



Министерство общего и профессионального образования Свердловской области
Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Свердловской области
«Уральский колледж технологий и предпринимательства»

Асимптоты графика функции Построение эскизов графиков

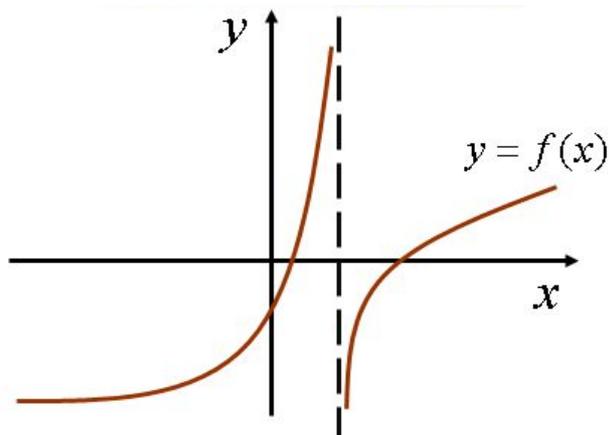
План

1. **Определение асимптоты**
2. **Вертикальная асимптота**
3. **Горизонтальная асимптота**
4. **Наклонная асимптота**
5. **Общая схема определения асимптот графика функции**

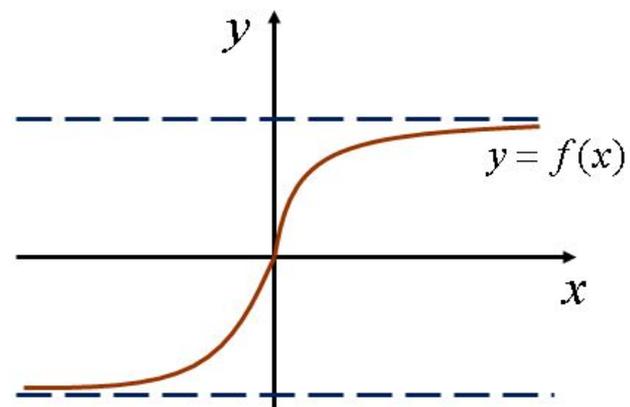
Определение:

Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, такая что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точек графика от начала координат.

