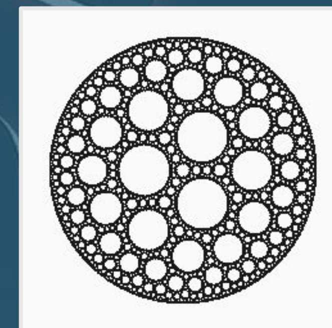
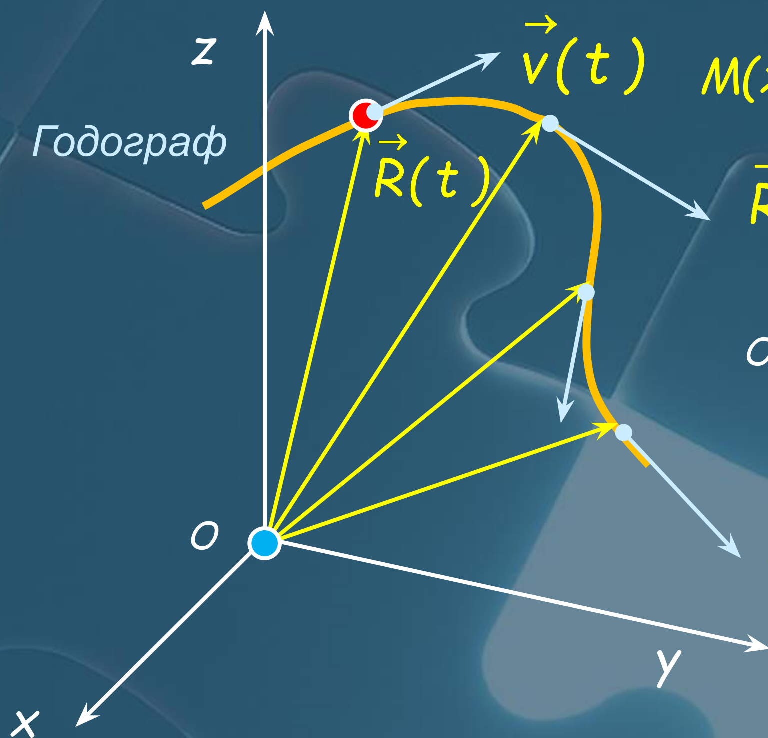
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



[вектор-функция скалярного аргумента – дифференцирование вектор-функции – годограф – соприкасающаяся плоскость – главная нормаль и бинормаль – кривизна линии – кручение линии – основные формулы дифференциальной геометрии – формулы Френе и сопровождающий трехгранник – длина дуги линии – плоские линии – приложения из механики – примеры]

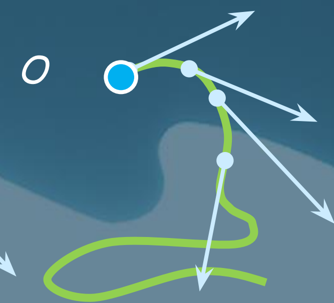
Вектор-функция скалярного аргумента

- Переменный вектор $\vec{R}$ называется функцией скалярного аргумента t, если каждому значению скаляра t из области допустимых значений соответствует определенное значение функции $\vec{R}(t)$.



$$M(x,y,z) = M(x(t),y(t),z(t)) = M(t)$$

$$\vec{R}(t) = \vec{i}\,R_x(t) + \vec{j}\,R_y(t) + \vec{k}\,R_z(t)$$



Предел вектор-функции

$$\lim_{t \to T} \vec{R}(t) = \vec{A}$$

$$|t - T| < \delta \Rightarrow \left|\vec{R}(t) - \vec{A}\right| < \varepsilon(\delta)$$

