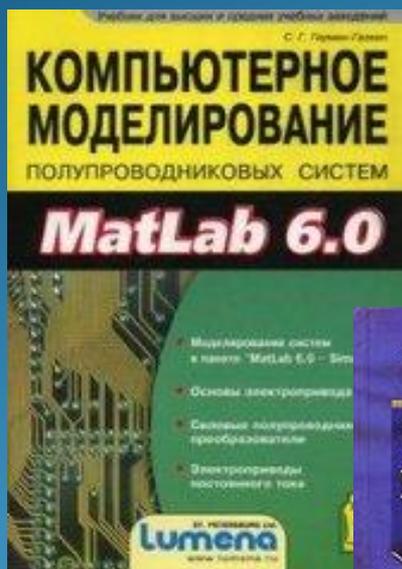




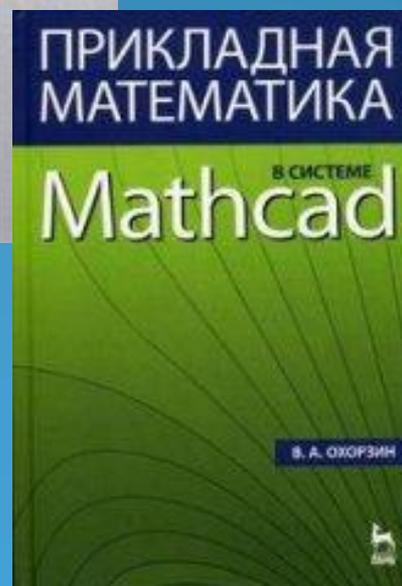
МТИ

МОСКОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Компьютерное моделирование



Бужинский В.А. ктн доцент
bva2516@mail.ru



Москва

2014

Основные понятия КМ

Модель - искусственно созданный объект, который воспроизводит в определенном виде реальный объект - оригинал.

Компьютерная модель - представление информации о моделируемой системе средствами компьютера.

Система - совокупность взаимосвязанных элементов, обладающих свойствами, отличными от свойств отдельных элементов.

Элемент - это объект, обладающий свойствами, важными для целей моделирования.

В компьютерной модели свойства элемента представляются величинами - характеристиками элемента.

Связь между элементами описывается с помощью величин и алгоритмов, в частности вычислительных формул.

Пример 2

Построить алгоритм процесса бросания тела под углом к горизонту

```
S = Int(S * 10) / 10
```

```
h = v0 ^ 2 * (Sin(A)) ^ 2 / (2 * 9.81)
```

```
h = Int(h * 10) / 10
```

```
t0 = S / (v0 * Cos(A))
```

```
List3.AddItem S
```

```
List4.AddItem h
```

Установить в графическом окне масштаб и нарисовать линию го

```
P1.Scale (0, 100)-(170, 0)
```

```
P1.Line (0, 10)-(170, 10)
```

В цикле нарисовать траектории движений

```
For t = 0 To t0 Step 0.001
```

```
x = 10 + v0 * Cos(A) * t
```

```
y = 10 + v0 * Sin(A) * t - 9.81 * t ^ 2 / 2
```

```
P1.PSet (x, y), vbRed
```

```
Next
```

Отметить траектории движений

```
P1.PSet (85, 10 + h)
```

```
P1.Print i
```

```
Next
```

```
End Sub
```

