Лекция 3

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Постановка задачи

Пусть поведение ***модели объекта управления*** описывается разностным уравнением

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (1)$$

- x – ***вектор состояния системы***, $x \in R^n$;
- u – ***вектор управления***, $u \in U(k) \subseteq R^q$,
- $U(k)$ – некоторое замкнутое выпуклое множество допустимых значений управления;
- k – дискретное время, $k \in T = \{0, 1, \ldots, N-1\}$,
- N – число шагов,
- $f(k, x, u): T \times R^n \times U(k) \to R^n$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $f(k, x, u) = (f_1(k, x, u), \ldots, f_n(k, x, u))^T$.

Начальное состояние системы (1) задано

$$x(0) = x_0. \qquad (2)$$

Конечное состояние $x(N)$ должно удовлетворять условию:

$$\Gamma_i(x(N)) = 0, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{3}$$

где $0 \le l \le n$, функции $\Gamma_i(x)$ – непрерывно дифференцируемы; система векторов $\{\partial \Gamma_i(x(N))/\partial x_1, \ldots, \partial \Gamma_i(x(N))/\partial x_n\}$, $i = 1, \ldots, l$, линейно независима $\forall x(N) \in R^n$.

При управлении используется информация только о дискретном времени k, т.е. применяется так называемое ***программное управление*** (рис. 1).

Последовательность векторов $u(0), u(1), \ldots, u(N-1)$ - ***управление*** $u(\cdot)$. Последовательность векторов $x(0), x(1), \ldots, x(N)$, определяемая уравнением (1) с начальным условием (2) и управлением $u(\cdot)$, – ***траектория*** $x(\cdot)$.

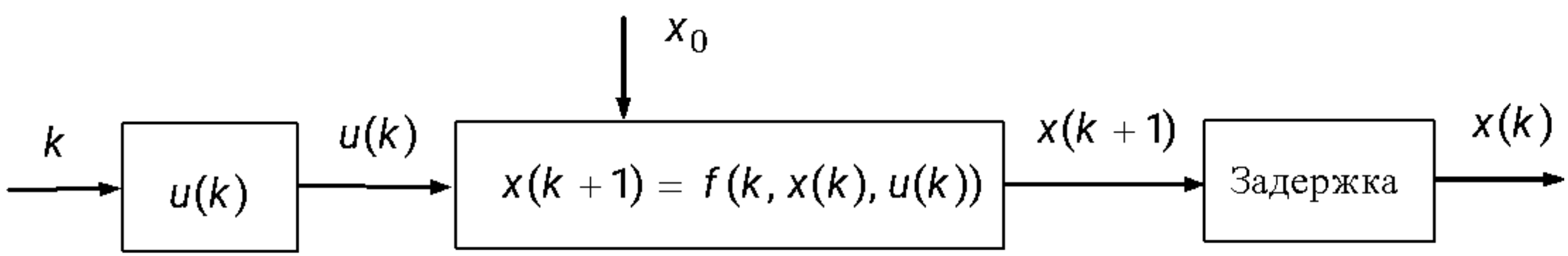

Рис. 1. Схема программного управления

Множество допустимых процессов $\boldsymbol{D}(0, x_0)$ - множество пар $d = (x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющих уравнению (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ и конечным условием (3).

На множестве $\boldsymbol{D}(0, x_0)$ определен ***функционал качества управления***

$$I(d) = \sum_{k=0}^{N-1} f^0(k, x(k), u(k)) + F(x(N)), \tag{4}$$

где $f^0(k, x, u)$, $F(x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Требуется найти такую пару $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \boldsymbol{D}(0, x_0)$, что

$$I(d^*) = \min_{d \in \boldsymbol{D}(0, x_0)} I(d). \tag{5}$$

Задача (5) с функционалом (4) называется ***задачей Больца***, если $F(x(N)) \equiv 0$ - ***задачей Лагранжа***, если $f^0(k, x(k), u(k)) \equiv 0$ – ***задачей Майера***.