Непрерывность вектор-функции

$$\lim_{t \to T} \vec{R}(t) = \vec{R}(T)$$

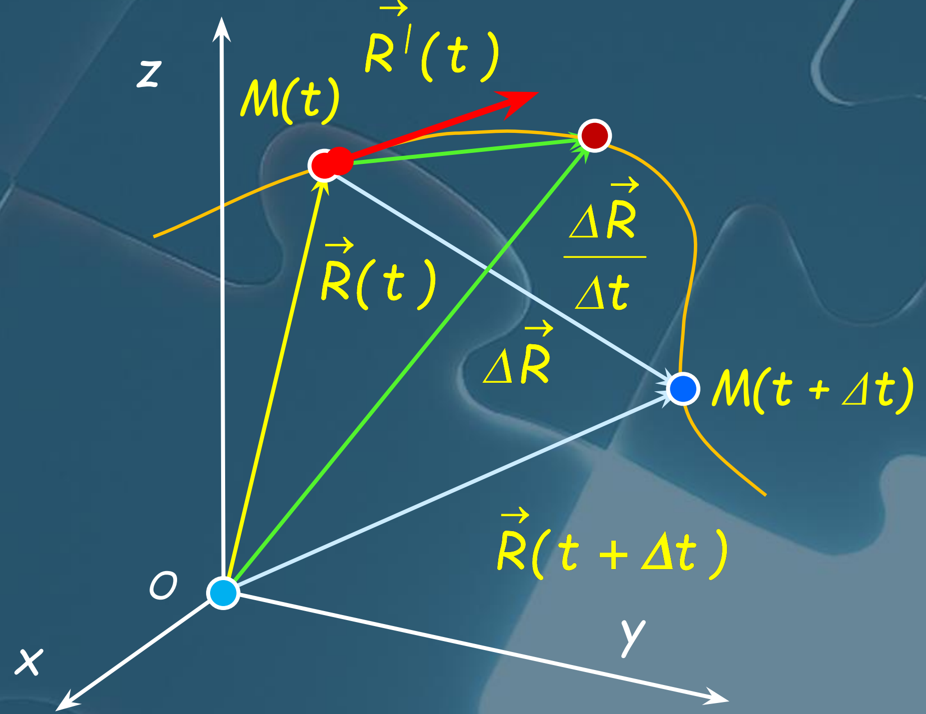
Дифференцирование вектор-функции

- Производной вектор-функции $\vec{R}(t)$ называется предел $\vec{R}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{R}}{\Delta t}$

$$\Delta \vec{R} = \vec{R}(t + \Delta t) - \vec{R}(t)$$

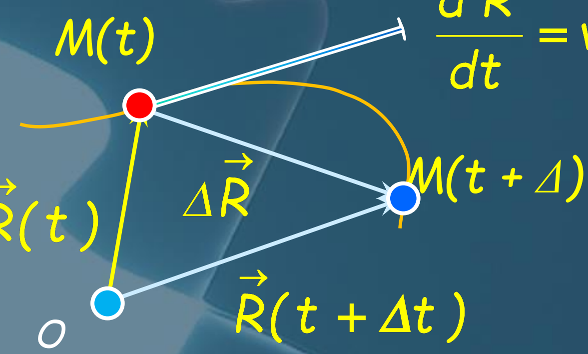
$$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} \overset{\Delta t \to 0}{\Rightarrow} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{R}'(t) = \vec{i} R_x'(t) + \vec{j} R_y'(t) + \vec{k} R_z'(t)$$



Механический смысл производной

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}(t)$$



Правила дифференцирования вектор-функции

- Правила дифференцирования векторных функций скалярного аргумента совпадают с правилами дифференцирования для скалярных функций, но учитывают то, что функции векторные.

$$(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})' = \vec{u}\,' + \vec{v}\,' - \vec{w}\,' \qquad (\varphi\vec{u})' = \varphi'\vec{u} + \varphi\vec{u}\,'$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})' = \vec{u}\,'\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v}\,' \quad (\vec{u}\times\vec{v})' = \vec{u}\,'\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{v}\,' \quad (\vec{R}(s(t)))' = \vec{R}_s'\, s_t'$$

Дифференциал $d\vec{R}(t) = \vec{R}\,'(t)dt$

Свойство инвариантности $d\vec{R}(s(t)) = \vec{R}\,'_t\, dt = \vec{R}\,'_s\, s_t' dt = \vec{R}\,'(s)ds$

Формула Тейлора $\vec{R}(t+\Delta t) = \vec{R}(t) + \frac{\Delta t}{1!}\vec{R}\,'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\vec{R}\,''(t) + \ldots + $

$$+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\vec{R}^{(n)}(t) + (\Delta t)^n(\vec{i}\,\alpha_n + \vec{j}\,\beta_n + \vec{k}\,\gamma_n)$$

Пример

@ *Найти производную вектор-функции* $\vec{r}(t)=\vec{i}\,a\cos t+\vec{j}\,a\sin t+\vec{k}\,ht$ *и построить годограф для* $0\le t\le 4\pi$

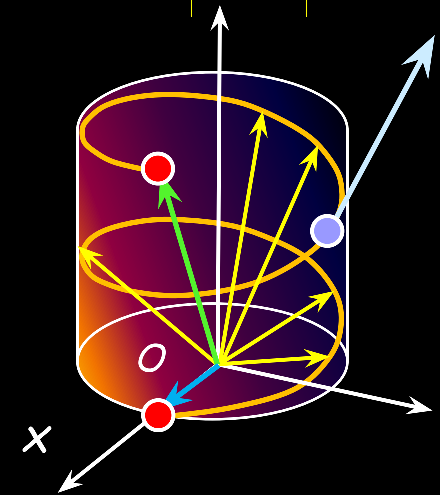
$$\begin{cases} x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=ht\end{cases}\quad 0\le t\le 4\pi \qquad \left|\vec{r}'(t)\right|=\sqrt{a^2+h^2}$$

Решение

$$\vec{r}(t)=\vec{i}\,a\cos t+\vec{j}\,a\sin t+\vec{k}\,ht$$

$$\left|\vec{r}(t)\right|=\sqrt{a^2(\cos^2 t+\sin^2 t)+h^2t^2}=\sqrt{a^2+h^2t^2}$$

$$\frac{d\,\vec{r}(t)}{dt}=\vec{i}\,a\frac{d\cos t}{dt}+\vec{j}\,a\frac{d\sin t}{dt}+\vec{k}\,h\frac{dt}{dt}=$$



$$\vec{r}'(t)=-\vec{i}\,a\sin t+\vec{j}\,a\cos t+\vec{k}\,h \qquad \left|\vec{r}(0)\right|=a \qquad \left|\vec{r}(4\pi)\right|=\sqrt{a^2+16\pi^2h^2}$$