Траектории параболы

Движение тела, брошенного под углом к горизонту Законы движения

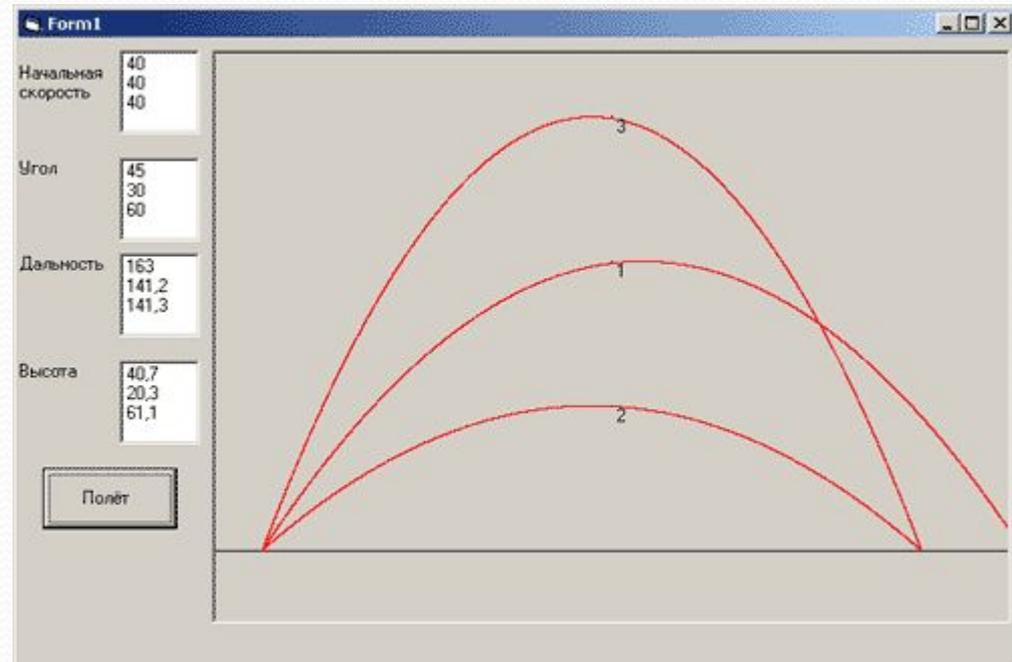
$$v_x = v_0 \cdot \cos(A) = \text{const}$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin(A) - g \cdot t$$

$$x = v_0 \cdot \cos(A) \cdot t$$

$$y = v_0 \cdot \sin(A) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \quad \text{Дальность полёта } s = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot A)}{g}$$

$$\text{Наибольшая высота } h = \frac{(v_0 \cdot \sin(A))^2}{2 \cdot g}$$



(?)

С помощью формальных языков строятся **формальные информационные модели**. Математика является наиболее широко используемым формальным языком. С использованием математических понятий и формул строятся математические модели.

В естественных науках (физике, химии и др.) строятся формальные модели явлений и процессов.

Часто для этого применяется универсальный математический язык алгебраических формул

Тема № 1. Основные понятия компьютерного моделирования.

Тема № 2. Построение моделирующих алгоритмов: формализация и алгоритмизация процессов.

Тема № 3. Универсальность математических моделей.

Тема № 4. Математические модели сложных систем.

Тема № 5. Непрерывно-детерминированные, дискретно-детерминированные, дискретно-вероятностные и непрерывно-вероятностные модели.

Универсальность математических моделей

1. Основные понятия математического моделирования
2. Системы компьютерной математики

Математическая модель — это математическое — это математическое представление — это математическое представление реальности — это математическое представление реальности. Является частным случаем понятия модели — это математическое представление реальности. Является частным случаем понятия модели, как системы, исследование которой позволяет получать информацию о некоторой другой системе.

Процесс построения и изучения математических моделей называется *математическим моделированием*.

Все <u>естественные</u>	Все естественные и
общественные науки, использующие математический аппарат, по сути занимаются математическим моделированием: заменяют <u>объект</u>	
Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути занимаются математическим моделированием: заменяют объект его математической <u>моделью</u>	Все естественные и
общественные науки, использующие математический аппарат, по сути занимаются математическим моделированием: заменяют объект его математической моделью и затем изучают последнюю. Связь математической модели с <u>реальностью</u>	Все естественные и
общественные науки, использующие математический аппарат, по сути занимаются математическим моделированием: заменяют объект его	

Математическая модель — это «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы

Математическая модель — это «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т.д.» Существует в триадах «модель-алгоритм

Математическая модель — это «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т.д.» Существует в триадах «модель-алгоритм-программа».