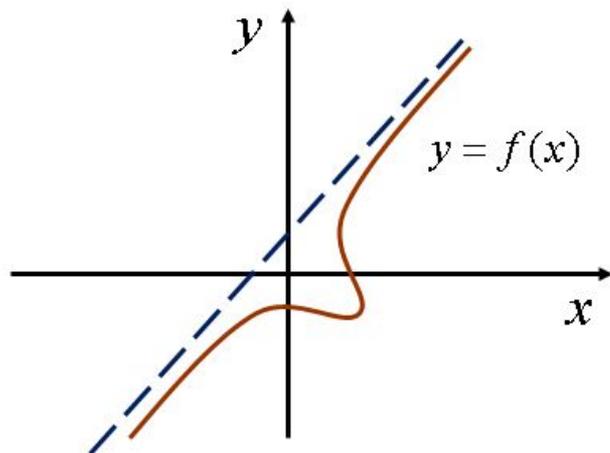
Вертикальная асимптота



Горизонтальная асимптота



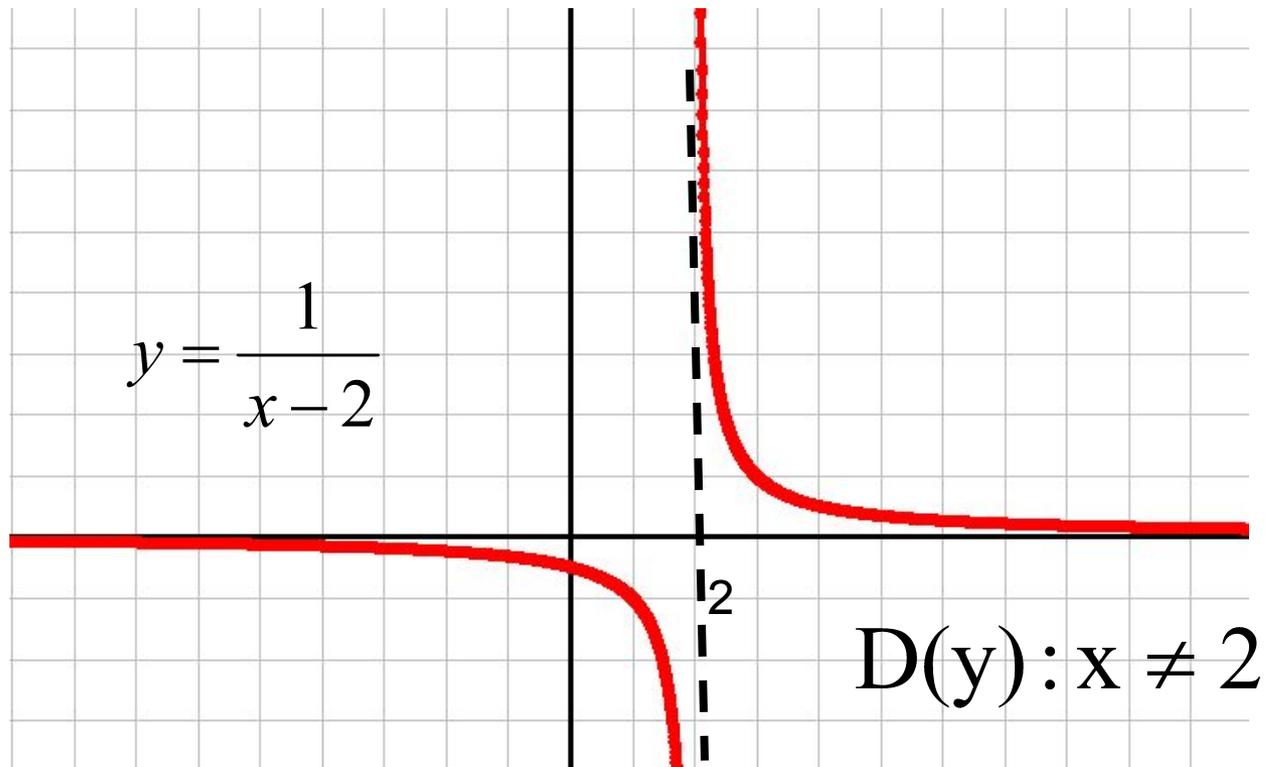
Наклонная асимптота



Определение:

прямая вида $x=a$ называется **вертикальной асимптотой** для $y=f(x)$, если

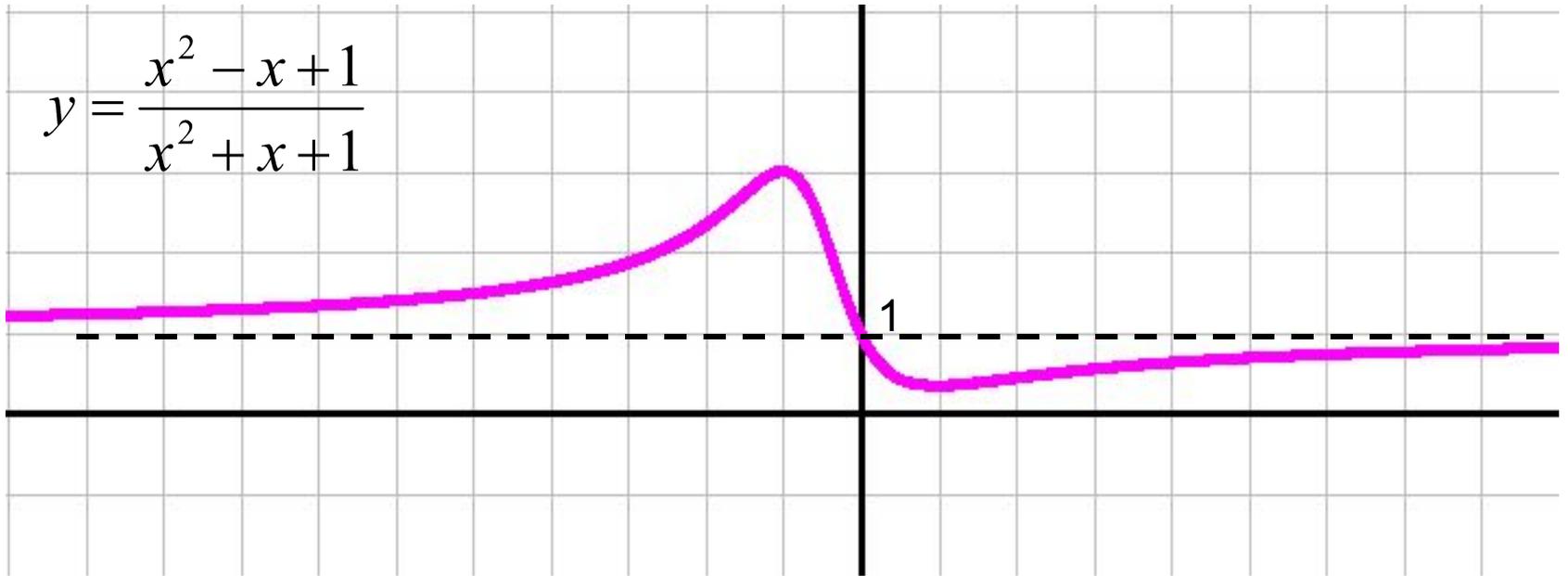
$$\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm \infty$$