Годограф вектор-функции

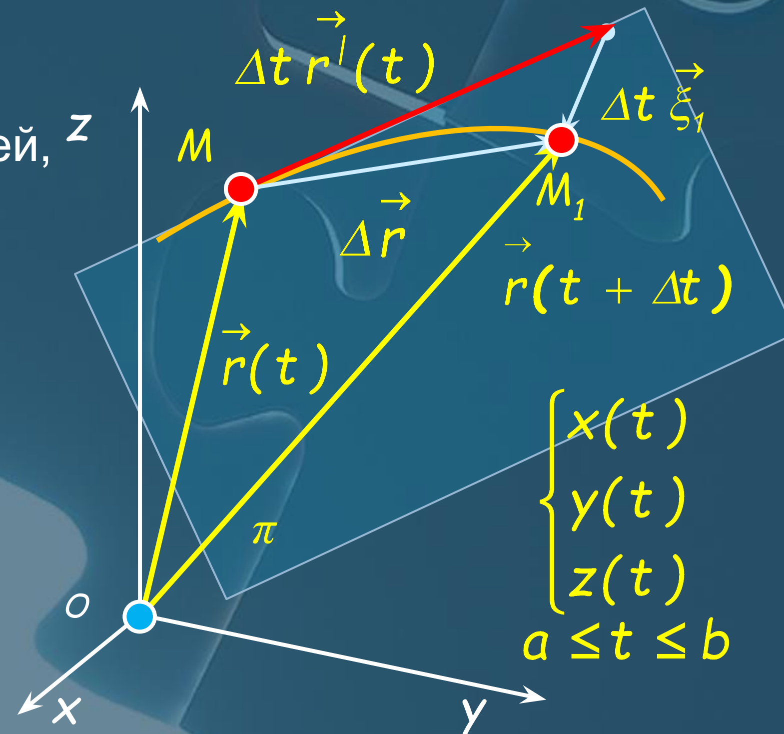
- Кривая (линия) может быть представлена как траектория точки M – конца вектора-функции скалярного аргумента, т.е. как *годограф вектор-функции*

$$\vec{r}(t) = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t) + \vec{k}\,z(t)$$

Касательной к линии в данной точке называется предельное положение секущей, проходящей через данную точку M и бесконечно близкую к ней точку линии.

$$\Delta\vec{r} = \frac{\Delta t}{1!}\vec{r}^{\,\prime}(t) + \frac{\Delta t}{1!}\vec{\xi}_1(t)$$

Соприкасающейся плоскостью кривой в точке M называется предельное положение плоскости, проходящей через касательную в данной точке M и через бесконечно близкую к ней точку.



Соприкасающаяся плоскость

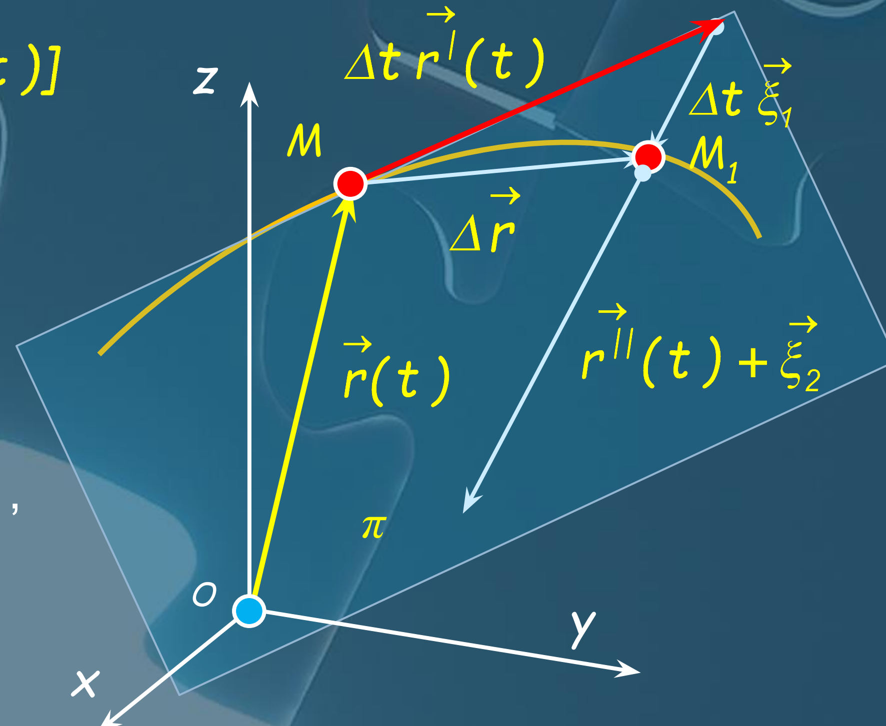
- Теорема Производные первого $\vec{r}^{\,\prime}(t)$ и второго порядков $\vec{r}^{\,\prime\prime}(t)$ для $\vec{r}(t)$ располагаются в соответствующей соприкасающейся плоскости..

$$\Delta\vec{r} = \frac{\Delta t}{1!}\vec{r}^{\,\prime}(t) + \frac{\Delta t^2}{2!}[\vec{r}^{\,\prime\prime}(t) + \vec{\xi}_2(t)]$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{\xi}_2(t) = 0$$

$$\vec{r}^{\,\prime\prime}(t) + \vec{\xi}_2 = \frac{2}{\Delta t^2}[\Delta\vec{r} - \Delta t\,\vec{r}^{\,\prime}(t)]$$

Таким образом вектор $\vec{r}^{\,\prime\prime}(t) + \vec{\xi}_2$ разлагается по векторам $\Delta\vec{r}$ и $\vec{r}^{\,\prime}(t)$, которые лежат в соприкасающейся плоскости.