«Создав триаду „модель-алгоритм-программа“, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент

«Создав триаду „модель-алгоритм-программа“, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в пробных вычислительных экспериментах

«Создав триаду „модель-алгоритм-программа“, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в пробных вычислительных экспериментах. После

Традиционно выделяют два основных класса задач, связанных с математическими моделями: прямые и обратные.

Прямая задача: структура модели и все её параметры считаются известными, главная задача — провести исследование модели для извлечения полезного знания об объекте. Какую статическую нагрузку выдержит мост? Как он будет реагировать на динамическую нагрузку (например, на марш роты солдат, или на прохождение поезда на различной скорости), как самолёт преодолеет звуковой барьер, не развалится ли он от флаттера, — вот типичные примеры прямой задачи. Постановка правильной прямой задачи (задание правильного вопроса) требует специального мастерства. Если не заданы правильные вопросы, то мост может обрушиться, даже если была построена хорошая модель для его поведения.

В простейшем случае (одно уравнение осциллятора, например) прямая задача очень проста и сводится к явному решению этого уравнения.

Обратная задача: известно множество возможных моделей, надо выбрать конкретную модель на основании дополнительных данных об объекте. Чаще всего структура модели известна, и необходимо определить некоторые неизвестные параметры. Дополнительная информация может состоять в дополнительных эмпирических данных, или в требованиях к объекту (*задача проектирования*). Дополнительные данные могут поступать независимо от процесса решения обратной задачи (*пассивное наблюдение*) или быть результатом специально планируемого в ходе решения эксперимента (*активное наблюдение*). Одним из первых примеров виртуозного решения обратной задачи с максимально полным использованием доступных данных был построенный И. Ньютоном метод восстановления сил трения по наблюдаемым затухающим колебаниям.

В качестве другого примера можно привести **математическую статистику**. Задача этой науки — разработка методов регистрации, описания и анализа данных наблюдений и экспериментов с целью построения вероятностных моделей массовых случайных явлений. Т.е. множество возможных моделей ограничено вероятностными моделями.

Формальная классификация моделей

Формальная классификация моделей основывается на классификации используемых математических средств. Часто строится в форме дихотомий:

Линейные Линейные или нелинейные модели;

Сосредоточенные Сосредоточенные или распределённые системы;

Детерминированные Детерминированные или стохастические;

Статические Статические или динамические;

Дискретные Дискретные или непрерывные.

Классификация по способу представления объекта

Наряду с формальной классификацией, модели различаются по способу представления объекта:

Структурные Структурные или функциональные модели

Структурные модели представляют объект как систему со своим устройством и механизмом функционирования.

Функциональные модели не используют таких представлений и отражают только внешне воспринимаемое поведение (функционирование) объекта. В их предельном выражении они называются также моделями «чёрного ящика».

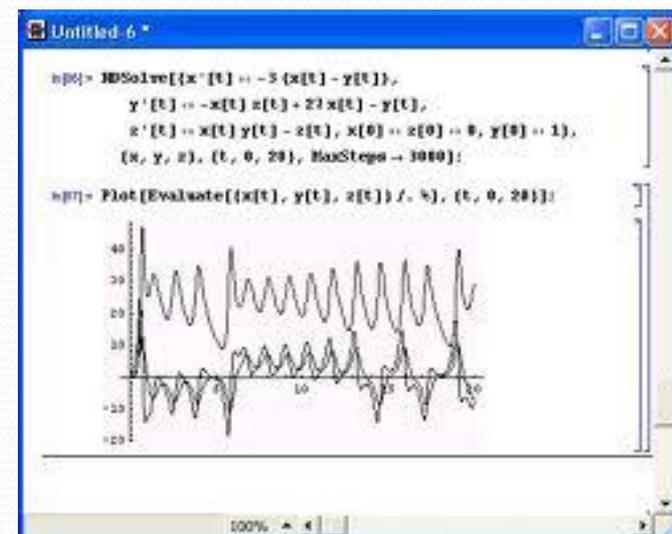
Возможны также комбинированные типы моделей, которые иногда называют моделями «серого ящика».