Определение:

прямая вида $y=b$ называется *горизонтальной асимптотой*, если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$



Определение:

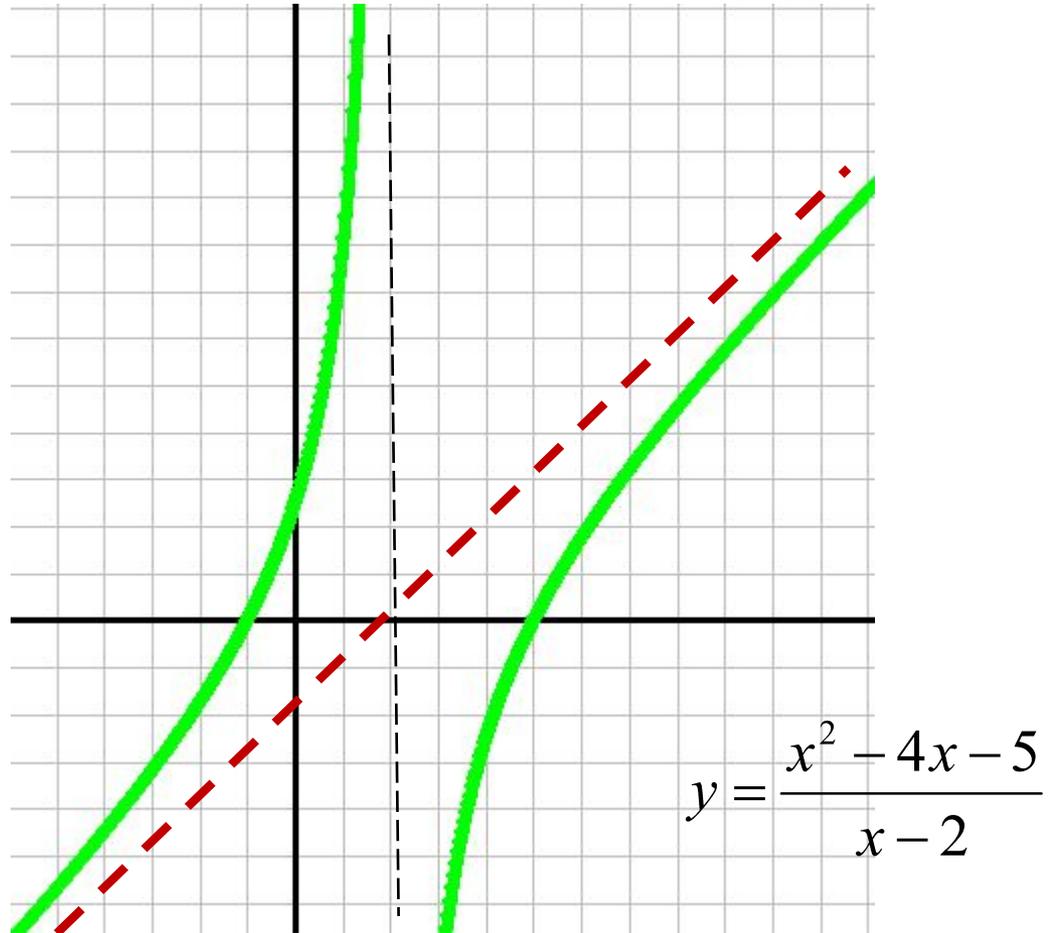
прямая вида $y=kx+b$ называется **наклонной асимптотой**,
если для $y=f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k \cdot x)$$



