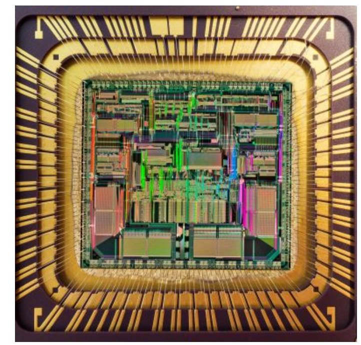
Розділ 1. Основи цифрової техніки

Тема 1.1. Логічні основи цифрових пристроїв

Лекція №2

Логічні основи цифрових пристроїв

Визначення поняття цифрової схеми.
Класифікація та типи



Елементи математичної логіки
Булева алгебра (алгебра логіки)
Основні аксіоми та закон

Цифрові схеми

Цифрова схема є **повністю цифровою** якщо вхідні та вихідні сигнали відображаються тільки **«лог 1»** або **«лог 0»**, тобто одним з двох можливих рівнів напруги.

В залежності від розв’язування задачі **будь-якому заданому набору вхідних сигналів** повинен **відповідати цілком визначений набір вихідних сигналів**. Залежність між вхідними і вихідними сигналами може бути визначатися також і **станом цифрового пристрою**, в якому він знаходився **в попередній момент часу**

Логічна схема - сукупність логічних елементів, призначених для перетворення двійкових змінних

Логічні схеми поділяються:

Без пам'яті → **Комбінаційні схеми**

З пам'яттю → **Послідовнісні схеми (цифрові автомати)**

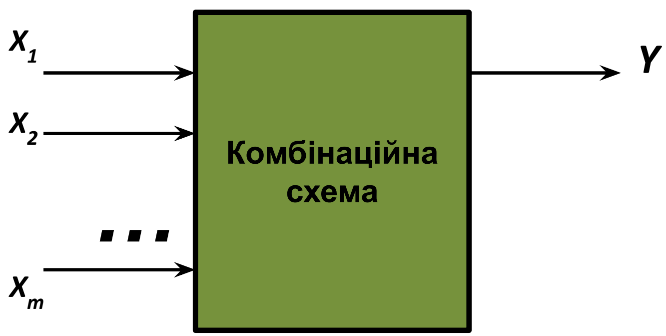
Комбінаційні логічні схеми

<u>Комбінаційною</u> називають **<u>схему</u>** з x входами і y виходами, у якої **<u>сукупність вихідних сигналів</u>** у даний момент часу **<u>повністю визначається сукупністю вхідних сигналів</u>**, що діють в даний момент часу, і не залежить від вхідних сигналів, що діють в попередні моменти часу.

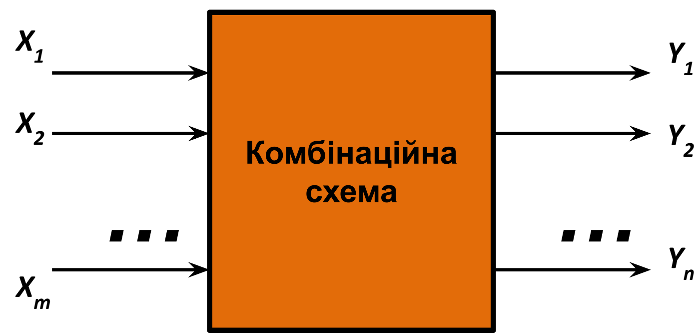
Структурна схема таких пристроїв (КЦП) має вигляд

Послідовний КЦП

Послідовно-паралельний КЦП



Паралельно-послідовний КЦП



Паралельний КЦП

Послідовністні логічні схеми

<u>Послідовнистні логічні схеми (ПЛС)</u> можуть бути розбиті на 2 частини:

– комбінаційна логічна схема (КЛС);

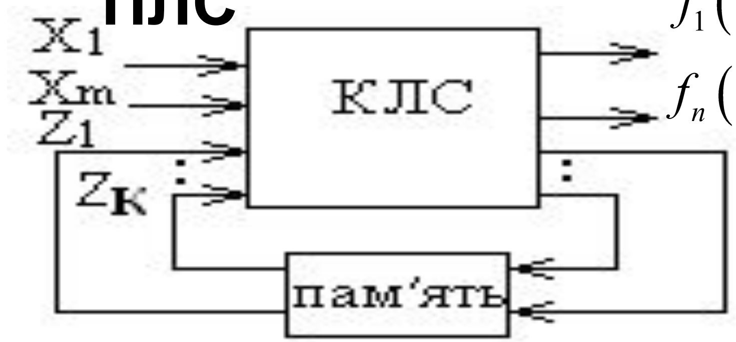
– пам’ять (запам’ятовуючий пристрій).