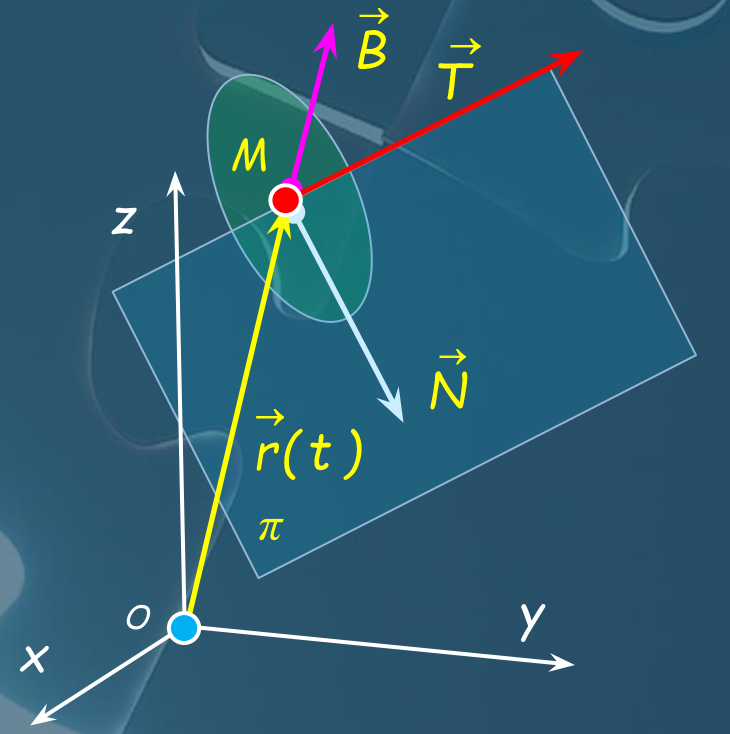


Главная нормаль и бинормаль

- Всякая прямая, проходящая через данную точку M пространственной кривой и *перпендикулярная касательной* в этой точке, называется *нормалью*.

Главной нормалью называется нормаль, которая лежит в *соприкасающейся плоскости*.

Бинормалью называется нормаль, которая *перпендикулярна вектору касательной и главной нормали*.



$$\vec{T} = \vec{r}'(t)$$

$$\vec{B} = \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$$

$$\vec{N} = [\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)] \times \vec{r}'(t)$$

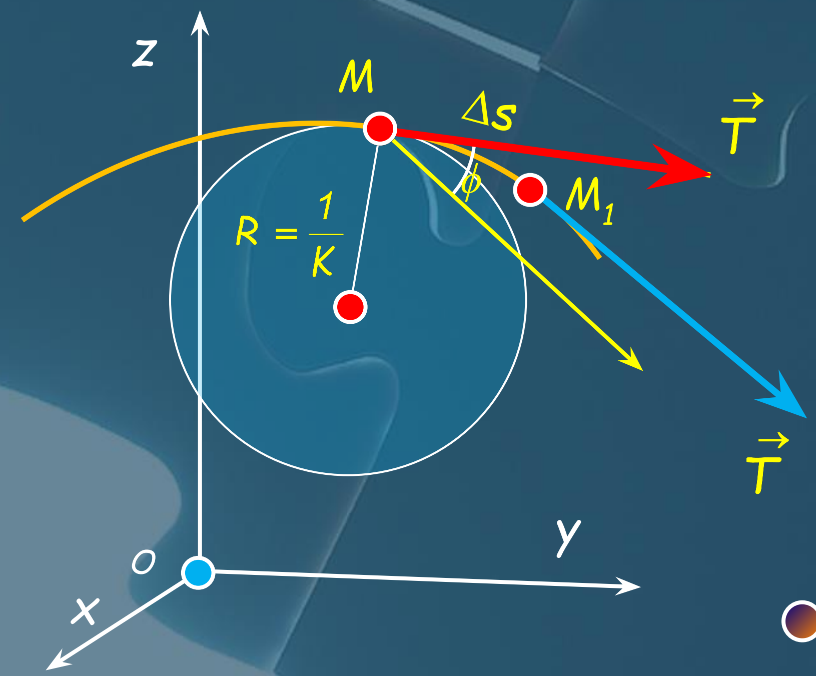
Кривизна линии

- *Кривизной* K линии в данной точке M называется предел угла поворота касательной при переходе из M в бесконечно близкую точку M_1 , отнесенный к бесконечно малой длине дуги $|\Delta s|$, заключенной между этими точками

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{|\Delta s|}$$

Радиусом круга кривизны называется радиус окружности, которая касается линии (лежит в соприкасающейся плоскости) и радиус которой связан с кривизной соотношением $R = \dfrac{1}{K}$