Примечания

1. Вертикальные асимптоты существуют в точках разрыва функции.

2. У дробно-рациональной функции горизонтальные асимптоты существуют, если степень числителя меньше или равна степени знаменателя.

3. У дробно-рациональной функции наклонная асимптота существует, если степень числителя больше, чем степень знаменателя.

4. Для более точного построения эскиза нужно найти:

- промежутки знакопостоянства функции;
- нули функции;
- точки пересечения графика с осями (по возможности) и с асимптотами.

Пример

Задание: Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Решение:

1. Функция не имеет точек разрыва, следовательно *вертикальных асимптот у нее нет.*
2. Найдем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \infty$$

Предел равен бесконечности, следовательно *горизонтальных асимптот нет.*

Найдем наклонные асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} : x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

Следовательно прямая $y = x$ является наклонной асимптотой.

Общая схема определения асимптот графика функции

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Если есть точки разрыва, то существуют **вертикальные асимптоты** в этих точках $x = a$.
3. Найти предел функции при $x \rightarrow \infty$.
4. Если предел равен конечной величине b , то существует **горизонтальная асимптота** $y = b$.
5. Найти пределы для определения коэффициентов уравнения наклонной асимптоты.
6. Если пределы равны конечным величинам k , b , то существует **наклонная асимптота** $y = kx + b$.

Общая схема исследования функции и построение ее графика

При исследовании функции и изучении ее свойств с целью построения графика в следующей последовательности находят:

1. область определения функции $D(f)$ и, если возможно, область изменения $E(f)$;
2. точки разрыва функции и промежутки непрерывности;
3. промежутки знакопостоянства функции;
4. четность, нечетность, периодичность;
5. точки пересечения графика с осями координат;
6. критические точки функции, точки экстремума, промежутки монотонности;
7. промежутки выпуклости, вогнутости графика функции, точки перегиба;
8. ***асимптоты графика функции;***
9. дополнительные точки (если это необходимо).

Построение графика функции.