ПЛС – **<u>має пам’ять</u>** і тому **<u>значення</u>** вихідного сигналу $f_1 \ldots f_n$, цього пристрою залежить **<u>не тільки від визначених кодів (значень) вхідних сигналів $x_1 \ldots x_m$</u>** у поточний момент часу, а **<u>і від стану елементів пам’яті $z_1 \ldots z_k$</u>**, в якому вони були на попередніх тактах

Структурна схема ПЛС

$$f_1\left(x_1 \ldots x_m, z_1 \ldots z_k\right)$$

$$f_n\left(x_1 \ldots x_m, z_1 \ldots z_k\right)$$



↑

синхронізація
(може бути відсутня)

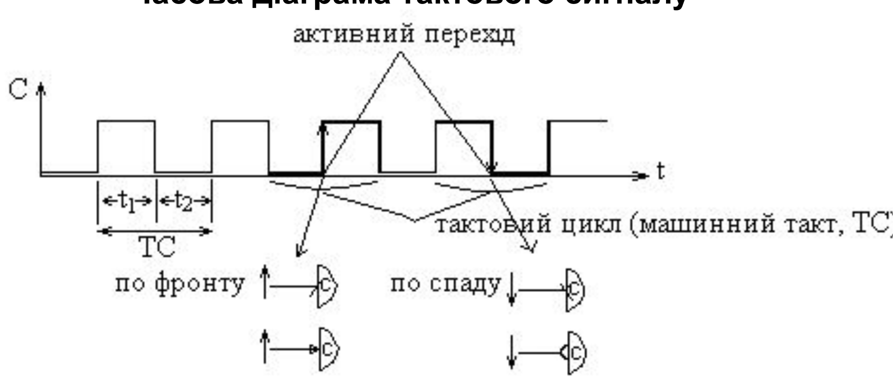
Синхронізація та тактові сигнали

В усіх комп’ютерах використовують **<u>генератор тактових імпульсів (ГТІ)</u>**, що **<u>виробляє періодичну послідовність прямокутних імпульсів</u>**, які називаються **<u>тактовими</u>**.

На початок кожного імпульсу С відбувається зміна інформації на входах елементів і вузлів цифрових пристроїв. Принцип подачі інформації на входи елементів і вузлів у тактові моменти називається **<u>дискретизацією сигналів у часі</u>** (або **<u>синхронізацією</u>**)

<u>Тактовий сигнал</u> – це є ***<u>серія імпульсів фіксованої ширини</u>*** зі **<u>фіксованою частотою повторення</u>**. Тактові ім ми або синхроімп

Часова діаграма тактового сигналу



Основні визначення алгебри логіки

<u>**Алгебра логіки**</u> – це розділ математичної логіки, що вивчає будову (форму) складних логічних висловлювань і способи встановлення їх істинності за допомогою алгебраїчних методів.

<u>**Висловлювання**</u> – це оповідне твердження, в якому щось стверджується або заперечується і відносно якого можна сказати істинне воно або помилкове.

<u>***Висловлювання (твердження)***</u>

Істинні (правдиві) — **True, 1**

Помилкові (хибні) — **False, 0**

Проаналізуємо вислови

A = “Київ – столиця України” (A=true)

B = “Одеса – столиця Європи” (B=false)

C = “3+5=8” (C=1)

D = “Всі риби вміють літати” (D=0)

Основні визначення алгебри логіки

<u>Вхідний набір</u> – це певна комбінація значень двійкових змінних в логічній функції. Максимальне число вхідних наборів визначається виразом $m=2^n$, де n – число змінних.

Наприклад: максимальне число вхідних наборів для функції складає:

від двох змінних $\boldsymbol{2^2=4}$

від п'яти змінних $\boldsymbol{2^5=32}$

<u>Робочі набори</u> – це вхідні набори, для яких логічна функція повністю визначена.

<u>Байдужі набори</u> – це вхідні набори, для яких логічна функція не визначена. Частково визначену функцію можна зробити повністю визначеною (довизначити), приписавши байдужим наборам які-небудь значення функції (0 або1).

Основні визначення алгебри логіки

<u>Таблиця істинності</u> – це представлення логічної функції у вигляді таблиці, в лівій частині якої записуються вхідні набори, а в правій – відповідні їм значення функції.

