

11. О проверке статистических гипотез

Гипотеза (H) – предположение
о свойствах совокупности,
проверяемое по выборочным данным
(о распределении случайной величины,
об его виде или параметрах)

При проверке по выборке (x_1, x_2, \dots, x_n) «выясняется»,
является ли **отклонение** от гипотезы **случайным** –
тогда она считается **верной (принимается)**,
или отклонение нельзя считать случайным,
оно **значимо** – тогда гипотеза **отвергается**, считается
неверной

Нулевая гипотеза H_0
– отклонение от которой
приписывается случаю
(«нуль-гипотеза»)

***Альтернативная
гипотеза – H_1***

Например:

**$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (о равенстве дисперсий в 2-х ГС,
об их однородности)**

против $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(дисперсии разные, совокупности не однородны)

Гипотезы проверяются:

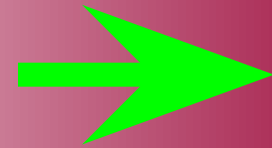
- ♣ в предположении правильности H_0
- ♥ по некоторому критерию $Cr(x_1, x_2, \dots, x_n / H_0)$ – распределению подходящей статистики – функции выборочных значений
- ♠ при заданной вероятности ошибки – *риске* α

В примере про $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

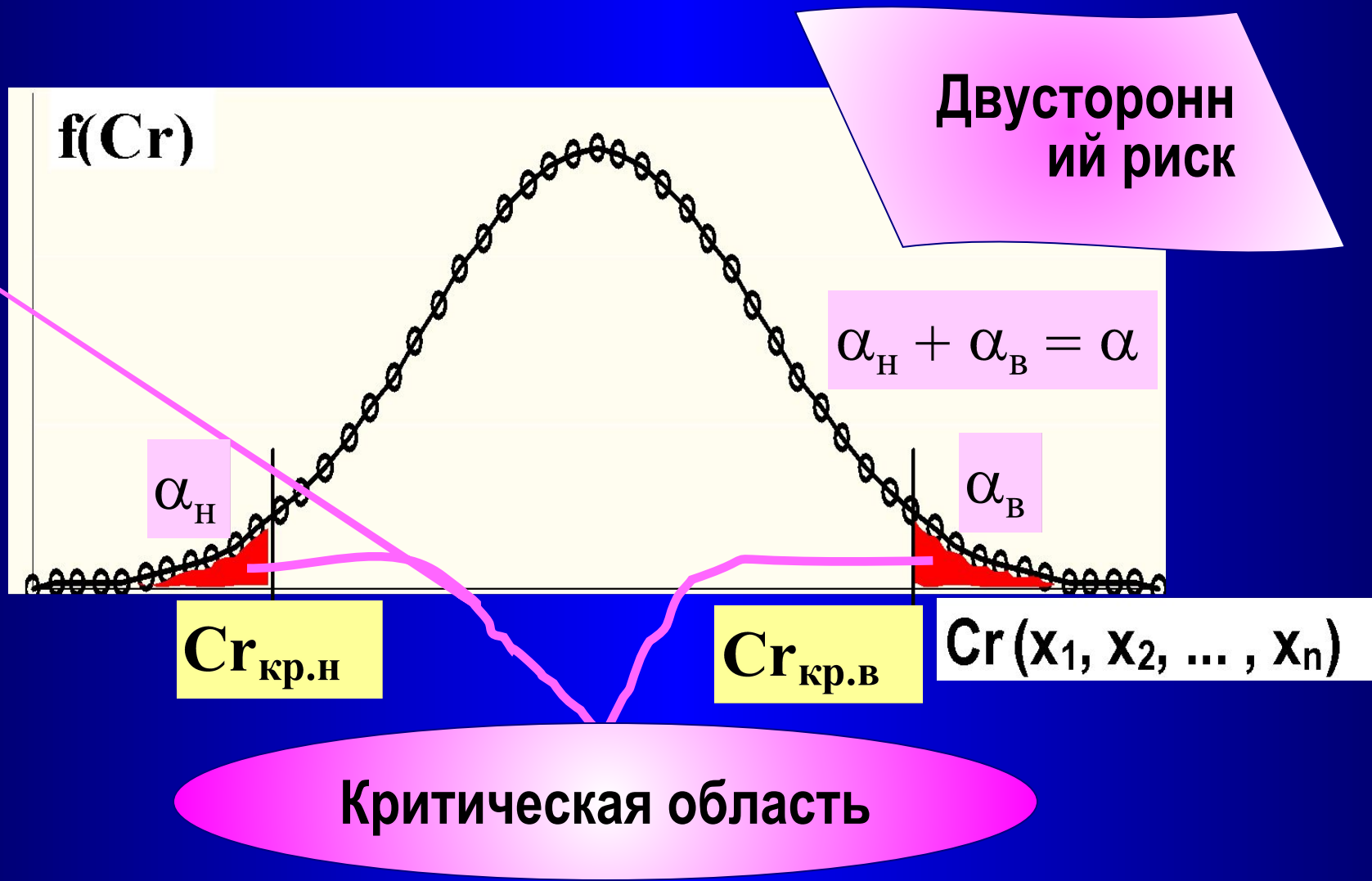
используют «F-распределение» – ему подчиняется статистика $F = s_1^2 / s_2^2$ ($s_1^2 > s_2^2 \rightarrow F > 1$) при числах степеней свободы $f_1 = n_1 - 1$ и $f_2 = n_2 - 1$, если справедлива H_0