$x^*(\cdot) = \{x_0, x^*(1), \dots, x^*(N)\}$ - ***оптимальная траектория***,

$u^*(\cdot) = \{u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)\}$ - ***оптимальное управление***.

Дискретный принцип максимума

Пусть на паре $d^* = \left(x^*(\cdot), u^*(\cdot)\right) \in \mathbf{D}\,(0, x_0)$ *достигается минимум функционала. Тогда существуют не равные нулю одновременно вектор-столбцы (вспомогательные переменные)* $\Psi(k) = \left(\Psi_1(k), \ldots, \Psi_n(k)\right)^T$, $k = 1, \ldots, N$, *такие, что*:

1) *при каждом* $k = 0, 1, \ldots, N-1$ *гамильтониан* $H\left(k, \Psi(k+1), x^*(k), u\right)$ *достигает максимума по управлению, т.е.*

$$H\left(k, \Psi(k+1), x^*(k), u^*(k)\right) = \max_{u \in U(k)} H\left(k, \Psi(k+1), x^*(k), u\right), \qquad (6)$$

где $H(k, \Psi, x, u) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i\, f_i(k, x, u) - f^0(k, x, u)$;

2) *функции* $x^*(\cdot), \Psi(\cdot)$ *удовлетворяют системе канонических уравнений*

$$x_j^*(k+1) = f_j\left(k, x^*(k), u^*(k)\right), \qquad x_j^*(0) = x_{0j}, \qquad j = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\Psi_j(k) = \frac{\partial H\left(k, \Psi(k+1), x^*(k), u^*(k)\right)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad k = 1, \ldots, N-1, \qquad (7)$$

$$\Gamma_i\left(x^*(N)\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, l;$$

3) *выполняется* ***условие трансверсальности***

$$\delta F\left(x^*(N)\right)+\sum_{j=1}^{n}\Psi_j(N)\,\delta x_j(N)=0 \tag{8}$$

при любых $\delta x_j(N)$, *удовлетворяющих системе*

$$\Gamma_i\left(x^*(N)\right)=0,\quad i=1,\ldots,l,$$

$$\delta\Gamma_i\left(x^*(N)\right)=0,\quad i=1,\ldots,l;$$

где вариации определяются следующим образом:

$$\delta F\left(x^*(N)\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F\left(x^*(N)\right)}{\partial x_j}\,\delta x_j(N),$$

$$\delta\Gamma_i\left(x^*(N)\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Gamma_i\left(x^*(N)\right)}{\partial x_j}\,\delta x_j(N),\quad i=1,\ldots,l.$$

З а м е ч а н и я

1. Если в решаемой задаче ограничения (3) на правом конце траектории отсутствуют, то условие трансверсальности (8)

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial F\left(x^*(N)\right)}{\partial x_j}+\Psi_j(N)\right]\delta x_j(N)=0$$

в силу произвольности вариации $\delta x_j(N)$ приобретает вид

$$\Psi_j(N)=-\frac{\partial F\left(x^*(N)\right)}{\partial x_j},\qquad j=1,\ldots,n. \tag{9}$$

2. Если в функционале (4) $F\left(x(N)\right)\equiv 0$ и отсутствуют ограничения (3), то условие (8) в силу произвольности вариации $\delta x_j(N)$ принимает форму

$$\Psi_j(N)=0,\qquad j=1,\ldots,n. \tag{10}$$

3. Если $U(k)=R^q$, то для нахождения максимума в (6) может быть использовано необходимое условие безусловного экстремума

$$\frac{\partial H\left(k,\Psi(k+1),x^*(k),u\right)}{\partial u_i}=0,\qquad k=0,1,\ldots,N-1,\qquad i=1,\ldots,q \tag{11}$$

с проверкой соответствующих достаточных условий.

4. Утверждение справедливо, если множество $U(k)$ выпукло, а гамильтониан является вогнутой функцией по u. Дискретный принцип максимума применим для систем с выпуклой вектограммой.