Таблиця істинності від 2-х змінних

X2	X1	F (X2, X1)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

X2 \ X1	0	1
0	1	0
1	1	1

Таблиця істинності від 3-х змінних

X3	X2	X1	F (X3, X2, X1)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Основні визначення алгебри логіки

<u>Повністю визначена функція</u> – це логічна функція, що має визначені значення 0 або 1 на всіх вхідних наборах.

Наприклад функція 2-х змінних

$$2^2=4$$

X2	X1	F (X2, X1)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

<u>Всі набори визначені (4 з 4-х)</u>

<u>Не повністю визначена функція</u> – це логічна функція, значення якої визначені не на всіх вхідних наборах.

Наприклад

функція 3-х змінних

$$2^3=8$$

<u>Не всі набори визначені тільки (6 з 8-ми)</u>

X3	X2	X1	F (X3, X2, X1)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0

Основні визначення алгебри логіки

Логічні функції однієї змінної

Назва функції	Логічний вираз
Нульова функція (константа «0»)	
Одинична функція (константа «1»)	
Функція повторення	
Функція заперечення (інверсія)	

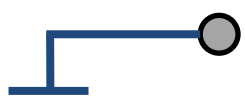
Таблиці істинності

0	0	1
1	0	1

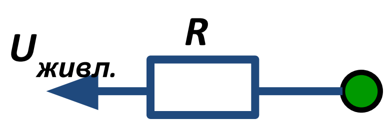
0	*0*	*1*
1	*1*	*0*

Позначення на схемах

Константи

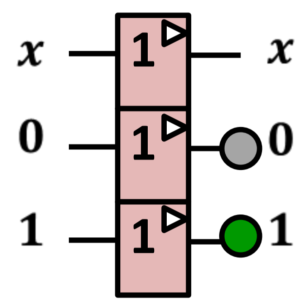


Логічний «нуль»

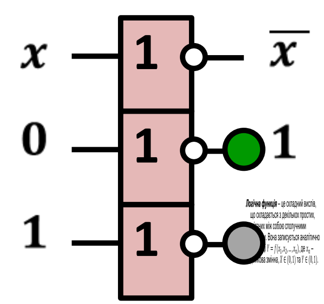


Логічна «одиниця»

Логічні елементи



Повторювачі



Інвертори

Аксіоми булевої алгебри (алгебри логіки)

$$\begin{cases} x = 0, \text{якщо } x \neq 1 \\ x = 1, \text{якщо } x \neq 0 \end{cases}$$

В алгебрі логіки розглядаються ***тільки двійкові змінні***

$$\begin{cases} \overline{0} = 1 \\ \overline{1} = 0 \end{cases}$$

Визначається операція ***заперечення***

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ 1 \cdot x = x \\ x \cdot x = x \\ x \cdot \overline{x} = 0 \end{cases}$$

Визначається операція ***кон'юнкції***

$$\begin{cases} 0 \vee x = x \\ 1 \vee x = 1 \\ x \vee x = x \\ x \vee \overline{x} = 1 \end{cases}$$

Визначається операція ***диз'юнкції***

Приклад 1. Аксіоми булевої алгебри

Знайдіть значення виразів

- Завдання 1. $(1 \vee 1) \vee (1 \cdot 0)=$

Завдання 2. $\left((1 \vee 0) \cdot 1\right) \vee 1 =$

Завдання 3. $(1 \cdot 0 \vee 1) \cdot 0 =$

Завдання 4. $(A \vee 1) \vee (B \vee 0)=$

Завдання 5. $(\mathrm{Z} \vee 0) \cdot 1 =$

Завдання 6.$\left((A \vee 0) \vee (B \cdot 1)\right) \cdot (0 \vee 1)=$

Приклад 1. Аксіоми булевої алгебри

Знайдіть значення виразів (Правильний розв'язок)

1. $(1 \vee 1) \vee (1 \cdot 0) = 1 \vee 0 = 1$

2. $((0 \vee 0) \cdot 1) \vee 0 = (0 \vee 1) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$

3. $(1 \cdot 0 \vee 1) \cdot 0 = (0 \vee 1) \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

4. $(A \vee 1) \vee (B \vee 0) = 1 \vee B = 1$

5. $(Z \vee 0) \cdot 1 = Z \cdot 1 = Z$

6. $((A \vee 0) \vee (B \cdot 1)) \cdot (0 \vee 1) =$

Закони булевої алгебри

1. Закон перестановки (комутативний)