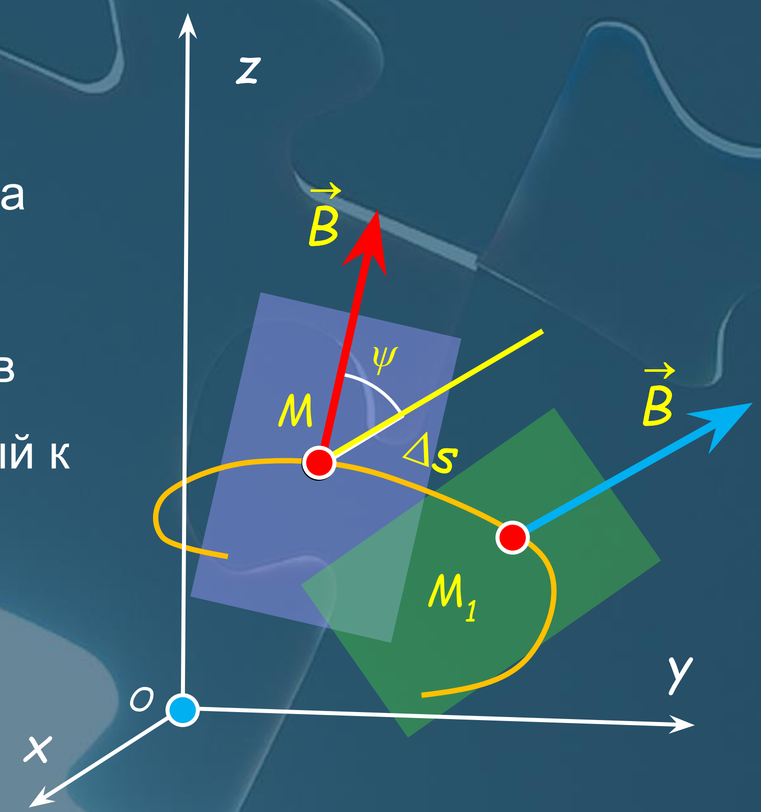
$$|\Delta s| = R\varphi \qquad K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{R\varphi} = \frac{1}{R}$$



Кручение линии

- *Кручением* T линии в данной точке M пространственной кривой называется взятый с надлежащим знаком предел угла поворота соприкасающейся плоскости (вектора бинормали) при переходе из M в бесконечно близкую точку M_1, отнесенный к бесконечно малой длине дуги $|\Delta s|$, заключенной между этими точками

$$|T| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\psi}{|\Delta s|}$$



Основные формулы дифференциальной геометрии

- *Вектор-функция* может быть представлена как функция дуги годографа :

$$\vec r(t)\quad \vec r(s(t))\quad s=s(t)\quad s:s(t=\alpha)\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow s(t=\beta)\quad \vec r(s)$$

$$\frac{d\vec r}{dt}=\frac{d\vec r}{ds}\frac{ds}{dt}\qquad \frac{d\vec r}{ds}\Rightarrow\left|\frac{d\vec r}{ds}\right|=\frac{\left|d\vec r\right|}{\left|ds\right|}=1\quad \left|d\vec r\right|=ds$$

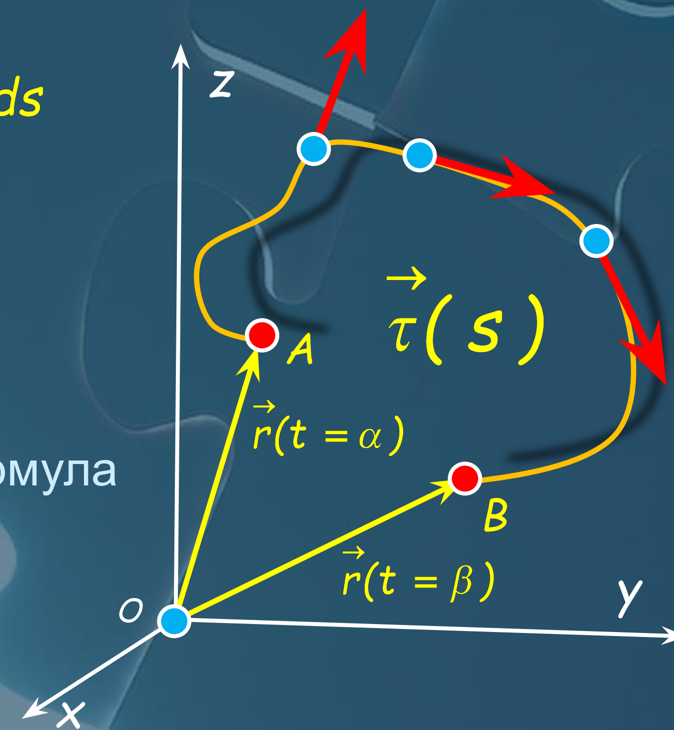
$$\left|d\vec r\right|=ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$\left|d\vec r\right|=ds=\sqrt{x(t)'^2+y(t)'^2+z(t)'^2}\,dt$$

- *Орт касательной*   Первая основная формула

$$\frac{d\vec r}{dt}=\frac{d\vec r}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{d\vec r}{\left|d\vec r\right|}\frac{ds}{dt}=\vec\tau\frac{ds}{dt}$$