Содержательные и формальные модели

Практически все авторы, описывающие процесс математического моделирования, указывают, что сначала строится особая идеальная конструкция, *содержательная модель*. Устоявшейся терминологии здесь нет, и другие авторы называют этот идеальный объект *концептуальная модель*, *умозрительная модель* или *предмодель*. При этом финальная математическая конструкция называется *формальной моделью* или просто математической моделью, полученной в результате формализации данной содержательной модели (предмодели). Построение содержательной модели может производиться с помощью набора готовых идеализаций, как в механике, где идеальные пружины, твёрдые тела, идеальные маятники, упругие среды и т.п. дают готовые структурные элементы для содержательного моделирования.

Создание содержательных моделей резко усложняется.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) &\Rightarrow y_2(x) = F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right), \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(f_1(x, y_1, y_2)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f_1(x, y_1, y_2)) + \frac{\partial}{\partial y_1}(f_1(x, y_1, y_2)) \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial}{\partial y_2}(f_1(x, y_1, y_2)) \frac{dy_2}{dx} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_1\left(x, y_1, F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(f_1\left(x, y_1, F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)\right)\right) f_1(x, y_1, y_2) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y_2}\left(f_2\left(x, y_1, F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)\right)\right) f_2\left(x, y_1, F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)\right). \end{aligned}$$



Компьютерные системы моделирования

Для поддержки математического моделирования разработаны системы компьютерной математики, например, [Maple](#) Для поддержки математического моделирования разработаны системы компьютерной математики, например, Maple, [Mathematica](#) Для поддержки математического моделирования разработаны системы компьютерной математики, например, Maple, Mathematica, [Mathcad](#) Для поддержки математического моделирования разработаны системы компьютерной математики, например, Maple, Mathematica, Mathcad, [MATLAB](#) Для поддержки математического моделирования разработаны системы компьютерной математики, например, Maple, Mathematica, Mathcad, MATLAB, [VisSim](#) и др.

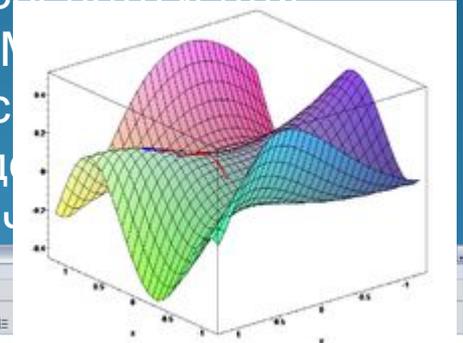
Они позволяют создавать формальные и блочные модели как простых, так и сложных процессов и устройств и легко менять параметры моделей в ходе моделирования. *Блочные модели* представлены блоками (чаще всего графическими), набор и соединение которых задаются диаграммой модели.

Maple — программный пакет, система компьютерной алгебры —

программный пакет, система компьютерной алгебры. Является продуктом компании Waterloo Maple Inc. — программный пакет, система компьютерной алгебры. Является продуктом компании Waterloo Maple Inc. , которая с 1984 года выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование.

Система Maple предназначена для символьных вычислений Система Maple предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений Система Maple

предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений Система Maple



Следующий код вычисляет решение линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3y(x) = x$$

с начальными условиями:

$$y(0) = 0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 2$$

```
dsolve({diff(y(x), x, x) - 3*y(x) = x, y(0)=0, D(y)(0)=2})
```

графическими средствами. И имеет удобный интерфейс, напоминающий Паскаль.

Math Dictionary

- $\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy$
- $\prod_{i=1}^n \frac{d}{dx} f \frac{d}{dx} f$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$
- $a \cdot b$
- $\frac{a}{b}$
- a^b
- a_n
- a
- \sqrt{a}
- $a!$
- $|a|$
- e^a
- $\ln(a)$
- $\log_{10}(a)$
- $\log(a)$
- $\sin(a)$
- $\cos(a)$
- $\tan(a)$
- $\left(\frac{a}{b}\right)$
- $f(a)$
- $f(a,b)$
- $f^m \rightarrow y$
- $f \rightarrow (a,b) \rightarrow z$
- $f(x)$
- $x < a$
- $x \geq a$

и нахождения СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

3D Plot Annotations in Maple 13

Estimation of the Model Parameters
Consider the difference equation $M y''(t) + b y'(t) + k y(t) = u(t)$.