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \qquad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$

2. Закон перестановки (комутативний)

$$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$$

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$$

3. Закон розподілу (дистрибутивний)

$$x_1 \vee x_2 \cdot x_3 = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$$

$$x_1(x_2 \vee x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3$$

Приклад 2. Закон розподілу

Перетворіть вирази використовуючи закон розподілу

- Завдання 1. $(A \vee B) \cdot (A \vee \overline{C})$=

Завдання 2. $(A \cdot \overline{B}) \vee C =$

Завдання 3.$(A \vee BD) \cdot (A \vee \overline{C}) =$

Завдання 4. $AD(B \vee C)$=

Завдання 5. $\overline{A}C(B \vee C \vee \overline{D})$ =

Завдання 6. $\overline{D} \vee BC$=

Приклад 2. Закон розподілу

Перетворіть вирази використовуючи закон розподілу (Правильний розв'язок)

Завдання 1. $(A \vee B) \cdot (A \vee \overline{C}) = \boldsymbol{A \vee B\overline{C}}$

Завдання 2. $\left(A \cdot \overline{B}\right) \vee C = \boldsymbol{(A \vee C) \cdot \left(\overline{B} \vee C\right)}$

Завдання 3. $(A \vee BD) \cdot \left(A \vee \overline{C}\right) = \boldsymbol{A \vee B\overline{C}D}$

Завдання 4. $AD(B \vee C) = \boldsymbol{(AD \vee B) \cdot (AD \vee C)}$

Завдання 5. $\overline{A}C\left(B \vee C \vee \overline{D}\right) =$

Завдання 6. $\overline{D} \vee BC = \boldsymbol{\left(\overline{D} \vee B\right) \cdot \left(\overline{D} \vee C\right)}$

Закони булевої алгебри

4. Закон повторення (ідемпотентності)

$$x_1 \vee x_1 \vee \dots \vee x_1 \vee x_1 = x_1$$

$$x_2 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_2 \cdot x_2 = x_2$$

5. Закон подвійного заперечення

$$\overline{\overline{x}}_1 = x_1 \qquad \overline{\overline{f_3(x_1 x_2 x_3)}} = f_3(x_1 x_2 x_3)$$

$$\overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = x_1 \cdot x_2 \qquad x_2 \vee \overline{\overline{x_3}} = x_2 \vee x_3$$

6. Закон де Моргана

Для 2-х змінних

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \qquad \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$$

Для n змінних

$$\overline{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} = \overline{x}_1 \vee \dots \vee \overline{x}_n$$

$$\overline{x_1 \vee \dots \vee x_n} = \overline{x}_1 \cdot \dots \cdot \overline{x}_n$$

<u>Приклад 3</u>. Закон де Моргана

Перетворіть вирази використовуючи

закон де Моргана

- Завдання 1. $\overline{A \vee \overline{B}\mathrm{C}} =$

Завдання 2. $\overline{(A \vee BC)(D \vee EF)} =$

Завдання 3. $\overline{(\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{D})} =$

<u>Приклад 3</u>. Закон де Моргана

Перетворіть вирази використовуючи закон де Моргана

(Правильний розв'язок)

- <u>Завдання 1</u>. $\overline{A \vee \overline{BC}} = \overline{A} \cdot \overline{\overline{BC}} = \overline{A} \cdot \left(\overline{\overline{B}} \vee \overline{\overline{C}}\right) = \overline{A} \cdot \left(B \vee \overline{C}\right)$

<u>Завдання 2</u>. $\overline{(A \vee BC)(D \vee EF)} = \overline{A \vee BC} \vee \overline{D \vee EF} =$

Завдання 3. $\overline{(\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{D})} = \overline{\overline{A} \vee C} \vee \overline{B \vee \overline{D}} =$

Закони булевої алгебри

7. Правило склеювання

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3) = x_1 \vee x_2$$

$$x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 = x_1$$

8. Правило поглинання

$$x_1 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 = x_1$$

$$x_1 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 = x_1 \vee x_2$$

$$x_1 \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2) = x_1 \cdot x_2$$

<u>Приклад 4</u>. Правило склеювання

Спростіть вирази використовуючи правило склеювання

- Завдання 1. $A\,\overline{B}\,D \vee A\,\overline{B}\,\overline{D} =$

Завдання 2. $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} =$

Завдання 3. $(\overline{A} \vee B)(A \vee B) =$

Приклад 4. Правило склеювання

Спростіть вирази використовуючи правило склеювання (Правильний розв'язок)

