P(u,v,w) \vee P(v,u,w)))) = (\forall x)P(x,x,e) \wedge$
$\neg((\forall u)(\forall v)(\forall w)\ (\neg P(u,v,w) \vee P(v,u,w)))$
$=$
$(\forall x)P(x,x,e) \wedge (\exists u)(\exists v)(\exists w)(P(u,v,w)$
$\wedge$
$\neg P(v,u,w))$, то множина диз'юнктів для $\neg B$ є наступною:

$T=\{P(x,x,e),\ P(a,b,c),\ \neg P(b,a,c)\}$

Таким чином, множина $S = S_1 \cup \ldots \cup S_4 \cup T$ є множиною з десяти диз'юнктів:

1. $P(x,y,f(x,y))$,
2. $\neg P(x,y,u) \vee \neg P(y,z,v) \vee \neg P(u,z,w) \vee P(x,v,w)$,
3. $\neg P(x,y,u) \vee \neg P(y,z,v) \vee \neg P(x,v,w) \vee P(u,z,w)$,
4. $P(x,e,x)$,
5. $P(e,x,x)$,

6. $P(x,i(x),e)$,
7. $P(i(x),x,e)$,
8. $P(x,x,e)$,
9. $P(a,b,c)$,
10. $\neg P(b,a,c)$.

В цьому прикладі ми показали, як одержати множину диз'юнктів S для формули ¬F. Крім того, формула F тавтологія тоді і тільки тоді, коли S суперечлива.

Ербранівський універсум множини диз'юнктів

За визначенням множина диз'юнктів суперечлива тоді і тільки тоді, коли вона фальшива при всіх інтерпретаціях на всіх областях. Так як неможливо розглянути всі інтерпретації на всіх областях, було б дуже зручно зафіксувати одну область H таку, що S суперечлива тоді і тільки тоді, коли S фальшива при всіх інтерпретаціях на цій області.

На щастя така область існує і називається *ербранівським універсумом* множини S.

Df. Нехай H_0 – множина констант, які зустрічаються в S. Якщо ніяка константа не зустрічається в S, то покладають $H_0 = \{a\}$. Для i=0, 1, 2, … нехай H_{i+1} є об'єднання H_i і множини всіх термів $f^n(t_1, \ldots, t_n)$, що зустрічаються в S, де t_j належать H_i.

Кожне H_i називається *множиною констант* i-го рівня для S, а H_∞ називається *ербранівським універсумом* S.

Приклад. Нехай $S = \{P(a), \neg P(x) \vee P(f(x))\}$.

Тоді

$H_0 = \{a\}$,

$H_1 = \{a, f(a)\}$,

$H_2 = \{a, f(a), f(f(a))\}$,

. . . .

$H_\infty = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots \}$

Приклад. Нехай $S = \{P(f(x), a, g(y), b\}$. Тоді

$H_0 = \{a, b\}$,

$H_1 = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\}$,

$H_2 = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), f(f(a)), f(f(b)), g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b))\}$,

. . . .

$H_\infty = \ldots\ldots\ldots$

Df. Множина атомів виду $P(t_1, \ldots, t_n)$ для всіх предикатів, що зустрічаються в S, називається *ербранівським базисом* S, де t_i – елементи *ербранівського універсума*.

Df. *Основним прикладом* диз’юнкта C множини S є диз’юнкт, одержаний заміною змінних в C на елементи ербранівського універсуму.

Приклад. Якщо $S = \{P(x), Q(f(y)) \vee R(y)\}$, то P(a), P(f(f(a))) основні приклади диз’юнкту C=P(x).

Нехай S – множина диз’юнктів, H – ербранівський універсум S і I – інтерпретація S над H.

Df. Говорять, що I є *H-інтерпретація* множини S, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1. I відображає константи в самих себе.

2. Якщо f – n-місний функціональний символ і $h_1, \ldots, h_n$ – елементи H, то в I через f позначається функція, яка відображає $h_1, \ldots, h_n$ в $f(h_1, \ldots, h_n)$.

При цьому не виникає ніяких обмежень при інтерпретації предикатних символів з S.

Якщо $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ – ербранівський базис множини S, то H-інтерпретацію I зручно подавати у вигляді

$$I = \{m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots\},$$

де m_j є або A_j або $\neg A_j$ для $j=1,2, \ldots$ При цьому, якщо m_j є A_j, то значення атома A_j дорівнює 0, в іншому випадку – 1.

Приклад. Розглянемо множину $S = \{P(x) \vee Q(x), R(f(y))\}$.

Ербранівський універсум H для S є $H = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$.

В S входять три предикатні символи: P, Q, R. Отже, ербранівський базис S є $A = \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \ldots\}$. H-інтерпретаціями множини S можуть бути:

$I_1 = \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \ldots\}$,

$I_2 = \{P(a), Q(a), \neg R(a), P(f(a)), Q(f(a)), \neg R(f(a)), \ldots\}$.