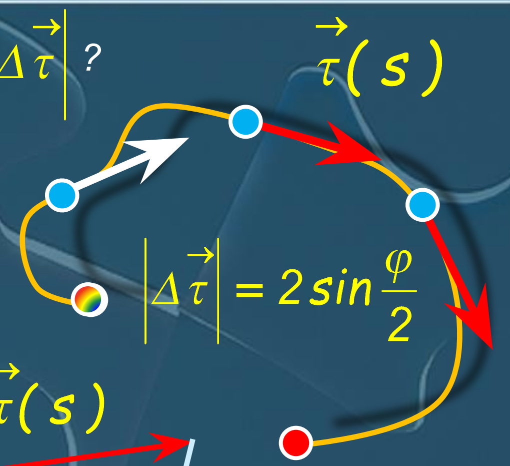
$$\vec\tau=\frac{d\vec r}{ds}$$



Основные формулы дифференциальной геометрии

- *Орт главной нормали*

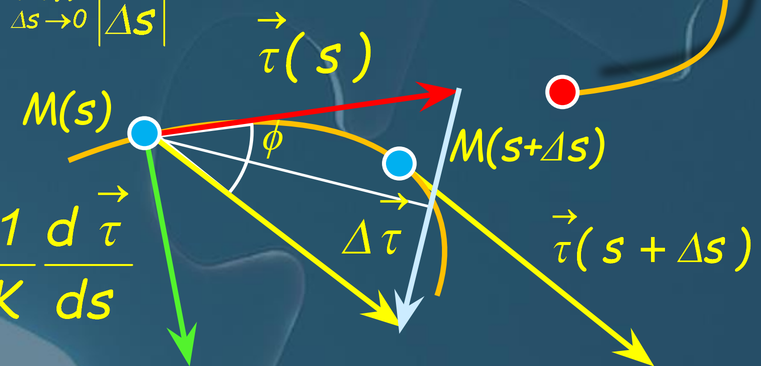
Геометрический смысл модуля $\left|\Delta\vec{\tau}\right|$?



Рассмотрим производную $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$. *Направление вектора* $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$?

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{\varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{|\Delta s|}$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{|\Delta s|} = K$$



$$\vec{\nu} = \frac{1}{K}\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1 \qquad \frac{d\left(\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}\right)}{ds} = 2\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} \parallel \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \vec{\nu} \qquad \vec{\tau} \perp \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

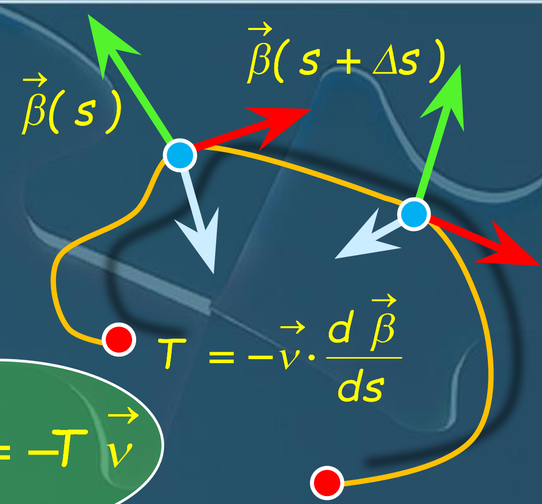
Вторая основная формула

$$\boxed{\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{\nu}}$$

Основные формулы дифференциальной геометрии

- *Орт бинормали*

Направление вектора $\dfrac{d\vec{\beta}}{ds}$?



Найдем орт бинормали $\quad \vec{\beta} = \vec{\tau}\times\vec{\nu} \qquad \dfrac{d\vec{\beta}}{ds} = ?$

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\beta} = 1 \qquad 2\vec{\beta}\cdot\frac{d\vec{\beta}}{ds} = 0 \qquad \vec{\beta}\perp\frac{d\vec{\beta}}{ds} \qquad \frac{d\vec{\beta}}{ds}\perp\vec{\tau}$$

$$T = -\vec{\nu}\cdot\frac{d\vec{\beta}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \underbrace{\frac{d\vec{\tau}}{ds}\times\vec{\nu}}_{=K\,\vec{\nu}\times\vec{\nu}\,=\,0} + \vec{\tau}\times\frac{d\vec{\nu}}{ds} = \vec{\tau}\times\frac{d\vec{\nu}}{ds}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -T\,\vec{\nu}}$$

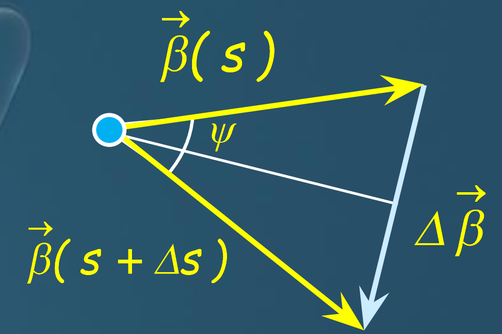
Третья основная формула

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} \parallel \lambda\vec{\nu} \qquad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \lambda\vec{\nu}$$

Геометрический смысл λ ?

