ТЕМА 1.
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

1. Випадкові події
2. Випадкові величини
3. Основні числові характеристики випадкових величин та їх властивості

Подія– будь-який факт, явище, або процес, що розглядаються лише з точки зору – відбулись вони, чи не відбулись у результаті певного дослідження.

За своєю природою події поділяють на:

 неможливі,

достовірні,

випадкові.

Випадкові події можуть бути:

- рівноможливі;
- несумісні, сумісні;
- події, які утворюють повну групу;
- незалежні, залежні.

Сумою двох подій ***А*** і ***В*** називається подія ***С***, яка полягає ***або*** в появі події ***А***, ***або*** події ***В, або*** і події ***А***, і події ***В:***

$$C = A + B = A \cup B = (\, A \; або \; B \,)$$

Ймовірність суми двох ***несумісних*** подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P\,(A+B) = P(A) + P(B).$$

Сума ймовірностей двох протилежних подій ***А*** і дорівнює 1.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \text{ тоді}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Добутком двох випадкових подій **А** і **В** є подія **С**, що полягає в тому,що відбувається, як подія **А** так і подія **В:**

С=А*В

Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірностей, якщо ці події незалежні (реалізація однієї не впливає на реалізацію іншої):

P(A*B)=P(A)*P(B)

Нехай ***A*** і ***B*** – деякі події, ***P(A)*** та ***P(B)*** – ймовірності відповідно подій ***A*** та ***B***, при чому ***P(B)>0***.

Умовною ймовірністю події ***A*** при умові ***B*** (позначається ***P(B/A)***) називається ймовірність події ***A***, знайдена при умові, що подія ***B*** відбулася. Ця ймовірність знаходиться за формулою:

$$P(B/A) = P_A(B)$$

Події H_1, H_2,…, H_n назвемо *гіпотезами*. Щодо гіпотез відомі апріорні ймовірності $P(H_1)>0$, $P(H_2)>0$,…, $P(H_n)>0$. Припустимо, що подія A може відбутися лише з однією із подій H_1, H_2,…, H_n і нам відомі умовні ймовірності $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$,…, $P(A|H_n)$. Тоді безумовна ймовірність $P(A)$ обчислюється за *формулою повної ймовірності*:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$$

Якщо в результаті події відбулася подія $\boldsymbol{A}$, то попередні, апріорні ймовірності гіпотез $\boldsymbol{P(H_1)}$, $\boldsymbol{P(H_2)}$,…, $\boldsymbol{P(H_n)}$ повинні бути замінені новими, апостеріорними ймовірностями $\boldsymbol{P(H_1|A)}$, $\boldsymbol{P(H_2|A)}$,…, $\boldsymbol{P(H_n|A)}$, які обчислюють за *формулою Байєса*:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$$

2. Випадкові величини.

Випадкова величина – змінна, яка в результаті кожного випробування набуває одне наперед невідоме значення, що залежить від випадкових причин.

Випадкові величини бувають дискретними, неперервними та мішаними.

Дискретна випадкова величина – випадкова величина, множина значень якої скінченна або зліченна.

Прикладом дискретної випадкової величини може бути число викликів, що надходять на телефонну станцію протягом певного проміжку часу, кількість покупців, що прийшли у супермаркет на певний момент часу та ін.

Неперервна випадкова величина – випадкова величина, значення якої цілком заповнюють деякий скінченний або нескінченний проміжок числової осі.

Прикладом неперервної випадкової величини може бути температура повітря, час безвідмовної роботи обладнання, відсоткова ставка доходу та ін..

Мішана випадкова величина – випадкова величина, множина значень якої є об'єднанням двох множин, які не перетинаються, одна з яких є дискретною, а інша – неперервною.

Прикладом мішаної випадкової величини може бути величина виплат страхової фірми, яка набуває значень залежно від суми збитків: якщо величина збитків менша певної наперед визначеної в договорі страхування суми, то величина виплат дорівнюватиме збиткам (неперервна випадкова величина); якщо величина збитків більша страхової суми, то величина виплат дорівнюватиме страховій сумі (дискретна випадкова величина).

Основні числові характеристики випадкових величин та їх властивості

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини ***X*** називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень ***X*** на відповідні їм ймовірності.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини ***X*** характеризує середнє значення випадкової величини ***X*** з урахуванням ймовірностей його можливих значень. У практичній діяльності під математичним сподіванням розуміють центр розподілу випадкової величини.

а) у випадку, коли всі можливі наслідки події описуються дискретною величиною $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

а розподіл ймовірностей їх настання $p = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$

причому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$,

де *n* – число можливих наслідків, то математичне сподівання обчислюється:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

де x_i – значення випадкової величини при *i*-му можливому наслідку,

p_i – ймовірність настання *i*-го можливого наслідку.

б) якщо випадкова величина *x* є неперервною, то формула для математичного сподівання буде такою:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

де *f(x)* – щільність розподілу ймовірностей випадкової величини *x*.

або

$$M(x) = \int_{a}^{b} xf(x)dx$$

- якщо випадкова величина *x* визначена на інтервалі [*a;b*].

Приклад 1: Надаючи банківський кредит комерційній фірмі, здійснюють прогноз можливих значень збитків та відповідних значень ймовірності. Числові дані згруповано у таблиці:

Оцінка можливого результату	***Прогнозовані збитки, тис. грн.***	***Значення ймовірності***
Песимістична	*30*	*0,2*
Стримана	*6*	*0,5*
Оптимістична	*-40*	*0,3*

Визначити сподівану величину ризику, тобто величину збитків.

Дисперсією випадкової величини ***X*** називається математичне сподівання квадрата відхилення значень випадкової величини ***X*** від її математичного сподівання. Отже, для дискретної випадкової величини дисперсія:

$$\sigma^2(x) = M(x - M(x))^2$$

$$\sigma^2(x) = M(x^2) - (M(x))^2$$

Дисперсія характеризує міру розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

а) у випадку, коли *x* – дискретна випадкова величина:

$$\sigma^2(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-M(x))^2$$

б) у випадку, коли *x* – неперервна випадкова величина:

$$\sigma^2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(x))^2\cdot f(x)dx$$

або

$$\sigma^2(x)=\int_{a}^{b}(x-M(x))^2\cdot f(x)dx$$

Дисперсія характеризує міру розсіювання (відхилення) випадкової величини *x* навколо (від) математичного сподівання *M(x)*.

Величина дисперсії вимірюється в квадратних одиницях вимірювання випадкової величини.

Для зручності доцільно використовувати показник середньоквадратичного відхилення випадкової величини – це корінь квадратний із дисперсії випадкової величини:

$$R = \sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$$

Середньоквадратичне відхилення вимірюється в одиницях вимірювання випадкової величини.

<u>Приклад 2:</u> Підприємство, розробляючи інвестиційний портфель, вирішує питання про купівлю акцій однієї з двох компаній. Існує експертна оцінка очікуваного річного прибутку від придбання цих акцій:

		Рівень очікуваного прибутку	***Ймовірність одержання очікуваного прибутку***
Акції компаній	1	500	0,3
		900	0,5
		1000	0,2
	2	600	0,6
		1100	0,4

Необхідно обрати акції з меншою величиною середньоквадратичного відхилення