Решающее правило

Если
рассчитанное по x_1, x_2, \dots, x_n
фактическое значение
критерия ($Cr_{\text{ф}}$)
попадает в область
правдоподобных значений,
то гипотеза допускается

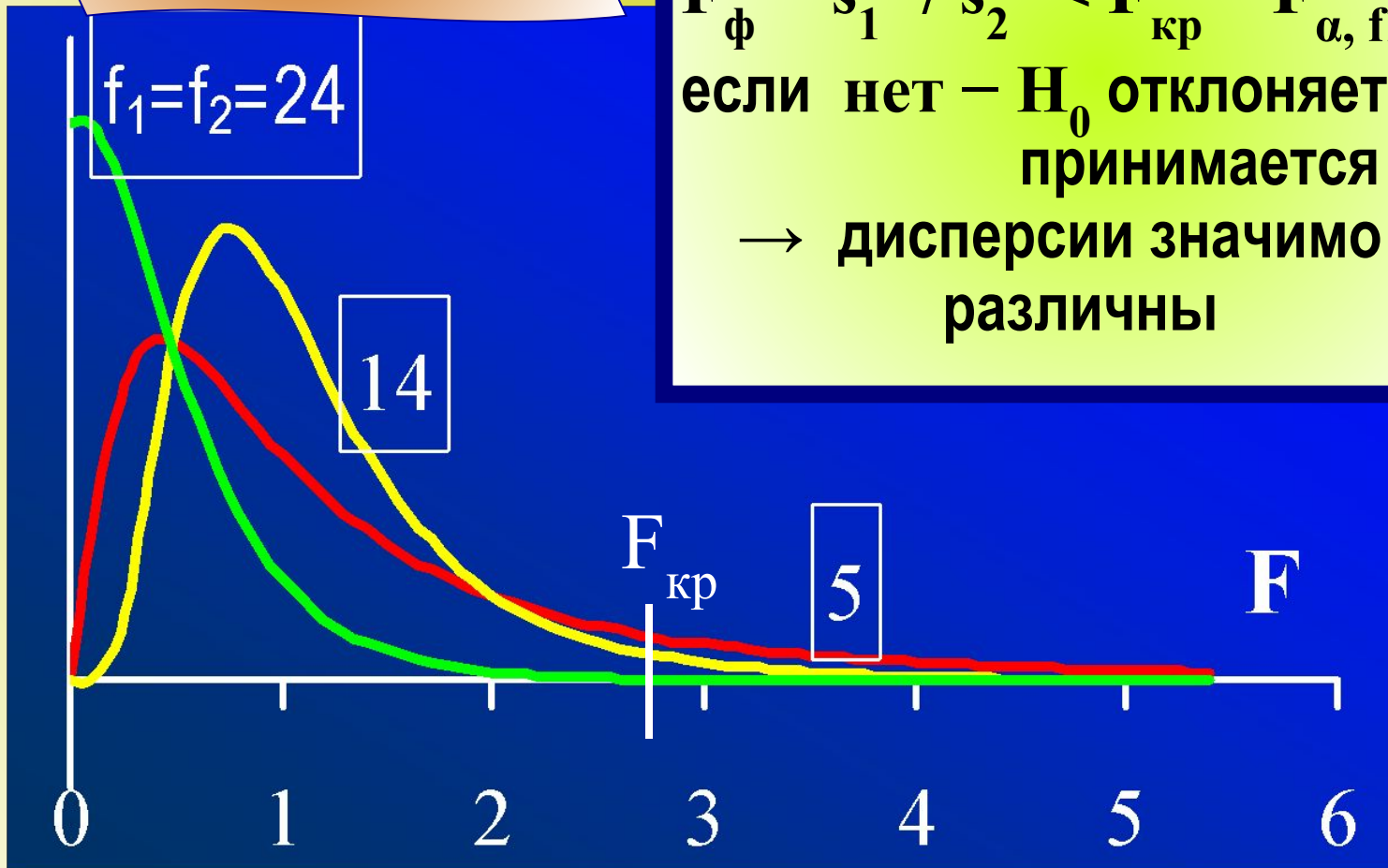


если в *критическую область*
неправдоподобно малых значений
(ограниченных сверху
критическим значением $Cr_{\text{кр.н}}$)
или неправдоподобно больших
(ограниченных снизу $Cr_{\text{кр.в}}$)
– гипотеза отклоняется



Односторонний
риск

В случае с $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
она принимается, если
 $F_{\text{ф}} = s_1^2 / s_2^2 < F_{\text{кр}} = F_{\alpha, f_1, f_2}$;
если нет – H_0 отклоняется,
принимается H_1
→ дисперсии значимо
различны



Статистический смысл решающего правила при проверке гипотез

При допущении истинности гипотезы, вероятность того, что значения критерия окажутся в критической области, мала (равна уровню значимости α) – это практически невозможное событие

Поэтому, если все же это оказывается так, логичен вывод, что допущение неверно, и гипотеза отклоняется. Очевидно, что в $\alpha\%$ случаев возможна ошибка – отклонение верной гипотезы

**Возможны 2 рода
ошибок в выводах**

Ошибка 1-го

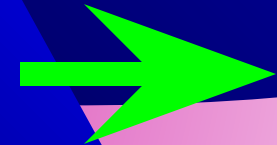
Ее вероятность α – «риск
производителя»
отвергнуть партию годной
продукции:

H_0 отвергается,
хотя является верной

Ошибка 2-го рода

Ее вероятность β – «риск
потребителя»
принять негодную партию
товара:

H_0 принимается,
хотя и неверна, а верна H_1



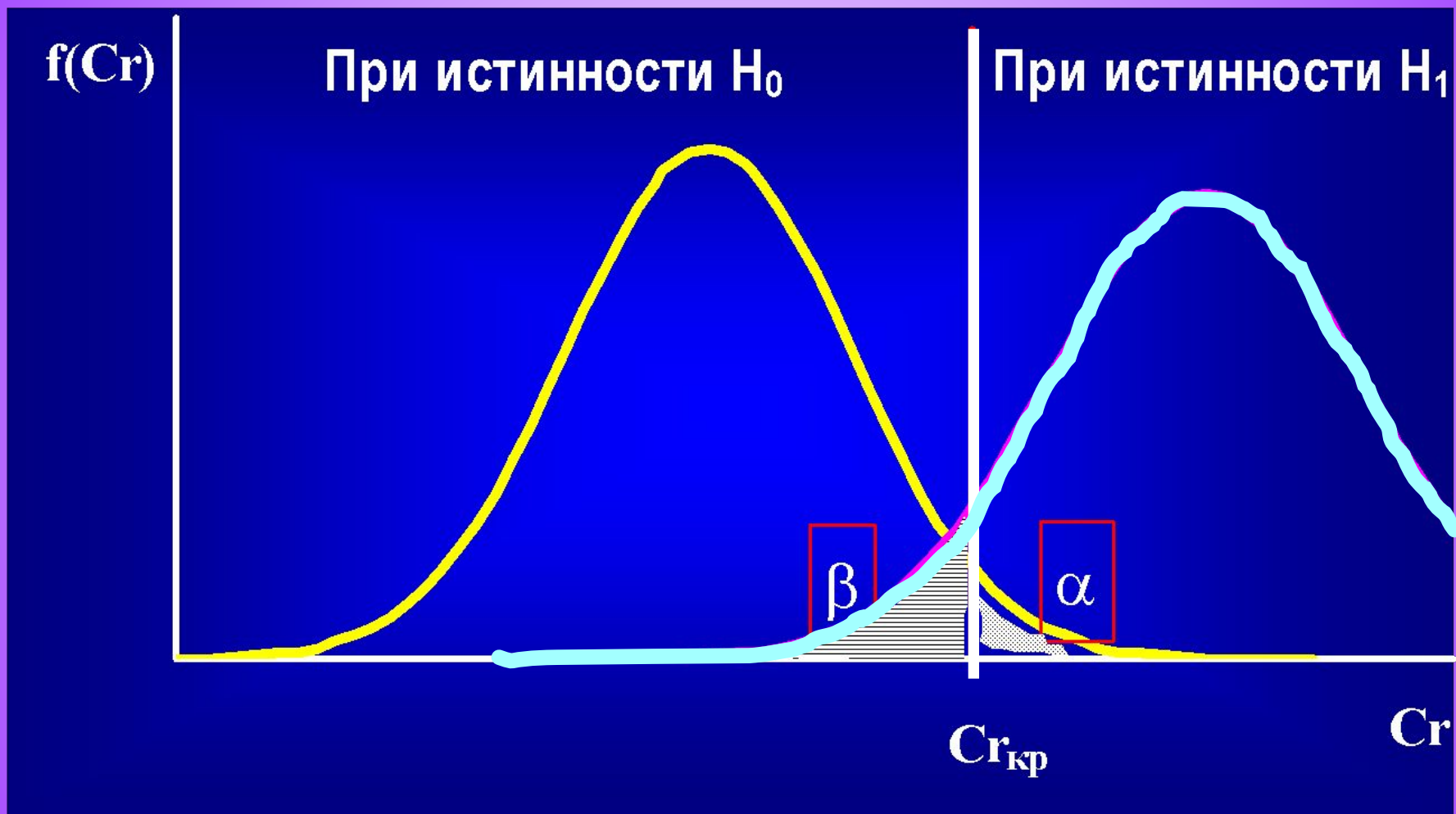


Таблица ситуаций при проверке гипотез

	Критерий рекомендует	
Фактически	Допустить H_0	Отклонить H_0 , допустить H_1
Истинна H_0	Решение правдоподобно	Решение ложно – ошибка 1-го рода
Истинна H_1	Решение ложно – ошибка 2-го рода	Решение правдоподобно

Основные шаги при проверке гипотез

0. Формулировка H_0 и H_1

1. Подбор соответствующей статистики и ее распределения – статистического критерия Cr (теста)

2. Выбор риска α

3. Определение критической области ($Cr_{кр} = Cr_{\alpha}$)

4. Расчет по выборочным данным фактического значения критерия ($Cr_{ф}$)

5. Если оно попадает в критическую область, H_0 отклоняется, принимается H_1 ; если в область допустимых значений – H_0 не отклоняется

Задача на «Сравнение двух средних»

Деловая постановка задачи

Необходимо принять решение – какую из 2-х рекламируемых добавок следует закупать для производства фирменного материала: 2-ая дороже, но дает (судя по рекламе) материал лучшего качества, что окупило бы дополнительные вложения.