Вектограммой управляемой системы (1) в точке $(k, x(k))$ называется множество $f(k, x, U(k))$ значений функций $f(k, x, u)$ при фиксированных k и x, когда управление u принимает все возможные значения из $U(k)$:

$$f(k, x, U(k)) = \bigcup_{u \in U(k)} f(k, x, u).$$

В общем случае дискретных систем необходимые условия экстремума не совпадают с дискретным принципом максимума. По сравнению с приведенным утверждением в них условие (6) заменяется условием:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial H\left(k, \Psi(k+1), x^*(k), u^*(k)\right)}{\partial u_i} \left[u_i - u_i^*(k)\right] \le 0, \qquad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

для всех $u \in U(k)$, т.е. гамильтониан достигает в точке $u^*(k)$ либо наибольшего значения на множестве $U(k)$, либо $u^*(k)$ является стационарной точкой (локальным минимумом или максимумом, седловой точкой).

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

1. Составить гамильтониан

$$H(k,\Psi,x,u)=\sum_{i=1}^{n}\Psi_i\ f_i(k,x,u)-f^0(k,x,u).$$

2. Найти структуру оптимального управления из условия максимума гамильтониана по управлению:

$$H\left(k,\Psi(k+1),x^*(k),u^*(k)\right)=\max_{u\in U(k)}H\left(k,\Psi(k+1),x^*(k),u\right).$$

3. Составить систему канонических уравнений с заданными в задаче условиями:

$$x_j^*(k+1)=f_j\left(k,x^*(k),u^*(k)\right),\qquad x_j^*(0)=x_{0j},\qquad j=1,\dots,n,\qquad k=0,1,\dots,N-1,$$

$$\Psi_j(k)=\frac{\partial H\left(k,\Psi(k+1),x^*(k),u^*(k)\right)}{\partial x_j},\qquad j=1,\dots,n,\qquad k=1,\dots,N-1, \tag{12}$$

$$\Gamma_i\left(x^*(N)\right)=0,\qquad i=1,\dots,l.$$

4. Из условия трансверсальности (8) или их следствий (9), (10) в частных случаях постановки задачи определить недостающие краевые условия для уравнений системы (12).

5. Решить полученную краевую задачу. В итоге определяется пара $\left(x^*(\cdot),u^*(\cdot)\right)$ на которой может достигаться минимум функционала (4).

Пример 1

Даны модель объекта управления

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad x(0) = 2, \qquad k = 0,1,$$

где $x \in R$; $u \in R$, и функционал

$$I = \sum_{k=0}^{1} \left[u^2(k) + x^2(k) \right] \to \min .$$

Требуется найти оптимальную пару $\left(x^*(\cdot), u^*(\cdot)\right)$, на которой достигается минимум функционала.

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем: $f(k, x, u) = x + u$, $f^0(k, x, u) = u^2 + x^2$, $F(x) \equiv 0$, $U(k) = R$, $N = 2$.
Решается задача Лагранжа.

1. Составляем гамильтониан

$$H\left(k, \Psi, x, u\right) = \Psi \cdot \left(x + u\right) - \left(u^2 + x^2\right).$$

2. Находим максимум гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия безусловного экстремума (11):

$$\frac{\partial H\left(k, \Psi(k+1), x(k), u(k)\right)}{\partial u} = \Psi(k+1) - 2u(k) = 0.$$

Отсюда $u^*(k) = \dfrac{\Psi(k+1)}{2}$. Найденное управление обеспечивает максимум функции $H\left(k, \Psi(k+1), x(k), u\right)$ по управлению, так как удовлетворяются достаточные условия экстремума:

$$\frac{\partial^2 H\left(k, \Psi(k+1), x(k), u(k)\right)}{\partial u^2} = -2 < 0.$$

3, 4. С учетом (10) составляем краевую задачу (12):

$$x^*(k+1) = x^*(k) + \frac{\Psi(k+1)}{2}, \qquad x^*(0) = 2,$$

$$\Psi(k) = \Psi(k+1) - 2x^*(k), \qquad \Psi(2) = 0.$$

5. Решение краевой задачи:

$x^*(0) = 2,\ u^*(0) = -1,$

$x^*(1) = 1,\ u^*(1) = 0,$

$\Psi(1) = -2,$

$x^*(2) = 1,\ \Psi(2) = 0$

дает искомую пару: оптимальную траекторию $x^*(\cdot) = \{2, 1, 1\}$ и оптимальное управление $u^*(\cdot) = \{-1, 0\}$.

