Теореми додавання і множення ймовірностей та їх наслідки

1.Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

2. Повна група подій

3. Протилежні події

4. Множення подій. Умовна ймовірність. Теорема множення ймовірностей

5. Незалежні події; теорема множення ймовірностей незалежних подій.

6. Ймовірність появи хоча б однієї події.

7. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.

8. Формула повної ймовірності.

9. Ймовірність гіпотез. Формула Байєса.

1.Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Визначення:

Сума (A+B) двох подій A і B – це подія, яка полягає у появі або події A, або події B, або обох цих подій A і B.

Сума декількох подій – це подія, яка полягає в появі хоча б однієї з подій.

Сума (A+B) двох *несумісних* подій A і B – це подія, яка полягає у появі однієї з цих подій (або A, або B)

теорема:

- Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій, неважливо якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Приклад:

Умова:

- В клітці 30 щурів: 10 чорних, 5 сірих і 15 білих. Один щур втік. Яка ймовірність, що втік "кольоровий" щур?

Розв'язок:

- "Кольоровий" щур – сірий або чорний.
- Ймовірність втечі чорного щура (подія А): $P(A)=10/30=1/3$,
- Ймовірність втечі сірого щура (подія В): $P(B)=5/30=1/6$,
- Події А і В несумісні, тому: $P(A+B)=P(A)+P(B)=$ $=1/3+1/6=1/2=0,5$

2. Повна група подій

Визначення:

Події, які утворюють повну групу – попарно несумісні події, для яких поява однієї з них є достовірна подія.

теореми:

- Сума ймовірностей подій A_1, A_2, A_3,..., A_n, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n)=1$$

3. Протилежні події

Протилежні події – це дві єдиноможливі події, які утворюють повну групу.

- Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

$$p+q=1$$

Приклад:

Умова:

- Лабораторія отримує реактиви з фірм Дарниця, Sigma і Louis. Ймовірність отримати реактиви з Дарниці = 0,7, з Sigma = 0,2. Яка ймовірність отримати реактиви з фірми Louis?

Розв'язок:

- Події: "реактиви надійшли з Дарниці", "реактиви надійшли з Sigma" і "реактиви надійшли з Louis" формують повну групу.
- Тому сума ймовірностей цих подій =1, отже
- P = 1 - (0,7+0,2) = 0,1

Приклад:

Умова:

- Ймовірність мутації в ороміненому гепатоциті становить 0,02. Знайти ймовірність, що гепатоцит не мутує.

Розв'язок:

- Події “гепатоцит мутує” і “гепатоцит не мутує” – протилежні, отже: $q = 1 – p = 1 - 0.02 = 0.98$

4. Множення ймовірностей. Умовна ймовірність. Теорема множення ймовірностей.

Визначення:

Добуток двох подій (А і В) – це подія АВ, яка полягає в сумісній появі обох подій А і В.

Добуток декількох подій – подія, яка полягає в сумісній появі всіх цих подій

Умовна ймовірність P_A (В) – ймовірність появи події В, розрахована з передбаченням, що подія А вже настала

теореми:

- Ймовірність сумісної появи подій А і В дорівнює добутку ймовірності однієї з них (Р(А)) на умовну ймовірність іншої події, розрахованої з передбаченням, що перша подія вже настала (P_A(В)):

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

- Для декількох подій – аналогічно:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$$

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Приклад:

Умова:

- У клітці 6 білих і 4 чорні щури. На експеримент двічі виймають з клітки по одному щуру, не повертаючи. Яка ймовірність, що першим витягли чорного, а другим - білого щура?

Розв'язок:

- Подія А – "перший раз витягли чорного щура", її ймовірність $P(A)=4/10=0,4$
- Подія В – "другим витягли білого щура": $P_A(B)=6/9\approx 0,67$
- За теорією ймовірностей: $P(AB)=P(A)*P_A(B) = =0,4*0,67=0,268$

5. Незалежні події; теорема множення ймовірностей незалежних подій.

Визначення:

Незалежні події: подію В називають незалежною від події А, коли поява події А не змінює ймовірності події В, тобто умовна і безумовна ймовірності події В однакові:

$$P(B) = P_A(B)$$

Дві події називають незалежними, коли ймовірність їх суміщення дорівнює добутку ймовірностей цих подій,

В іншому випадку події - **залежні**

теорема:

- Ймовірність сумісної появи декількох подій, незалежних в сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Приклад:

Умова:

- В першій клітці 10 білих і 5 чорних щурів, в другій клітці 8 білих і 12 чорних щурів. Яка ймовірність, що з обох кліток буде вибрано по одному білому щуру?