Mass Spring Damper System Response

The transfer function (in the s domain) is converted to Fourier transform representation:

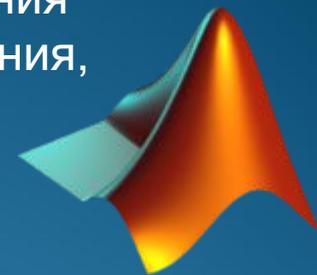
$$\frac{1}{-4M\pi^2\omega^2 + 21b\pi\omega + k} \quad (1)$$

The estimated parameter set is given as:

$$\begin{bmatrix} k = 2.9820 & \Delta k = -0.1800 \\ M = 4.9209 & \Delta M = 0.0791 \\ b = 1.9037 & \Delta b = 0.0963 \end{bmatrix} \quad (2)$$

The Phase and Magnitude plot for this system is:

MATLAB (сокращение от англ. «*Matrix Laboratory*», в русском языке произносится как **Матлаб**) — пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноимённый язык программирования, используемый в этом пакете.



Графики

Программа MATLAB может создавать трехмерную графику с помощью функций `surf`, `plot3` или `mesh`.

```
[X,Y] = meshgrid(-8:.5:8);  
R = sqrt(X.^2 + Y.^2);  
Z = sin(R)./R;  
Z(R==0) = 1;  
mesh(X, Y, Z);
```

Этот код создаст каркасный 3D график

sinc-функции $\frac{\sin R}{R}$.

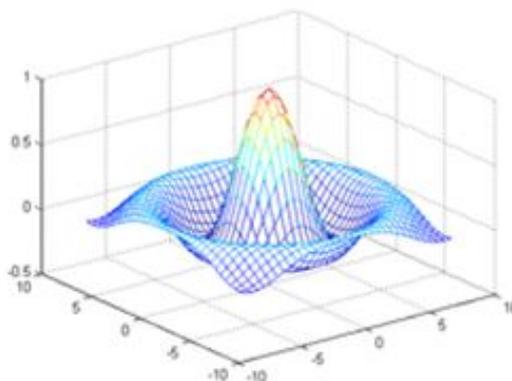


График sinc-функции, нарисованный с помощью MATLAB

Mathcad — система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением, отличается легкостью использования и применения для коллективной работы.

Mathcad - [primer.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Constants Times New Roman 10 B I U

My Site

$$\left(\prod_{n=1}^5 \frac{1}{x+n} \right) \cdot x^4 \text{ factor} \rightarrow \frac{x^4}{(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+4) \cdot (x+5)}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(z \cdot \text{atan}(z)) \rightarrow \frac{2}{1+z^2} - 2 \cdot \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$$

Given

$$x + 2\pi y = a$$

$$4x + y = b$$

$$\text{Find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot \pi \cdot b - a}{(-1) + 8 \cdot \pi} \\ \frac{-[(-4) \cdot a + b]}{(-1) + 8 \cdot \pi} \end{bmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{3 \cdot x + 6} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Symbolic

→	↔	Modifiers
float	complex	assume
solve	simplify	substitute
factor	expand	coeffs
collect	series	parfrac
fourier	laplace	ztrans
invfourier	invlaplace	invztrans
n ⁺ →	n ⁻ →	n →
explicit		

Calculus

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

Mathcad - [primer3.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

My Site

$$X_{m,n} := (R + r \cdot \cos(\theta_n)) \cdot \cos(\phi_m) \quad Z_{m,n} := r \cdot \sin(\theta_n) \quad f(x, y) :=$$

$$Y_{m,n} := (R + r \cdot \cos(\theta_n)) \cdot \sin(\phi_m) \quad M_{i,j} := f(x_i,$$

AUTO NUM Page 1

Пример

Рассмотрим механическую систему, состоящую из пружины, закрепленной с одного конца, и груза массой m , прикрепленного к свободному концу пружины. Будем считать, что груз может двигаться только в направлении оси пружины (например, движение происходит вдоль стержня). Построим математическую модель этой системы.