Пример 2

Даны модель объекта управления

$$x_1(k+1) = x_1(k) + u(k),$$

$$x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k), \qquad k = 0{,}1,$$

с начальными условиями $x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 1,$ и функционал

$$I = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\left[u^2(k) + x_1^2(k) + x_2^2(k)\right] \to \min .$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $x^*(\cdot)$.

Здесь $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$, на управление ограничений не наложено,

$$f^0(k,x,u) = \frac{1}{2}\left[u^2 + x_1^2 + x_2^2\right], \quad F(x) \equiv 0, \quad N = 2,$$

$$f_1(k,x,u) = x_1 + u, \quad f_2(k,x,u) = 2x_1 + x_2,$$

правый конец траектории свободен. Решается задача Лагранжа.

1. Составляем гамильтониан

$$H\left(k,\Psi,x,u\right)=\Psi_1\left[x_1+u\right]+\Psi_2\left[2x_1+x_2\right]-\frac{1}{2}\left[\ u^2+x_1^2+x_2^2\ \right].$$

2. Находим максимум гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial H\left(k,\Psi\left(k+1\right),x\left(k\right),u\left(k\right)\right)}{\partial u}=\Psi_1\left(k+1\right)-u\left(k\right)=0.$$

Отсюда $u^*(k)=\Psi_1(k+1)$. При этом

$$\frac{\partial^2 H\left(k,\Psi\left(k+1\right),x\left(k\right),u\left(k\right)\right)}{\partial u^2}=-1<0.$$

3, 4. С учетом (10) составляем краевую задачу (12):

$$x_1^*(k+1) = x_1^*(k) + \Psi_1(k+1), \qquad x_1^*(0) = 2, \qquad k = 0,1,$$

$$x_2^*(k+1) = 2x_1^*(k) + x_2^*(k), \qquad x_2^*(0) = 1, \qquad k = 0,1,$$

$$\Psi_1(k) = \Psi_1(k+1) + 2\Psi_2(k+1) - x_1^*(k), \qquad \Psi_1(2) = 0, \qquad k = 1,$$

$$\Psi_2(k) = \Psi_2(k+1) - x_2^*(k), \qquad \Psi_2(2) = 0, \qquad k = 1.$$

5. Решение краевой задачи:

$$x_1^*(0) = 2, \;\; x_2^*(0) = 1, \;\; u^*(0) = -1, \quad x_1^*(1) = 1, \;\; x_2^*(1) = 5, \; u^*(1) = 0,$$

$$\Psi_1(1) = -1, \quad \Psi_2(1) = -5; \quad x_1^*(2) = 1, \;\; x_2^*(2) = 7, \quad \Psi_1(2) = 0, \quad \Psi_2(2) = 0$$

дает искомую пару: оптимальную траекторию $x_1^*(\cdot) = \{2, 1, 1\}, \quad x_2^*(\cdot) = \{1, 5, 7\}$ и оптимальное управление $u^*(\cdot) = \{-1, 0\}$.

Пример 3

Даны модель объекта управления

$$x_1(k+1) = x_1(k) + u(k),$$

$$x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k), \quad k = 0{,}1,$$

с начальными условиями $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, и функционал

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} \left[u^2(k) + x_1^2(k) + x_2^2(k) \right] + x_1(2) \to \min .$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $x^*(\cdot)$.

Здесь $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$, на управление ограничений не наложено,

$$f^0(k,x,u) = \frac{1}{2}\left[u^2 + x_1^2 + x_2^2 \right], \quad F(x) = x_1, \quad N = 2,$$

$$f_1(k,x,u) = x_1 + u, \quad f_2(k,x,u) = 2x_1 + x_2,$$

правый конец траектории свободен. Решается задача Больца.