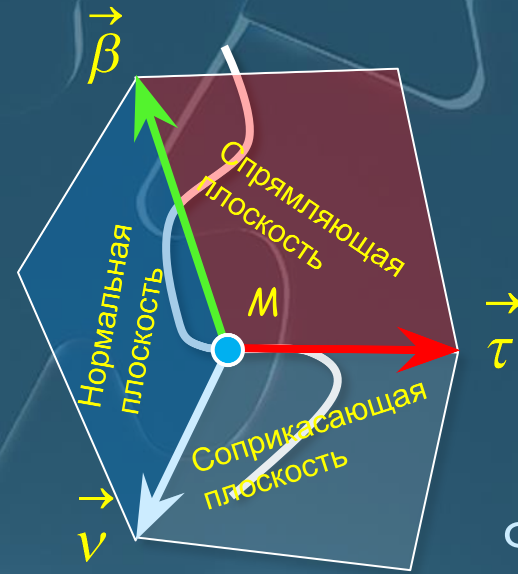
$$\left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right| = |\lambda| \qquad \left|\Delta\vec{\beta}\right| = 2\sin\frac{\psi}{2} \qquad |T| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\psi}{|\Delta s|} \qquad \lambda = -T$$

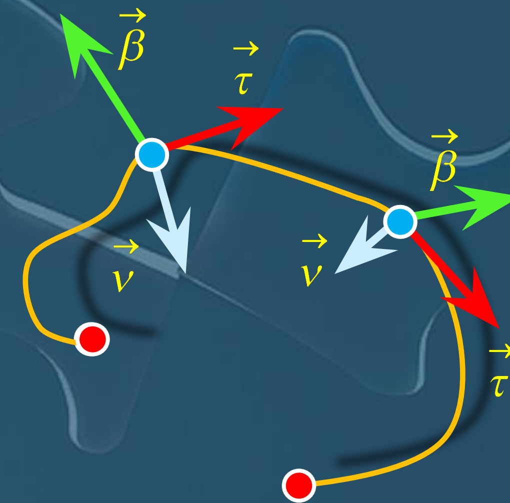
$$|\lambda| = \left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\Delta\vec{\beta}\right|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\psi}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}}\cdot\frac{\psi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\psi}{|\Delta s|}$$



Формулы Френе и сопровождающий трехгранник

- ***Сопровождающим трехгранником***, связанным с точкой *M* пространственной кривой, называется трехгранник, ребрами которого являются касательная, нормаль и бинормаль.





$$\vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = \frac{d\vec{\beta}}{ds} \times \vec{\tau} + \vec{\beta} \times \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -T\,\vec{\nu} \times \vec{\tau} + \vec{\beta} \times K\,\vec{\nu}$$

Формулы Френе

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} \qquad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\,\vec{\nu}$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -K\,\vec{\tau} + T\,\vec{\beta} \qquad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -T\,\vec{\nu}$$

Пример

@ *Найти кривизну и кручение кривой - годографа вектор-функции*

$$\vec r(t)=\vec i\,a\cos t+\vec j\,a\sin t+\vec k\,ht$$

Решение

$$K=\left|\frac{d\vec\tau}{ds}\right| \qquad d\vec r=(-\vec i\,a\sin t+\vec j\,a\cos t+\vec k\,h)dt$$

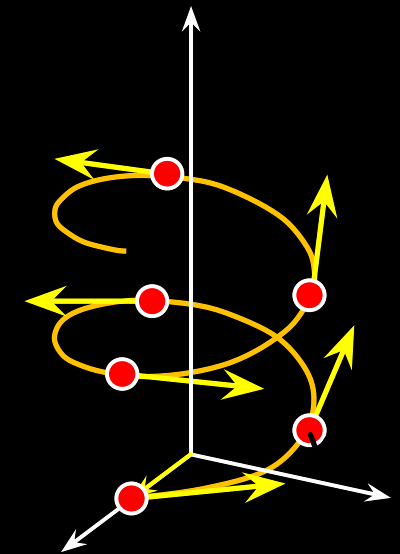
$$ds=\left|d\vec r\right|=\sqrt{a^2+h^2}dt$$

$$\vec\tau=\frac{d\vec r}{ds}=\frac{-\vec i\,a\sin t+\vec j\,a\cos t+\vec k\,h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$d\vec\tau=\frac{-\vec i\,a\cos t-\vec j\,a\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}}dt$$

$$\left|\frac{d\vec\tau}{ds}\right|=\frac{\sqrt{a^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}}{a^2+h^2}=\frac{a}{a^2+h^2}$$

$$\vec\tau=\frac{d\vec r}{ds}$$



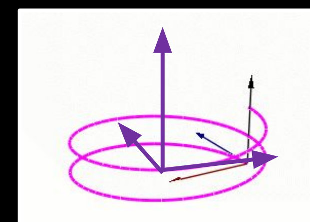
$$K=\frac{a}{a^2+h^2}$$

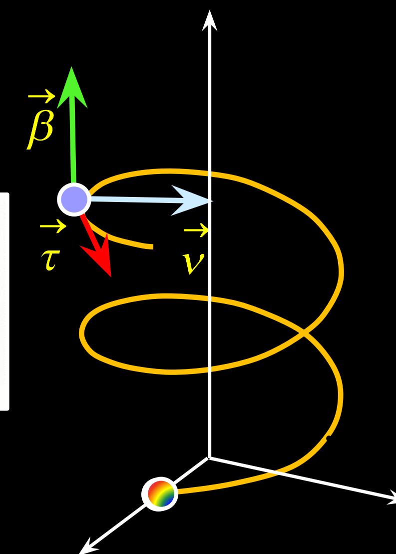
Пример

@ $\vec r(t)=\vec i\,a\cos t+\vec j\,a\sin t+\vec k\,ht \qquad T=?$

$$T=-\vec\nu\cdot\frac{d\vec\beta}{ds}\qquad \vec\nu=\frac{1}{K}\frac{d\vec\tau}{ds}=-\vec i\cos t-\vec j\sin t$$