Розв’язок:

- Ймовірність події А (“з 1-ї клітки витягли білого щура”): P(A)=10/15≈0,67
- Ймовірність події В (“з 2-ї клітки витягли білого щура”): P(A)=8/20≈0,4
- Вибір білих щурів з двох кліток – незалежні події, тому: P(AB)=P(A)*P(B)= =0,67*0,4=0,268

6. Ймовірність появи хоча б однієї події

- *NB!: Теорема застосовується для незалежних випробувань:*

теорема:

- Ймовірність появи хоча б однієї з подій A_1, A_2, ..., A_n, незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,..., $\bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_n)$$

$$\textit{або}: \quad P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$$

- Коли події $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,..., $\bar{A}_n$ мають однакову ймовірність, то ймовірність появи хоч одної події становитиме:

$$P(A) = 1 - q^n$$

Приклад:

Умова:

- Ймовірність зараження організму щура вірусами гепатиту: вірусом А = 0,8, вірусом В = 0,7, вірусом С = 0,9. На щура сумісно подіяли вірусами А, В і С. Яка ймовірність, що щур захворіє на гепатит?

Розв'язок:

- Ймовірність зараження кожним вірусом – незалежні.
- Ймовірності не-захворіти для них: $q_A=1-0.8=0.2$, $q_B=1-0.7=0.3$, $q_C=1-0.9=0.1$
- Ймовірність захворіти і не-захворіти – протилежні, тому: ймовірність не-захворіти: $P(\ddot{A})=q_A*q_B*q_C=0.2*0.3*0.1=0,006$
- Тому:

$P(A)=1- P(\ddot{A})=1-0,006=0,994$

7. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.

- Дві події називають **сумісними**, коли поява однієї з подій не виключає появи іншої події в одному й тому ж випробуванні

теорема:

- Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Приклад:

Умова:

- Ймовірність зараження щура вірусом гепатиту А = 0,8 і гепатиту В = 0,7. Знайти ймовірність, що в експерименті щур захворіє?

Розв’язок:

- Зараження типами А і В – незалежні, і сумісні, тому:
- Ймовірність захворіти на гепатит обох типів у щура: P(AB)=P(A)*P(B)= =0,8*0,7=0,56
- Тоді або:

P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)= =0,8+0,7-0,56=0,94

або (бо - незалежні):

$P=1-q_A*q_B=1-0.2*0.3=0.94$

8. Формула повної ймовірності.

- *тільки для повної групи подій:*

теорема:

- Ймовірність події А, яка може настати тільки при умові появи одної з несумісних подій B_1, B_2, ..., B_n, які утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з подій на відповідну умовну ймовірність події А:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Приклад:

Умова:

- Є дві клітки з чорними і білими щурами. Ймовірність з першої дістати білого щура 0.8, а з другої 0.9. Знайти ймовірність, що щур, навмання витягнутий з навмання обраної клітки – білий.

- Подія А - “витягли білого щура”;
- Подія B_1 – “щура витягли з 1-ї клітки)”, $P(B_1)=1/2$,
- Подія B_2 - “щура витягли з 2-ї клітки)”, $P(B_2)=1/2$,
- Умовні ймовірності: $P_{B1}(A)=0,8$ і $P_{B2}(A)=0,9$.
- Тоді:

$P(A)= P(B_1)*P_{B1}(A)+P(B_1)*P_{B2}(A)=$
$=0,5*0,8+0,5*0,9=0,85$

9. Ймовірність гіпотез. Формула Байєса.

Коли подія А може настати тільки після появи однієї з несумісних подій, які утворюють повну групу (B_1, B_2, ..., B_n), і початково невідомо, після якої з В-подій настане А, події групи В називаються **гіпотезами**

- Переоцінка ймовірностей гіпотез за умови, що подія А настала:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$$

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{Bi}(A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_i) \cdot P_{Bi}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$$

Приклад:

Умова:

- У віварії 2 клітки з мишами. ймовірність, того, що мишу візьмуть з 1-ї клітки = 0,6 і з 2-ї = 0,4. Ймовірність, що з 1-ї клітки миша буде білою = 0,94, а з 2-ї = 0,98. Витягнута наудачу миша виявилась білою. Яка ймовірність, що її витягли з 1-ї клітки?

Розв'язок:

- Подія А – миша виявилась білою.
- Подія В1 – мишу витягли з 1-ї клітки,
- Подія В2 – мишу витягли з 2-ї клітки,
- За умовою ймовірності:

  $P(B1)=0,6$

  $P(B2)=0,4$

  $P_{B1}(A)=0,94$

  $P_{B2}(A)=0,98$
- Тоді:

$$P_A(B1)=\frac{P(B1)\cdot P_{B1}(A)}{P(A)}=\frac{P(B1)\cdot P_{B1}(A)}{P(B1)\cdot P_{B1}(A)+P(B2)\cdot P_{B2}(A)}=$$

$$=\frac{0,6*0,94}{0,6*0,94+0,4*0,98}\approx 0,59$$