1. Гамильтониан имеет вид:

$$H\left(k,\Psi,x,u\right)=\Psi_1\left[x_1+u\right]+\Psi_2\left[2x_1+x_2\right]-\frac{1}{2}\left[u^2+x_1^2+x_2^2\ \right].$$

2. Структура оптимального управления: $u^*(k)=\Psi_1(k+1)$.

3, 4. С учетом (9) составляем краевую задачу (12):

$$x_1^*(k+1)=x_1^*(k)+\Psi_1(k+1),\qquad x_1^*(0)=2,$$

$$x_2^*(k+1)=2x_1^*(k)+x_2^*(k),\qquad x_2^*(0)=1,$$

$$\Psi_1(k)=\Psi_1(k+1)+2\Psi_2(k+1)-x_1^*(k),\qquad \Psi_1(2)=-1,$$

$$\Psi_2(k)=\Psi_2(k+1)-x_2^*(k),\qquad \Psi_2(2)=0.$$

5. Решение краевой задачи:

$$x_1^*(0)=2;\ \ x_2^*(0)=1;\ \ u^*(0)=-\frac{3}{2};\ \ x_1^*(1)=0{,}5;\ \ x_2^*(1)=5;\ \ u^*(1)=-1;$$

$$\Psi_1(1)=-1{,}5;\ \ \Psi_2(1)=-5;\ \ x_1^*(2)=-0{,}5;\ \ x_2^*(2)=6;\ \ \Psi_1(2)=-1,\ \ \Psi_2(2)=0$$

дает искомую пару: оптимальную траекторию $x_1^*(\cdot)=\{2;0{,}5;-0{,}5\}$, $x_2^*(\cdot)=\{1,5,6\}$ и оптимальное управление $u^*(\cdot)=\left\{-\frac{3}{2};-1\right\}$.

Пример 4

Даны модель объекта управления

$$x_1(k+1) = x_1(k) + u(k), \qquad |u| \le 1,$$

$$x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k), \qquad k = 0{,}1,$$

с начальными условиями $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, и функционал

$$I = x_1(2) + x_2(2) \to \min .$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $x^*(\cdot)$.

Здесь $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$, управление входит в правую часть разностного уравнения линейно и ограничено по модулю:

$$|u| \le 1,\ u \in U(k) = [-1, 1],\ \ f^0(k, x, u) \equiv 0,$$
$$F(x) = x_1 + x_2,\ \ N = 2,\ \ f_1(k, x, u) = x_1 + u,\ \ f_2(k, x, u) = 2x_1 + x_2,$$

правый конец траектории свободен. Решается задача Майера.

1. Составляем гамильтониан: $H(k,\Psi,x,u)=\Psi_1\left[x_1+u\right]+\Psi_2\left[2x_1+x_2\right]$.

2. Так как имеются ограничения на управление, находим условный максимум гамильтониана по управлению. В данной задаче гамильтониан линеен по u на заданном отрезке изменения управления $[-1,1]$, поэтому структура оптимального управления имеет вид:

$$u^*(k)=\arg\max_{|u|\le 1} H\left(k,\Psi(k+1),x(k),u\right)=\operatorname{sign}\Psi_1(k+1).$$

3,4. С учетом (9) составляем краевую задачу (12):

$$\begin{aligned}
&x_1^*(k+1)=x_1^*(k)+\operatorname{sign}\Psi_1(k+1), && x_1^*(0)=2,\\
&x_2^*(k+1)=2x_1^*(k)+x_2^*(k), && x_2^*(0)=1,\\
&\Psi_1(k)=\Psi_1(k+1)+2\Psi_2(k+1), && \Psi_1(2)=-1,\\
&\Psi_2(k)=\Psi_2(k+1), && \Psi_2(2)=-1.
\end{aligned}$$

5. Решаем краевую задачу. Решение

$$x_1^*(0)=2,\quad x_2^*(0)=1,\quad u^*(0)=-1;\quad x_1^*(1)=1,\quad x_2^*(1)=5,\quad u^*(1)=-1,$$

$$\Psi_1(1)=-3,\quad \Psi_2(1)=-1;\quad x_1^*(2)=0,\quad x_2^*(2)=7,\quad \Psi_1(2)=-1,\quad \Psi_2(2)=-1$$

дает искомую пару: оптимальную траекторию $x_1^*(\cdot)=\{2,1,0\}$, $x_2^*(\cdot)=\{1,5,7\}$ и оптимальное управление $u^*(\cdot)=\{-1,-1\}$.