Інтерпретацію множини диз'юнктів S не обов'язково задавати над ербранівським універсумом – інтерпретація може не бути Н-інтерпретацією. Наприклад, якщо $S = \{P(x), Q(y,f(y,a))\}$, то можлива наступна інтерпретація над областю $D=\{1,2\}$: $a=2$, $f(1,1)=1$, $f(1,2)=2$, $f(2,1)=2$, $f(2,2)=1$, $P(1) = 1$, $P(2) = 0$, $Q(1,2)=1$, $Q(2,1)=0$, $Q(2,2)=1$.

Для такої інтерпретації можна визначити Н-інтерпретацію I^*, що відповідає I.

Наприклад, ербранівський базис попередньої множини диз’юнктів S є:

$A=\{P(a), Q(a,a), P(f(a,a)), Q(a,f(a,a)), Q(f(a,a),a), Q(f(a,a),f(a,a)), \dots\}$.

Оцінюємо кожний член A, використовуючи попередню інтерпретацію:

$P(a) = P(2) = 0$, $Q(a,a)=Q(2,2)=1$,

$P(f(a,a))=P(f(2,2))=P(1)=1$,

$Q(a,f(a,a))=Q(2,f(2,2))=Q(2,1)=0$,

$Q(f(a,a),a)=Q(f(2,2),2)=Q(1,2)=1$,

$Q(f(a,a),f(a,a))=Q(f(2,2),f(2,2))=Q(1,1)=0$.

Отже, H-інтерпретація I*, що відповідає I є I*={¬P(a), Q(a,a), P(f(a,a)), ¬Q(a, f(a,a)), Q(f(a,a),a), ¬Q(f(a,a),f(a,a)), …}.

Якщо в S відсутні константи, то елемент a, який використовується для побудови ербранівського універсуму, може бути відображений в довільний елемент області D. В цьому випадку, якщо D більш як одноелементна, то існує більше однієї H-інтерпретації, що відповідає I.

Df. H-інтерпретацією I*, що відповідає I, є інтерпретація, яка задовольняє наступним умовам: нехай $h_1, \ldots, h_n$ – елементи ербранівського універсуму H, які відображаються в елементи d_i з D. Якщо $P(d_1, \ldots, d_n)$ має значення 1(0) в інтерпретації I, то $P(h_1, \ldots, h_n)$ теж має значення 1(0) в I*.

Твердження. Якщо інтерпретація I на області D задовольняє множині диз'юнктів S, то довільна H-інтерпретація I*, що відповідає I,теж задовольняє S.

Теорема. Множина диз'юнктів S суперечлива тоді і тільки тоді, коли S фальшива при всіх H-інтерпретаціях в S.

Доведення. (⇒). Доведення в цю сторону очевидне, так як за визначенням S суперечлива тоді і тільки тоді, коли S фальшива при всіх інтерпретаціях на будь-якій області.

(⇐). Припустимо, що S фальшива при всіх H-інтерпретаціях в S. Якщо S не суперечлива, то існує інтерпретація I на деякій області D така, що S істинна при I.

За попереднім твердженням S істинна при інтерпретації I*, що відповідає I. А це супе-речить тому, що S фальшива при всіх H-інтерпретаціях. Отже, S повинна бути суперечливою.

Таким чином, для перевівки суперечли-вості множини диз’юнктів, необхідно роз-глядати тільки H-інтерпретації.

Далі, говорячи про інтерпретацію, будемо мати на увазі H-інтерпретацію.

Твердження. Множина диз'юнктів супеpечлива тоді і тільки тоді, коли для кожної інтерпретації I існує по крайній мірі один основний приклад C′ деякого диз'юнкта C з S, фальшивий в інтерпретаці I.

Приклад (а). Розглянемо диз'юнкт

$$C = \neg P(x) \vee Q(f(x)).$$

Нехай маємо інтерпретації:

$I_1=\{\neg P(a), \neg Q(a), \neg P(f(a)), \neg Q(f(a)), \neg P(f(f(a))), \neg Q(f(f(a))), \ldots\};$

$I_2=\{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), Q(f(f(a))), \ldots\}$;

$I_3=\{P(a), \neg Q(a), P(f(a)), \neg Q(f(a)), P(f(f(a))), \neg Q(f(f(a))), \ldots\}$;

Диз'юнкт C істинний в інтерпретаціях I_1 та I_2 і фальшивий в інтерпретації I_3.

(b) Нехай $S=\{P(x), \neg P(a)\}$. Існують дві H-інтерпретації :

$$I_1 = \{P(a)\} \text{ і } I_2 = \{\neg P(a)\}.$$

На підставі останнього твердження S – суперечлива.