Нахождение асимптот и построение эскизов графиков

$$y = \frac{x^3 + x}{x^2 - 2x + 2}$$

$$D(f) : x \in \mathbb{R}$$

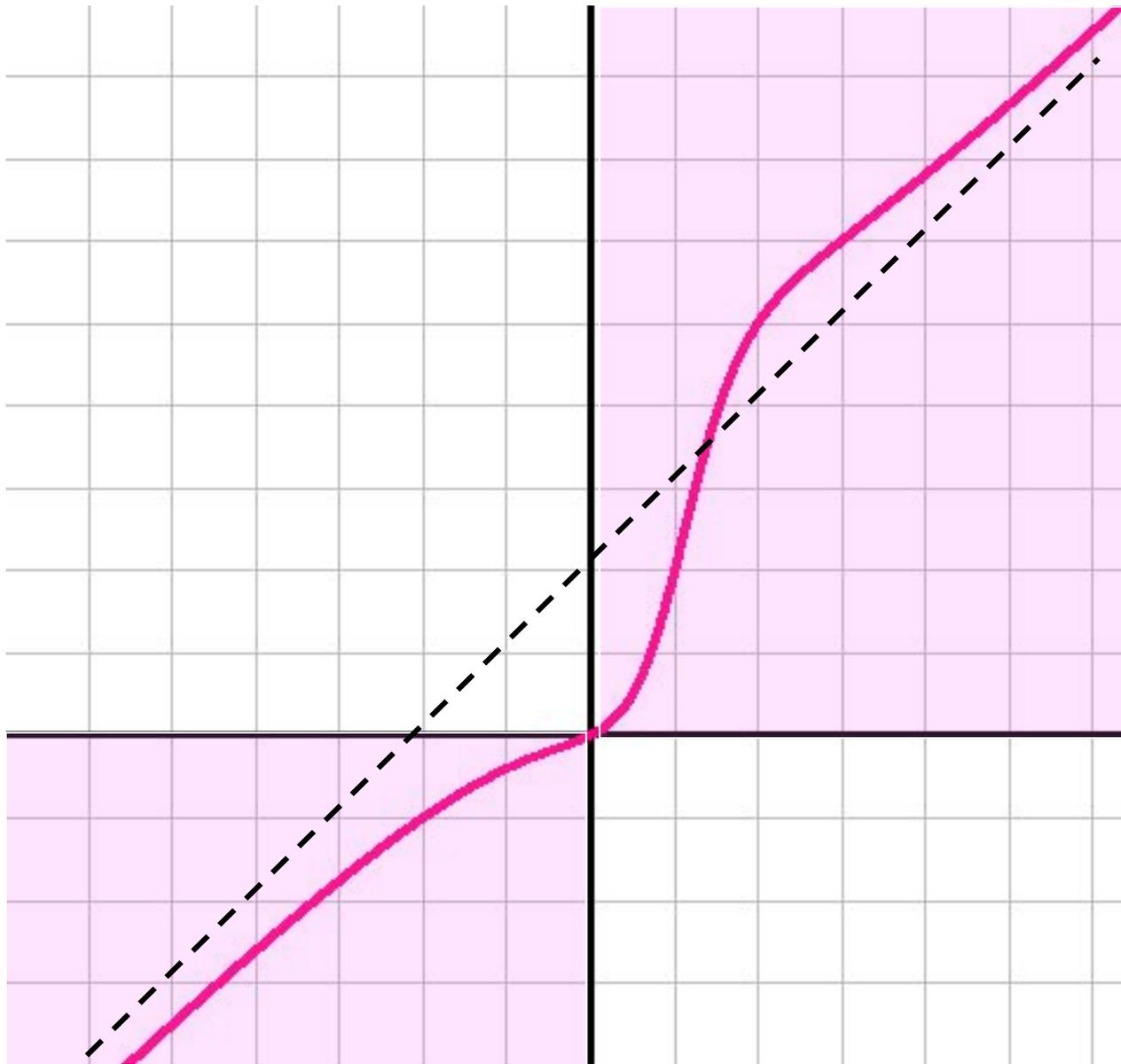
Вертикальных асимптот нет.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 - 2x + 3} = \infty$$

Горизонтальных асимптот нет.

Наклонная асимптота $y = x + 2$

При $x = 4/3$ график $y = f(x)$ пересекает $y = x + 2$ в точке $y = 3 \frac{1}{3}$



