Дискретная математика

ЧАСТЬ 2
ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ

Ларионов Владимир Борисович
E – mail: vb_larionov@mti.edu.ru

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Отношения – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества. Наиболее часто используют *унарные* и *бинарные* отношения.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие определенного свойства R у элементов некоторого множества A (например, «быть студенткой» среди множества всех студентов).

Способ задания унарных отношений в памяти ЭВМ- упорядочить элементы конечного универсума и подмножеству, задающему унарное отношение, поставить в соответствие его характеристический вектор. В памяти ЭВМ такое представление является двоичным кодом. Пример показан в табл. 1.3.

Универсум, «группа»	Иванова	Петров	Сидоров	Кузькина	Моськин	Битов
Унарное отношение «отличник», список	Иванова		Сидоров			Битов
Унарное отношение «отличник», характеристический вектор	1	0	1	0	0	1

Действия над отношениями на множествах

Операции над унарными отношениями. Поскольку унарное отношение определяется подмножеством универсума U, то и операции над такими отношениями сводятся к операциям над множествами:

1. Объединение $R_1 \cup R_2 = \{ a \in R_1 \text{ или } a \in R_2 \}$.

Например, R_1 – «быть отличником», R_2 – «быть хорошистом». Тогда унарное отношение $R = R_1 \cup R_2$ – «учиться хорошо».

2. Пересечение $R_1 \cap R_2 = \{ a \in R_1 \text{ и } a \in R_2 \}$.

Например, пусть R_3 – унарное отношение «учиться на бюджете». Тогда, с учетом предыдущего примера, отношение R – «получать стипендию» можно записать так:

$R = (R_1 \cup R_2) \cap R_3$ – «учиться хорошо и учиться на бюджете».

В памяти ЭВМ составные унарные отношения можно определять как логические операции над соответствующими им характеристическими векторами. Пример показан в табл. 1.4

Пример: унарные отношения, представленные двоичным кодом

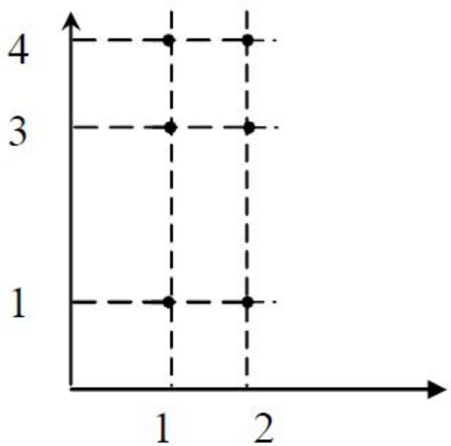
Универсум, «группа»	Иванова	Петров	Сидоров	Кузькина	Моськин	Битов
Унарное отношение «отличник», список	Иванова		Сидоров			Битов
Унарное отношение «отличник», R_1, характеристический вектор	1	0	1	0	0	1
Унарное отношение «хорошист», R_2, характеристический вектор	0	1	0	0	1	0
Унарное отношение «учиться хорошо», $R_1 \cup R_2$, характеристический вектор	1	1	1	0	1	1
Унарное отношение «быть на бюджете», R_3, характеристический вектор	1	0	1	1	1	0
Унарное отношение «получать стипендию», $(R_1 \cup R_2) \cap R_3$, характеристический вектор	1	0	1	0	1	0

Бинарные отношения

Бинарные (двухместные) отношения используются для определения взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов во множестве А («дружить», «любить», «быть моложе», «быть сыном», «быть подчиненным» – примеры бинарных отношений на множестве людей). Из школьной математики известны бинарные отношения (их в школе так и называли:

Прямым (декартовым) произведением двух множеств А и В называется множество упорядоченных пар, в котором первый элемент каждой пары принадлежит множеству А, а второй элемент принадлежит В:

Например, пусть А = {1, 2}, В = {1, 3, 4}. Тогда А × В = {(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)}. Геометрическое представление этого множества следующее



$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Определение бинарных отношений

Бинарное отношение. Пусть A и B – два множества. *Бинарным (двухместным) отношением R называется подмножество пар (a, b) ∈ R* прямого произведения A × B, то есть R ⊆ A × B. Если элементы *a* и *b* находятся в отношении *R*, то это записывают так: *a R b*.

Если A = B, то говорят, что *R есть отношение на множестве A:*

$$R \subset A \times A.$$

Обычно рассматривают бинарные отношения, заданные на одном множестве.

Замечание. Аналогично можно определить и 3-арные и вообще *n*-арные отношения, но в силу того, что информация в ЭВМ в основном подается в виде одномерного массива (вектора) и двумерного массива (матрицы), мы ограничимся бинарными отношениями.