Будем описывать состояние системы расстоянием x от центра груза до его положения равновесия. Опишем взаимодействие пружины и груза с помощью закона Гука ($F = -kx$), после чего воспользуемся вторым законом Ньютона, чтобы выразить его в форме дифференциального уравнения:

$$m\ddot{x} = -kx,$$

где \ddot{x} означает вторую производную от x по времени:

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Полученное уравнение описывает математическую модель рассмотренной физической системы. Эта модель называется **«гармоническим осциллятором»**.

По формальной классификации эта модель линейная, детерминистская, динамическая, сосредоточенная, непрерывная. В процессе её построения мы сделали множество допущений (об отсутствии внешних сил, отсутствии трения, малости отклонений и т.д.), которые в реальности могут не выполняться.

По отношению к реальности это, чаще всего, модель типа упрощение (*жесткая модель*).

```

for v8.easysimlectronics.ru

$$\delta := \frac{\pi}{128}$$


$$k := 2 \cdot \cos(\delta)$$

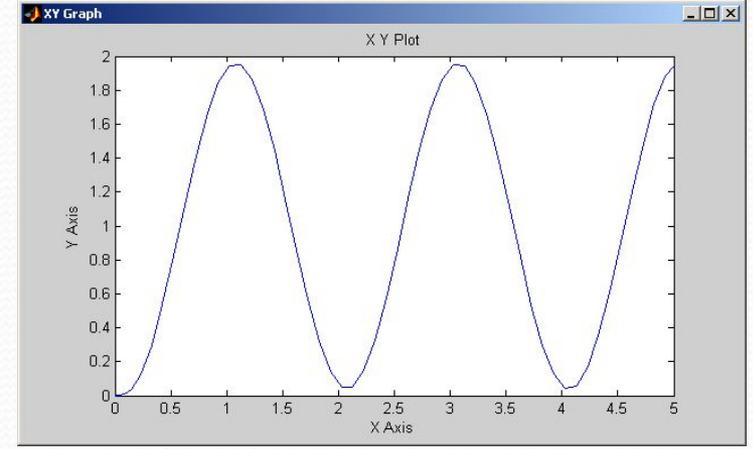
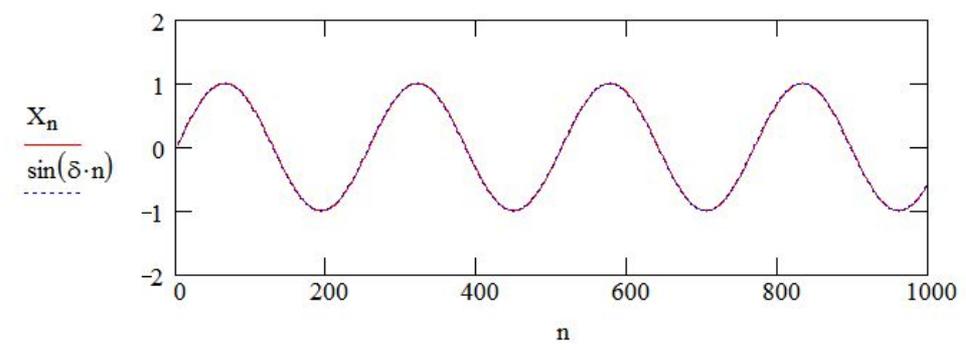

$$n := 2..1000$$


$$X_0 := -\sin(\delta)$$

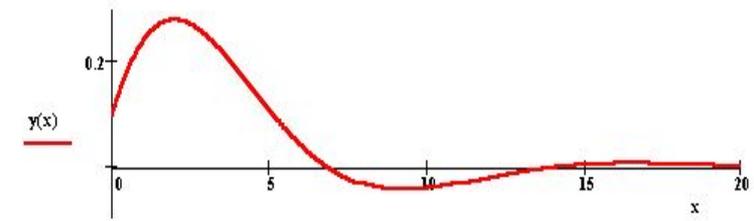

$$X_1 := 0$$


$$X_n := k \cdot X_{n-1} - X_{n-2}$$


```



(?)