Нахождение асимптот и построение эскизов графиков

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x - 2}$$

Вертик. асимптота $x=2$

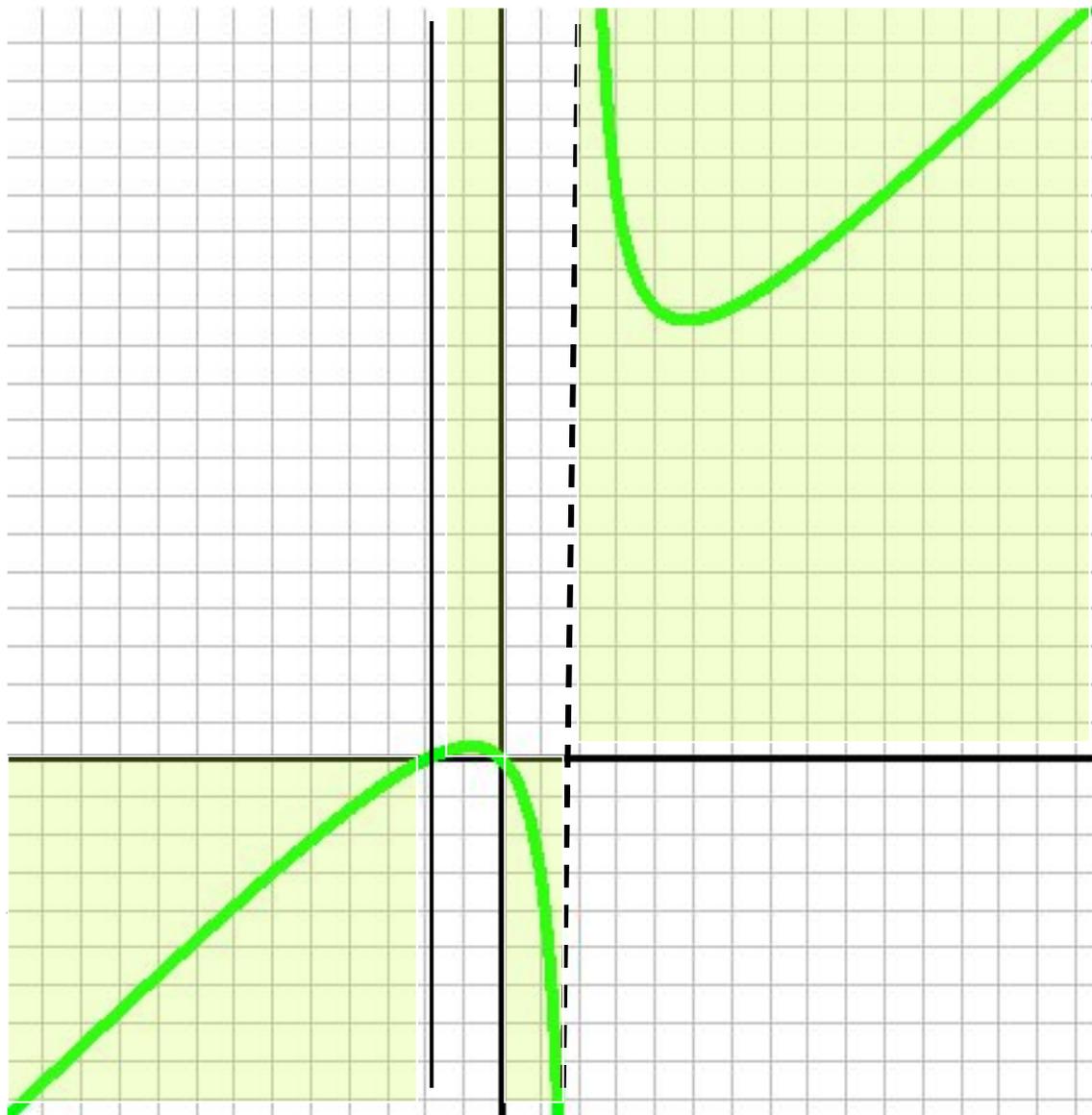
Ноль функции $x=-2$

Горизонт. асимптот нет

**Наклонная асимптота
 $y=x+4$**

Найдем $E(y)$:

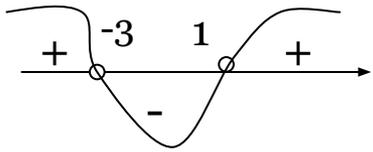
$$y \in (-\infty; 6 - 4\sqrt{2}] \cup [6 + 4\sqrt{2}; +\infty)$$



Нахождение асимптот и построение эскизов графиков

$$y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$D(y): \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = 0$$