Способы задания бинарных отношений

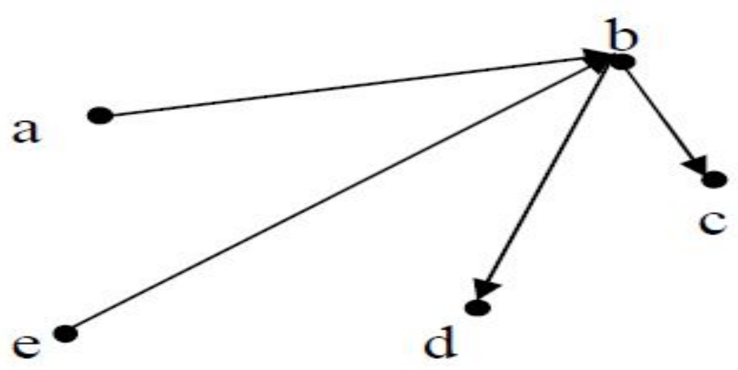
Задание бинарных отношений в памяти ЭВМ. Бинарное отношение R – это подмножество декартового произведения $R \subset A \times A$. Его можно задавать следующими способами:

1. Списком (перечислением) пар, на которых это отношение выполняется.

Например, на множестве A = {a, b, c, d, e} списком задано отношение R = {(a, b), (b, c), (e, b), (b, d)}.

2. Ориентированным графом. Наличие отношения между элементами $a\ R\ b$ отображают стрелкой, которая проведена из вершины a в вершину b.

Например, приведенное выше отношение R можно задать графом:



3. Характеристической матрицей (двумерным массивом), состоящей из нулей и единиц:

$$\|R\| = R[a,b] = \begin{cases} 1, \text{ если } a\,R\,b, \\ 0, \text{ если } a\,\overline{R}\,b. \end{cases}$$

Например, приведенное выше отношение R можно задать характеристической матрицей:

$$\|R\| = \begin{array}{c} \\ \left\{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\right\} \end{array} \begin{array}{c} \{a \quad b \quad c \quad d \quad e\} \\ \left\|\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \end{array}.$$

2.2. Действия над бинарными отношениями

Операции над бинарными отношениями. Поскольку отношения – это подмножества декартового произведения $R \subset A \times A$, то для них определены те же операции, что и операции над множествами.

1.Объединением отношений является отношение

$$R = R_1 \cup R_2 = \{(a,b) \mid (a,b) \in R_1 \textit{ или } (a,b) \in R_2\}.$$

Построить отношение $R = R_1 \cup R_2$ можно, объединив соответствующим образом списки отношений R_1 и R_2 как подмножества или построив граф объединенного отношения.

Чтобы получить характеристическую матрицу объединенного отношения $\|R\| = \|R_1 \cup R_2\|$, необходимо логически сложить характеристические матрицы $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$.

Примеры решения задач (объединение отношений)

Пример 1.2.1. Отношения заданы списком: R_1 = {(a, b), (b, c), (e, b), (e, a)}, R_2 = {(a, b), (a, d), (d, e), (d, c), (c, b), (e, a)}.

Определить отношение $R = R_1 \cup R_2$.

Решение. Построим характеристические матрицы отношений R_1 и R_2:

$$\|R_1\| = \begin{array}{c} \\ \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right\} \end{array} \begin{array}{c} \{a \quad b \quad c \quad d \quad e\} \\ \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| \end{array}, \qquad \|R_2\| = \begin{array}{c} \\ \left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right\} \end{array} \begin{array}{c} \{a \quad b \quad c \quad d \quad e\} \\ \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| \end{array}.$$

Характеристическая матрица отношения $R = R_1 \cup R_2$ равна логической сумме характеристических матриц R_1 и R_2 .

$$\|R\| = \|R_1\| + \|R_2\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Получим, что $R = R_1 \cup R_2$ = {(a, b), (a, d), (b, c), (c, b), (d, c), (d, e), (e, a), (e, b)}.

Примеры решения задач (пересечение отношений)

2. *Пересечением отношений* является отношение:

$$R = R_1 \cap R_2 = \{(a,b) \mid (a,b) \in R_1 \; u \; (a,b) \in R_2\}.$$

Построить отношение $R = R_1 \cap R_2$ можно пересечением списков отношений R_1 и R_2, рассматриваемых как подмножества.

Чтобы получить характеристическую матрицу отношения $R = R_1 \cap R_2$, необходимо поэлементно логически перемножить характеристические матрицы $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$.

Пример 1.2.2. Используя отношения R_1 и R_2 из примера 1.2.1, найти отношение $R = R_1 \cap R_2$.