Универсальность моделей

Важнейшие математические модели обычно обладают важным свойством *универсальности*: принципиально разные реальные явления могут описываться одной и той же математической моделью. Скажем, гармонический осциллятор описывает не только поведение груза на пружине, но и другие колебательные процессы, зачастую имеющие совершенно иную природу: малые колебания маятника, колебания уровня жидкости в U-образном сосуде или изменение силы тока в колебательном контуре. Таким образом, изучая одну математическую модель, мы изучаем сразу целый класс описываемых ею явлений.

Изоморфизм законов, выражаемых математическими моделями в различных сегментах научного знания

Людвиг фон Берталанфи Людвиг фон Берталанфи «Общая теория систем»

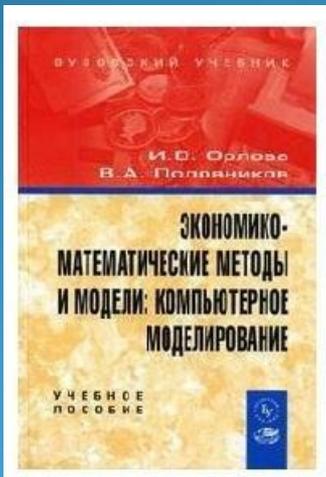
«Создав триаду „модель-алгоритм-программа“, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент «Создав триаду „модель-алгоритм-программа“, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в пробных вычислительных экспериментах «Создав триаду „модель-алгоритм-программа“, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в пробных вычислительных экспериментах. После того, как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту установлена, с моделью проводятся разнообразные и подробные „Примеры“ дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта».

Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2001.

В.В. Васильев, Л.А. Симак, А.М. Рыбникова. Математическое и компьютерное моделирование процессов и систем в среде MATLAB/SIMULINK. Учебное пособие для студентов и аспирантов. 2008 год. 91 стр.



Компьютерное моделирование физических задач в Microsoft Visual Basic. Учебник Author: Алексеев Д.В. СОЛОН-ПРЕСС, 2009 г



Автор: Орлова И.В., Половников В.А.
Издательство: Вузовский учебник
Год: 2008

Анфилатов, В. С. Системный анализ в управлении [Текст]: учеб. пособие / В. С. Анфилатов, А. А. Емельянов, А. А. Кукушкин; под ред. А. А. Емельянова. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.

Веников, В.А.. Теория подобия и моделирования [Текст] / В. А. Веников, Г. В. Веников.- М.: Высш.шк., 1984. – 439 с.

Евсюков, В. Н. Анализ автоматических систем [Текст]: учебно-методическое пособие для выполнения практических заданий / В. Н. Евсюков, А. М. Черноусова. – 2-е изд., исп. – Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2007. - 179 с.

Зарубин, В. С. Математическое моделирование в технике [Текст]: учеб. для вузов / Под ред. В. С.Зарубина, А. П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2001. – 496 с.

Колесов, Ю. Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы [Текст]: уч. пособие / Ю.Б. Колесов, Ю.Б. Сениченков. - СПб. : БХВ-Петербург, 2006. - 224 с.

Колесов, Ю.Б. Моделирование систем. Объектно-ориентированный подход [Текст] : Уч. пособие / Ю.Б. Колесов, Ю.Б. Сениченков. - СПб. : БХВ-Петербург, 2006. - 192 с.

Норенков, И. П. Основы автоматизированного проектирования [Текст]: учеб.для вузов / И. П. Норенков. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 360 с.

Скурихин, В.И. Математическое моделирование [Текст] / В. И. Скурихин, В. В. Шифрин, В. В. Дубровский. - К.: Техника, 1983. – 270 с.

Черноусова, А. М. Программное обеспечение автоматизированных систем проектирования и управления: учебное пособие [Текст] / А. М. Черноусова, В. Н. Шерстобитова. - Оренбург: ОГУ, 2006. - 301 с.