$y=0$ - горизонтальная асимптота

**$x=-3$ и $x=1$ -
вертикальные
асимптоты**

Для более точного построения возьмем контрольные

точки:

$$x=2$$

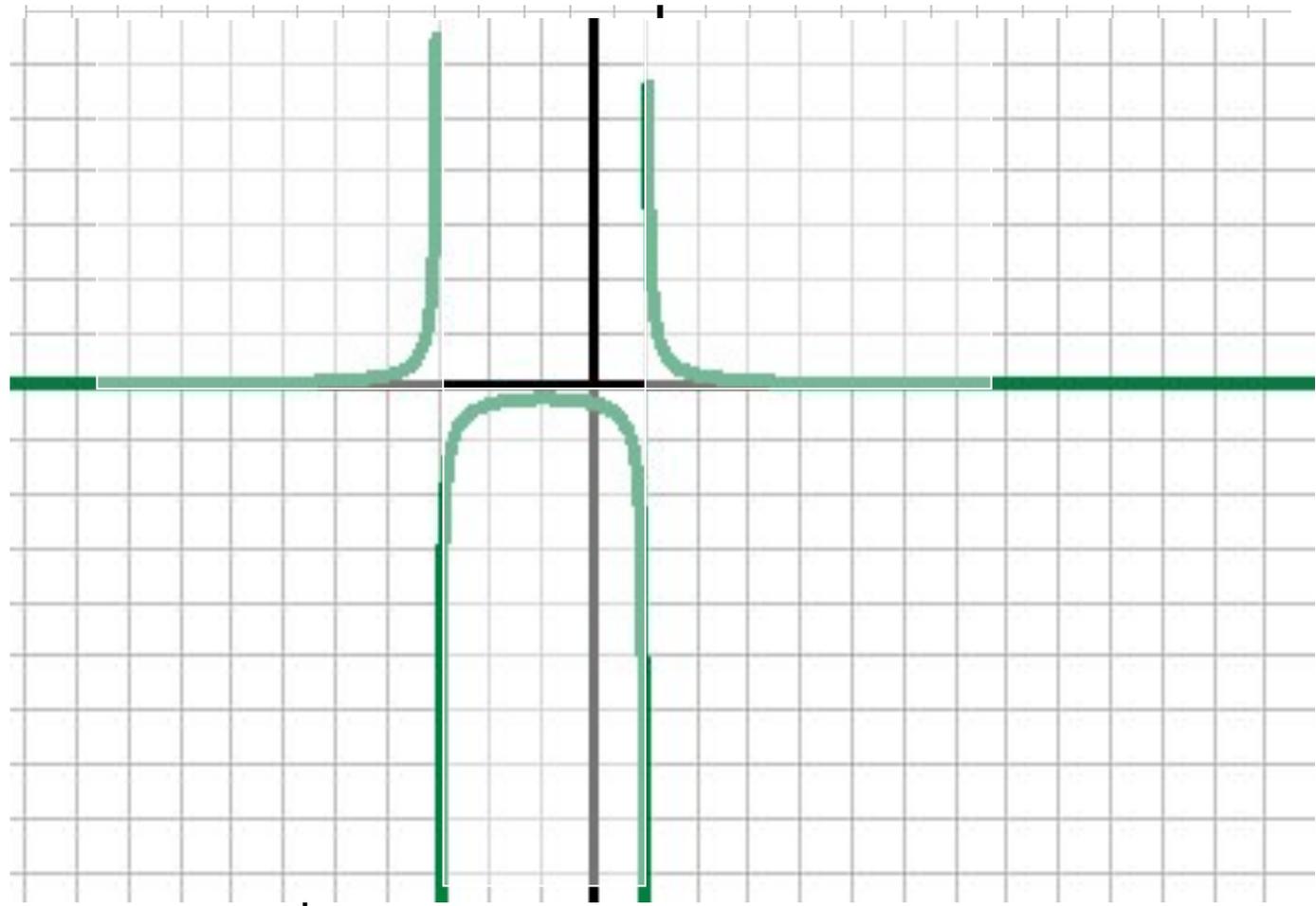
$$x=0$$

$$x=-4$$

$$y=1/5$$

$$y=-1/3$$

$$y=1/5$$

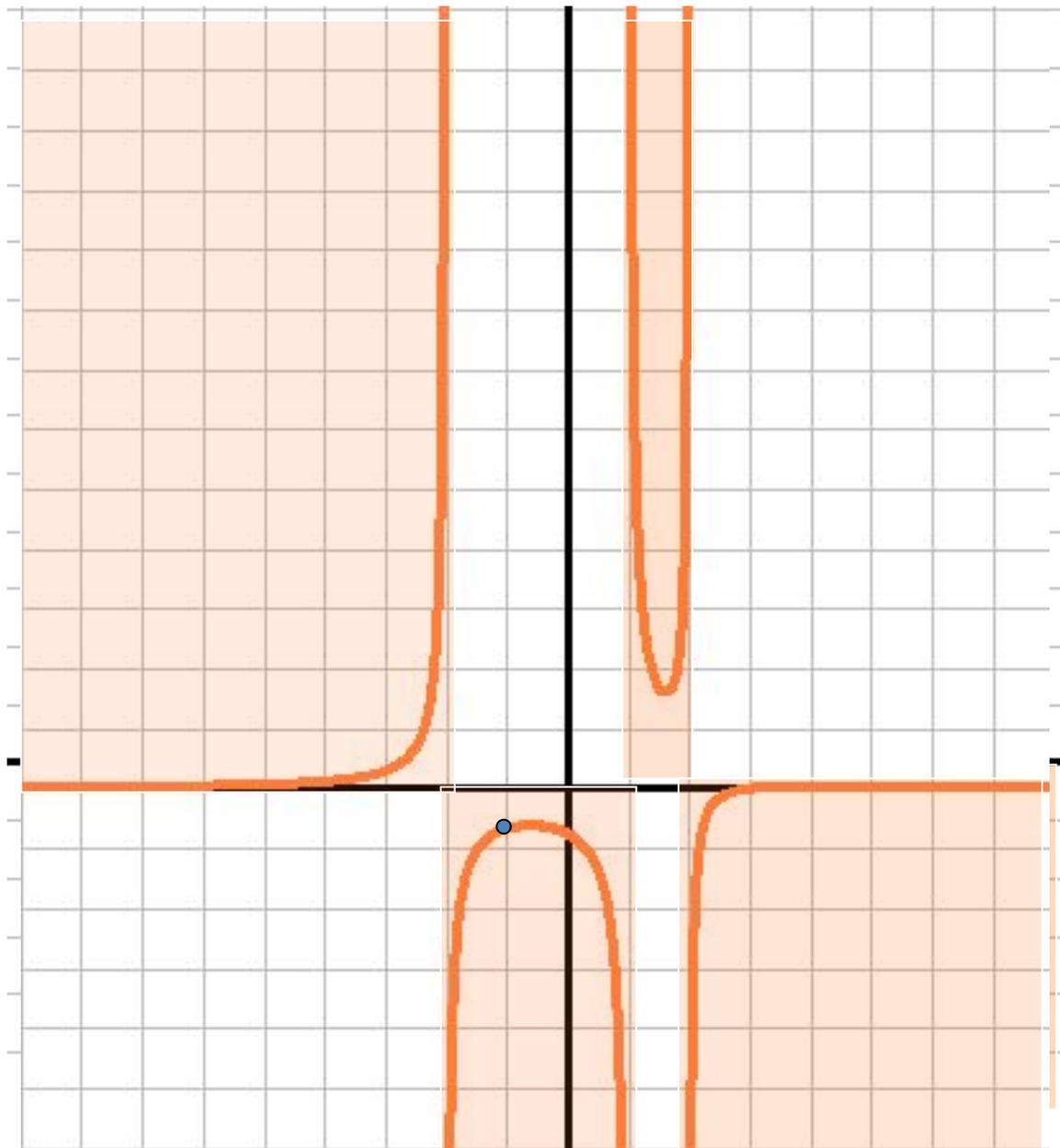


$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 5x^2 + 4}$$

$x=2, x=1, x=-2$

***Вертикальные
асимптоты***

**$y=0$ – горизонтальная
асимптота**



Индивидуальная работа студента

1. Найти область определения для функции
2. Записать уравнение вертикальной асимптоты
3. Записать уравнение горизонтальной асимптоты
4. Записать уравнение наклонной асимптоты
5. Построить на координатной плоскости графики асимптот и эскизы графиков функций:

$$1) y = \frac{Nx^2 + 2x}{x - N} \quad 2) y = \frac{Nx^2 + 9x}{-3x^2}$$

N – порядковый номер в журнале преподавателя.