Решение:

R_1 = {(a, b), (b, c), (e, b), (e, a)},

R_2 = {(a, b), (a, d), (d, e), (d, c), (c, b), (e, a)}.

Построим характеристические матрицы отношений R_1 и R_2 .

$$\|R_1\| = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \|R_2\| = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Характеристическая матрица отношения $R = R_1 \cap R_2$ равна логическому произведению характеристических матриц R_1 и R_2.

$$\|R\| = \|R_1\| \times \|R_2\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Получим, что $R = R_1 \cap R_2 = \{(a, b), (e, a)\}$.

Примеры решения задач (композиция отношений)

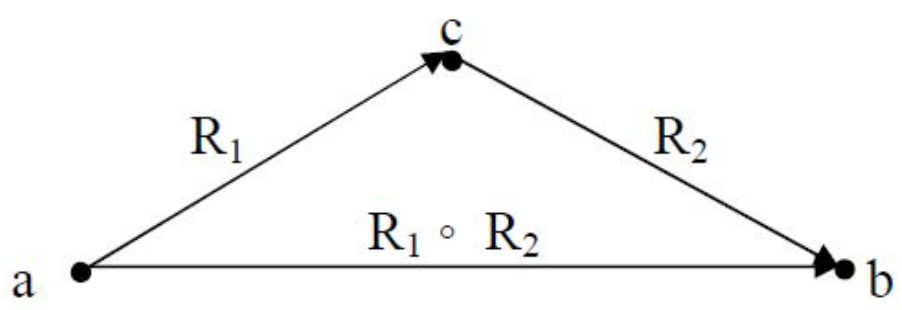
3. Композиция отношений. Пусть $R_1 \subset A \times C$ – отношение из A в C, а $R_2 \subset C \times B$ – отношение из C в B.

Композицией двух отношений $R = R_1 \circ R_2$ называется отношение $R \subset A \times B$ из A в B, определяемое следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 = \left\{ (a,b) \middle| \, a \in A \ \text{и}\ b \in B, \text{и существует}\ c \in C, \text{такое, что}\ a R_1 c \ \text{ и }\ c R_2 b \right\}$$

Композиция отношений на множестве А является отношением на множестве А.

Приведенное выше определение композиции можно трактовать как установление отношения между элементами a и b через обязательно существующего «посредника» c:



Чтобы получить характеристическую матрицу отношения $R = R_1 \circ R_2$, необходимо перемножить характеристические матрицы $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$ по правилу перемножения матриц (строка на столбец), но под «суммой» и «произведением» подразумевать логические «сумму» и «произведение», то есть $r[i, j] = \sum_{k=1}^{n} r_1[i, k] \times r_2[j, k]$.

Пример 1.2.3. Используя отношения R_1 и R_2 из примера 1.2.1, найти отношение $R = R_1 \circ R_2$.

Решение:

R_1 = {(a, b), (b, c), (e, b), (e, a)},

R_2 = {(a, b), (a, d), (d, e), (d, c), (c, b), (e, a)}.

Построим характеристические матрицы отношений R_1 и R_2 .

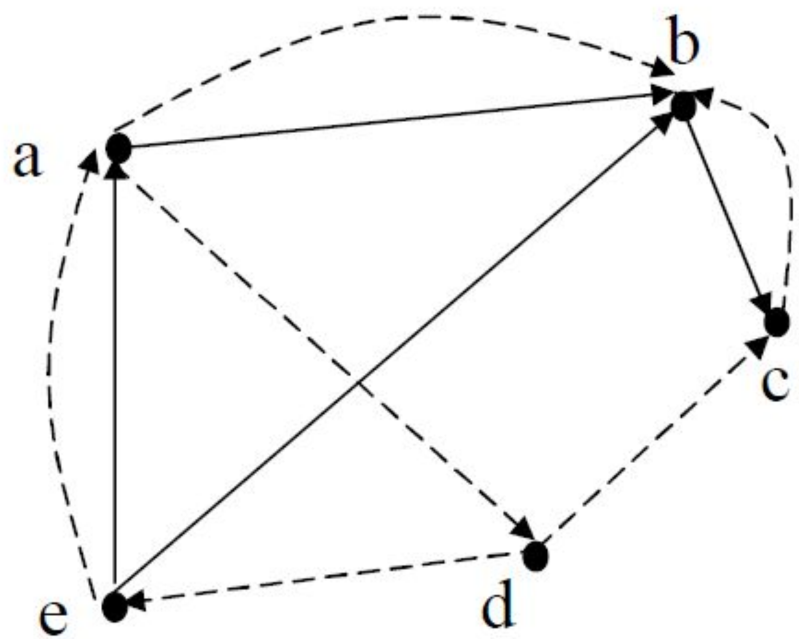
$$\|R_1\| = \begin{array}{c} \\ \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \{a \quad b \quad c \quad d \quad e\} \\ \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}, \quad \|R_2\| = \begin{array}{c} \\ \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{Bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \{a \quad b \quad c \quad d \quad e\} \\ \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}.$$