$$\vec\beta=\vec\tau\times\vec\nu=\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -a\sin t & a\cos t & h\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=$$





$$=\frac{\vec i\,h\sin t-\vec j\,h\cos t+\vec k\,a}{\sqrt{a^2+h^2}}\qquad d\vec\beta=\frac{\vec i\,h\cos t+\vec j\,h\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}}dt$$

$$K=\frac{a}{a^2+h^2}$$

$$T=-\vec\nu\cdot\frac{d\vec\beta}{ds}=-\frac{(-\vec i\cos t-\vec j\sin t)\cdot(-\vec i\,h\cos t-\vec j\,h\sin t)}{a^2+h^2}=\frac{h}{a^2+h^2}$$

$$T=\frac{h}{a^2+h^2}$$

Длина дуги линии

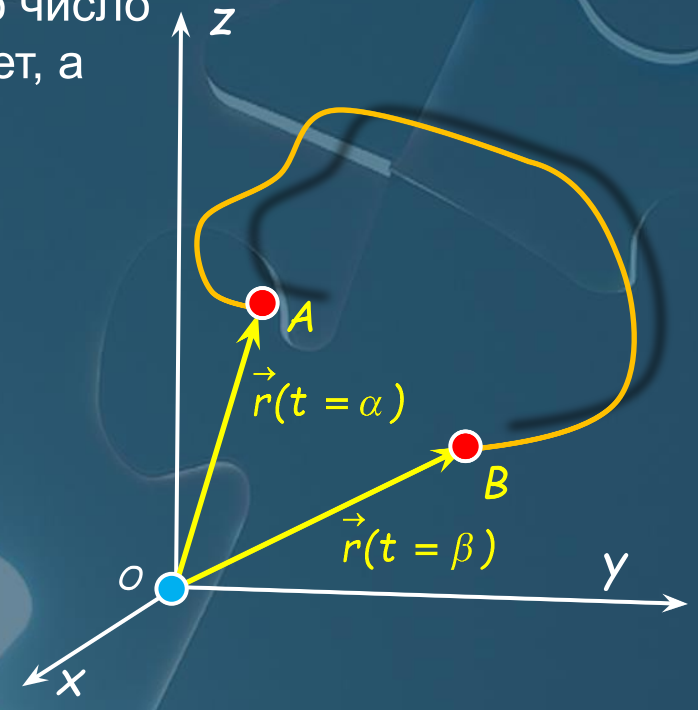
- *Длиной L* дуги линии называется предел длины вписанной в неё ломанной при условии, что число звеньев ломанной неограниченно возрастает, а максимум их длин стремится к нулю:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left| \vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1}) \right| \quad t_0 = \alpha, t_n = \beta$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta \vec{r}_k = \int_{(L)} \left| d\vec{r} \right| = \int_{(L)} ds$$

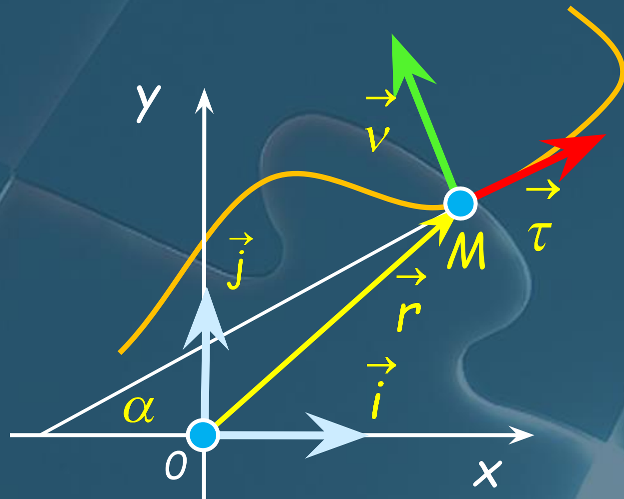
$$L = \int_{(L)} \left| d\vec{r} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \vec{r}' \right| dt$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \right| dt$$



Плоские линии

- Основные уравнения: $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} \qquad \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{\nu} \qquad \dfrac{d\vec{\beta}}{ds} = 0 \equiv T \qquad \dfrac{d\vec{\nu}}{ds} = -K\vec{\tau}$



$$\vec{r}(t) = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t)$$

Кривизна плоской линии $\quad \vec{\tau} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha$

$$K = \left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \left|\left(-\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha\right)\frac{d\alpha}{ds}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

$$K = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| \qquad tg(\alpha) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \qquad \alpha = arctg\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

$$ds = \left|d\vec{r}\right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

$$|d\alpha| = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}\,\frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\dot{x}^2}\,dt = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Приложения в механике

- Скорость точки

$$\vec{r}(t) = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t) \qquad \vec{v}(t) = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\,\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{\tau}\frac{ds}{dt} = \vec{\tau}\left|\vec{v}\right|$$

Ускорение точки

$$\vec{w}(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\left(\vec{\tau}\dfrac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\,\vec{\tau}}{dt}$$

$$\frac{d\,\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\,\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = K\,\vec{\nu}\,\frac{ds}{dt}$$

$$\vec{w}(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau} + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{\nu}$$

$$\vec{w}(t) = w_T\,\vec{\tau} + w_N\,\vec{\nu} \qquad w_T = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad w_N = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$