Пример 5

Даны модель объекта управления с начальными условиями

$$x_1(k+1) = x_1(k) + u(k), \qquad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 1,$$
$$x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k), \qquad |u| \le 1, \quad k = 0,1,$$

и функционал $I = \frac{1}{2}\left[x_1^2(2) + x_2^2(2)\right] \to \min$.

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $x^*(\cdot)$.

Здесь $x = (x_1, x_2)^T \in R^2$, управление входит в правую часть разностного уравнения линейно и ограничено по модулю:

$$|u| \le 1, \quad u \in U(k) = [-1, 1], \quad f^0(k, x, u) \equiv 0,$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2\right], \quad N = 2, \quad f_1(k, x, u) = x_1 + u, \quad f_2(k, x, u) = 2x_1 + x_2,$$

правый конец траектории свободен. Решается задача Майера.

1. Составляем гамильтониан:

$$H\left(k, \Psi, x, u\right) = \Psi_1 \left[x_1 + u \right] + \Psi_2 \left[2x_1 + x_2 \right].$$

2. Находим структуру оптимального управления:

$$u^*\left(k\right) = \arg \max_{|u| \le 1} H\left(k, \Psi\left(k+1\right), x\left(k\right), u\right) = \operatorname{sign} \Psi_1\left(k+1\right).$$

3, 4. С учетом (9) составляем краевую задачу (12):

$$\begin{aligned}
&x_1^*\left(k+1\right) = x_1^*\left(k\right) + \operatorname{sign} \Psi_1\left(k+1\right), && x_1^*\left(0\right) = 3,\\
&x_2^*\left(k+1\right) = 2x_1^*\left(k\right) + x_2^*\left(k\right), && x_2^*\left(0\right) = 1,\\
&\Psi_1\left(k\right) = \Psi_1\left(k+1\right) + 2\Psi_2\left(k+1\right), && \Psi_1\left(2\right) = -x_1^*\left(2\right),\\
&\Psi_2\left(k\right) = \Psi_2\left(k+1\right), && \Psi_2\left(2\right) = -x_2^*\left(2\right).
\end{aligned}$$

5. Решаем краевую задачу. Вычисляем $x_1^*(2)$, $x_2^*(2)$:

$$x_1^*(2) = x_1^*(0) + \mathrm{sign}\left[-x_1^*(2) - 2x_2^*(2)\right] + \mathrm{sign}\left[-x_1^*(2)\right],$$
$$x_2^*(2) = 4x_1^*(0) + x_2^*(0) + 2\,\mathrm{sign}\left[-x_1^*(2) - 2x_2^*(2)\right].$$

Подставляя начальные условия, заключаем, что $x_1^*(2) > 0$ и $x_2^*(2) > 0$.

Отсюда получаем

$$u^*(0) = \mathrm{sign}\left[-x_1^*(2) - 2x_2^*(2)\right] = -1, \quad u^*(1) = \mathrm{sign}\left[-x_1^*(2)\right] = -1,$$

$$x_1^*(0) = 3,\ x_2^*(0) = 1, \quad u^*(0) = -1; \quad x_1^*(1) = 2, \quad x_2^*(1) = 7, \quad u^*(1) = -1,$$

$$\Psi_1(1) = -23, \quad \Psi_2(1) = -11; \qquad x_1^*(2) = 1, \quad x_2^*(2) = 11, \ \Psi_1(2) = -1, \quad \Psi_2(2) = -11.$$

Искомая пара: оптимальная траектория $x_1^*(\cdot) = \{3, 2, 1\}$, $x_2^*(\cdot) = \{1, 7, 11\}$ и оптимальное управление $u^*(\cdot) = \{-1, -1\}$.