Построим характеристическую матрицу отношения $R = R_1 \circ R_2$:

$$\|R\| = \|R_1 \circ R_2\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Получим, что $R = R_1 \circ R_2 = \{(b, b), (e, b), (e, d)\}$.

Замечание. Чтобы увидеть, что отношение $R = R_1 \circ R_2$ устанавливается через «посредника», изобразим совместно ориентированные графы отношений R_1 и R_2. При этом отношения на R_1 будем обозначать «⟶», отношения на R_2 будем обозначать «- - →»:



«Посредник»

b ⟶ c - - → b

e ⟶ a - - → b

e ⟶ a - - → d

Упражнения для самостоятельной работы

Задано универсальное множество U и множества A, B, C и D. (см.таблица 1)

Выполнить задание двумя способами:

а) вычислить элементы результирующего множества, используя непосредственно операции над множествами;

б) сформировать характеристические векторы для исходных множеств и получить результирующее множество, используя действия над характеристическими векторами.

Сравнить результаты.

Таблица 1.

Вариант	Дано	Найти
1	$U=\{-15,-14,-13,-12,-11\}$, $A=\{-15,-13,-12,\}$; $B=\{-14,-12,-11\}$; $C=\{-15,-11,\}$; $D=\{-12\}$	$A \cup \overline{C}$; $(B \cup C)\setminus(A \setminus D)$; $(U \setminus C)\cap A$
2	$U=\{a, b, c, d, e\}$, $A=\{a, b, c\}$; $B=\{b, c, d\}$; $C=\{a, e\}$; $D=\{d\}$	$\overline{A \cap B}$; $(B \setminus D)\setminus(A \cup C)$; $(U \setminus B)\cup D$
3	$U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$; $A=\{1, 3, 5\}$; $B=\{2, 4\}$; $C=\{2, 3, 4\}$; $D=\{5\}$.	$\overline{\overline{A} \cap \overline{D}}$; $((A \setminus C)\setminus D)\cup B$; $(U \setminus A)\cup D$.

Таблица 1. продолжение

4	$U=\{2,4,6,8,10\}$, $A=\{2,4\}$; $B=\{4,6,8\}$; $C=\{2,6,10\}$; $D=\{4\}$.	$A\cap\overline{D}$; $(B\setminus C)\cap D$; $(A\setminus B)\cap(U\setminus D)$.
5	$U=\{x,y,z,t,u\}$, $A=\{t\}$; $B=\{x,u\}$; $C=\{x,y,z\}$; $D=\{y,\ t\}$.	$C\cup\overline{D}$; $(A\cup C)\setminus B$; $(U\setminus A)\setminus\overline{B}$.
6	$U=\{-10,-5,5,10,15\}$, $A=\{-10,10\}$; $B=\{-5,5,15\}$; $C=\{5,10,15\}$; $D=\{5\}$.	$A\cap\overline{B}$; $\overline{D\cap C}\setminus A$; $U\cap(B\setminus\overline{D})$.

Таблица 1. продолжение

7	$U=\{10,11,12,13,14\}$, $A=\{10,11,12\}$; $B=\{12,13,14\}$; $C=\{10,14\}$; $D=\{12\}$.	$(B\cup A)\setminus\overline{C}$; $\overline{B\cup D}$; $(U\setminus(B\cap C))\setminus D$.
8	$U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e,f,g\}$, $C=\{d,e,f\}$, $D=\{f,g\}$.	$(U\setminus A)\setminus B$; $C\cap\overline{D}$; $\overline{\overline{A}\cap\overline{C}}$.
9	$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A=\{1,2,3,4\}$; $B=\{4,5,6,7\}$; $C=\{2,4,6\}$; $D=\{2,4\}$.	$(B\cup D)\setminus(A\cap C)$; $\overline{D\cup\overline{C}}$; $(U\setminus\overline{A})\setminus\overline{D}$.
10	$U=\{1,3,4,5,7,9\}$, $A=\{1,3,9\}$; $B=\{5,7,9\}$; $C=\{4,5\}$; $D=\{9\}$.	$(U\setminus D)\setminus C$; $(\overline{C\setminus B})\cup A$; $A\cap D$.