Для принятия решения требуется проверить (по результатам испытаний материала с каждой из добавок), что 2-ая добавка действительно обеспечивает более высокий уровень качества (R)

По результатам испытаний 6 образцов

с добавкой 1

$$\bar{R}_1 = 20.88$$

$$s_1 = 2.02$$

$$n = 6 \quad f_1 = 5$$

с добавкой 2

$$\bar{R}_2 = 23.38$$

$$s_2 = 1.67$$

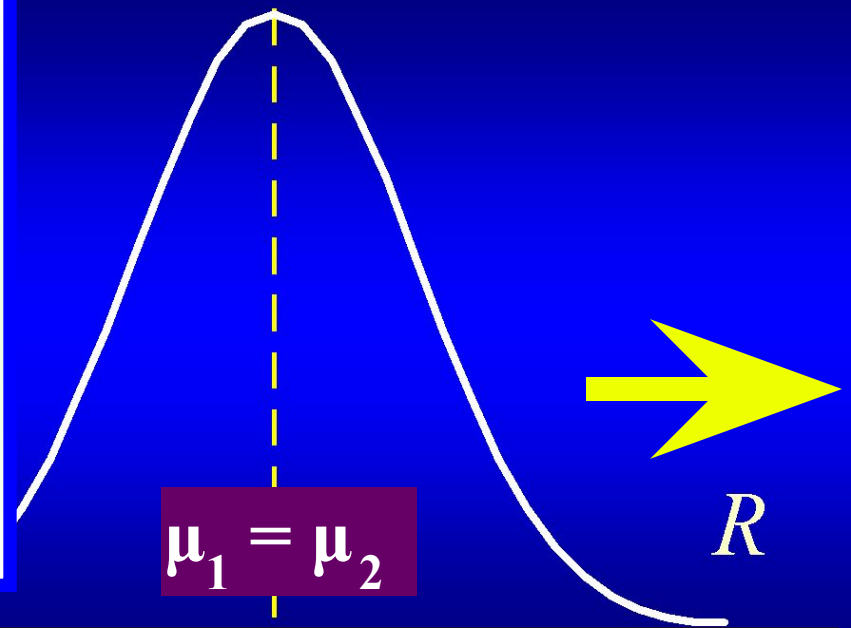
$$n = 6 \quad f_2 = 5$$

Это не одно и то же ?