Завдання 1. $A\overline{B}D \vee A\overline{B}\,\overline{D} = A\overline{B}$

Завдання 2. $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D} \vee \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{D}$

Завдання 3. $(\overline{A}\vee B)(A\vee B) = B$

Приклад 5. Правило поглинання

Спростіть вирази використовуючи правило поглинання

- Завдання 1. $A\overline{C} \vee AB\overline{C} =$

Завдання 2. $\overline{A}D \vee ABD =$

Завдання 3. $ACD \vee \overline{A}BCD =$

<u>Приклад 5</u>. Правило поглинання

Спростіть вирази використовуючи правило поглинання (Правильний розв'язок)

<u>Завдання 1</u>. $AC \vee AB\overline{C} = AC$

<u>Завдання 2</u>. $\overline{A}D \vee ABD = D\left(\overline{A} \vee AB\right) = \overline{A}BD$

<u>Завдання 3</u>.

$ACD \vee \overline{A}BCD = CD\left(A \vee \overline{A}B\right) = ABCD$

IMPORTANT TERMS (Lecture №2)

E
N
G
L
I
S
H
.
T
E
R
M
S

Boolean algebra
truth table
OR operation (OR gate)
AND operation (AND gate)
NOT operation
NOT circuit (INVERTER)

Boolean theorems
DeMorgan's theorems
logic level
active logic levels
active-HIGH
active-LOW

<u>SUMMARY</u> *(Lecture №2)*

E
N
G
L
I
S
H
.
T
E
R
M
S

1. Boolean algebra is a mathematical tool used in the analysis and design of digital circuits.
2. The basic Boolean operations are the OR, AND, and NOT operations.
3. An OR gate produces a HIGH output when any input is HIGH. An AND gate produces a HIGH output only when all inputs are HIGH. A NOT circuit (INVERTER) produces an output that is the opposite logic level as the input.
4. Boolean theorems and rules can be used to simplify the expression of a logic circuit and can lead to a simpler way of implementing the circuit.

Завдання 1. Аксіоми булевої алгебри

Знайдіть значення виразів

Вираз 1. $x \vee 1 =$

Вираз 2. $x \cdot x =$

Вираз 3. $x \cdot \overline{x} =$

Вираз 4. $y \cdot 0 =$

Вираз 5. $b \vee \overline{b} =$

Вираз 6. $z \vee zx =$

Вираз 7. $z \cdot 1 =$

Вираз 8. $y \vee y =$

Вираз 9. $z \vee 0 =$

Завдання 2. Закон розподілу

Перетворіть вирази використовуючи закон розподілу

- Вираз 1. $(A \vee B)(\overline{A} \vee C)(\overline{B} \vee \overline{C}) =$

Вираз 2. $A(B \vee \overline{C} \vee D) =$

Вираз 3. $AB \vee \overline{B}CD =$

Вираз 4. $AC(\overline{A} \vee B \vee \overline{C}) =$

<u>Завдання 3</u>. Закон де Моргана

Перетворіть вирази використовуючи закон розподілу

- <u>Вираз 1</u>. $\overline{(A \vee B)\overline{C}} =$

<u>Вираз 2</u>. $\overline{R\overline{S}T \vee \overline{Q}} =$

<u>Вираз 3</u>. $\overline{A \vee \overline{BC} \vee D} =$

Завдання 4. Правило склеювання

Спростіть вирази

Вираз 1. $\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}\right)\cdot\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4\right)\cdot\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)=$

Вираз 2. $x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 =$

Вираз 3. $x_1x_2 \vee x_1\overline{x_2} \vee ((\overline{x_1} \vee x_2)(x_3 \vee x_4)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_4}))$

<u>Завдання 5</u>. Правило поглинання

Спростіть вирази

<u>Вираз 1</u>. $\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4\right)\cdot\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)\cdot\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)=$

<u>Вираз 2</u>. $x_1\overline{x_3}\cdot\left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}\right)\cdot(\overline{x_2} \vee x_3)\cdot(x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2)$

<u>Вираз 3</u>. $x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 =$

<u>Завдання 6</u>. Комбіновані задачі

Спростіть вирази

<u>Вираз 1</u>. $\overline{x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3}\cdot\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}\right)\vee\left(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3\right)$

<u>Вираз 2</u>. $\overline{x_1x_2\overline{x_3}}\cdot\overline{\overline{x_1}x_2\overline{x_3}} \vee \left(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}\right)$