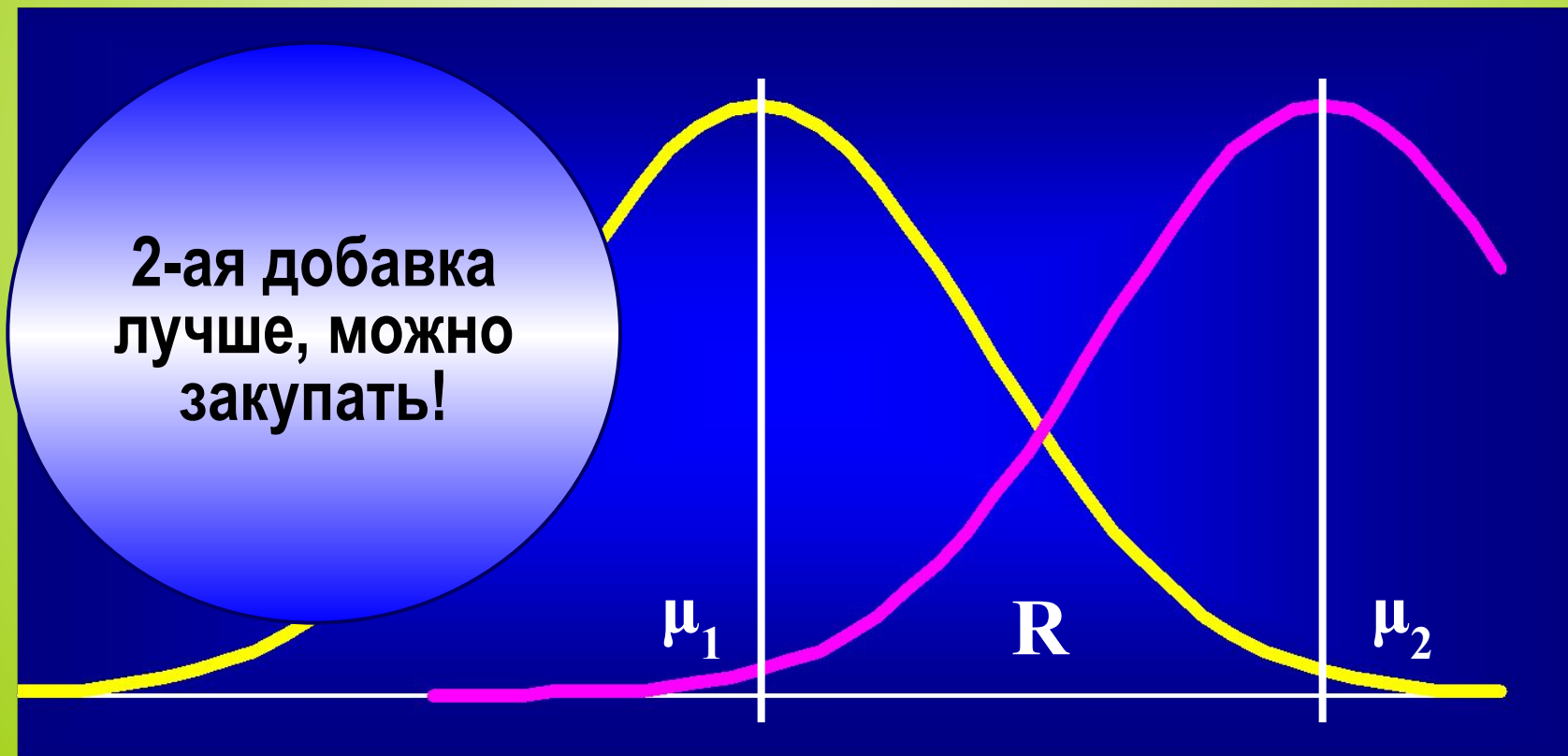
Статистическая постановка задачи

Деловая задача сводится к задаче о проверке гипотезы $H_0: \mu_1 = \mu_2$, где μ – генеральное (истинное) среднее значений R против альтернативной $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (или $H_1: \mu_2 > \mu_1$)

Если H_0 окажется верна (принята), это будет означать, что R_1 и R_2 , на самом деле, из одной совокупности, а различия обусловлены случайностью выборок



Если H_0 будет отвергнута, то считаем, что верна альтернативная гипотеза H_1 , и различия не случайны, значимы, выборки R_1 и R_2 из разных совокупностей



Проверка H_0 осуществляется по t-критерию, по которому распределена статистика

$$t = \frac{|\bar{R}_1 - \bar{R}_2|}{\sqrt{2\tilde{s}(R)}}$$

здесь $\tilde{s}^2(R)$ – обобщенная дисперсия средних при соответствующем числе степеней свободы; определяется после проверки гипотезы об однородности σ_1 и σ_2 ;

таким образом, в знаменателе оценка σ разности \rightarrow

«смысл» t – во сколько раз различие в средних больше меры их случайного рассеяния

В нашей задаче – по результатам испытаний 6 образцов

$$t = \frac{|20.88 - 23.38|}{\sqrt{2 \cdot 0.5724}} = 2.24 > t_{кр} = t_{0.1,10} = 1.81$$

**Действительно,
есть улучшение!**

Th

e

Fr