Лекция 11
Комплексные числа

Летучка
Пишем только ответы

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа

2. Что такое мнимая единица?

3. Формула Муавра

4. Показательная форма записи комплексного числа

5. Как найти модуль комплексного числа?

Летучка
Пишем только ответы на вопросы.

6. Как найти аргумент комплексного числа, если число лежит в IV четверти ?

7. Чему равен $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$?

8. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

9. Формула умножения комплексных чисел в тригонометрической форме

10. Формула для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа

Дом. задание. $(z+1)^4 - 16 = 0;$ РЕШЕНИЕ:

$(z+1)^4 = 16$ обозначим $z + 1 = t \Rightarrow z = t - 1$

$t^4 = 16 \Leftrightarrow t = \sqrt[4]{16}$

представим 16 в тригонометрической форме :

$$16 = \left| \begin{matrix} x = 16 & |z| = \sqrt{16^2 + 0^2} = 16 \\ y = 0 & \varphi = 0 \end{matrix} \right| = 16 \cdot (\cos 0 + i \sin 0);$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{4} \right), \qquad k = 0, 1, 2, 3;$$

$k = 0; t_1 = 2 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 2(1 + i \cdot 0) = 2; z_1 = 2 - 1 = 1;$

$|z|$ $2(0 + i \cdot 1) = 2i; z_2 = 2i - 1;$

$k = 2; t_3 = 2 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2; z_3 = -2 - 1 = -3;$

$k = 3; t_4 = 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 2\big(0 + i \cdot (-1)\big) = -2i; z_4 = -2i - 1;$

ОТВЕТ: $1; -3; -1 \pm 2i;$

типовой вариант самостоятельной работы

Вычислить
:

1) $\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{11}}{(i+1)^{6}}$

2) все значения $\sqrt[3]{\dfrac{i}{8}}$

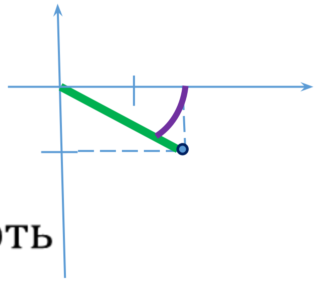
Вычисления производить в тригонометрической или показательной форме,
ответ записать в алгебраической форме.

Вычисления произведем в **показательной** форме, ответ запишем в **алгебраической** форме:

$$\frac{(\sqrt{3}-i)^{11}}{(i+1)^{6}} \quad 1)$$

представим в **показательной** форме :

$\sqrt{3}\approx 1,7$ $\quad 0 \quad$ Imz $\quad \varphi \quad$ Rez $\quad -i$



IV четверть

$x =$

$\sqrt{3}-1 =$

$y =$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

$$= 2\cdot e^{-\frac{\pi}{6}i};$$

$= (z+1)^4 = 16 \quad t-1$

$= \quad |\,z\,|$

$$\frac{2^{11}e^{-\frac{11\pi}{6}i}}{(\sqrt{2})^6 e^{\frac{6\pi}{4}i}} = \frac{2^{11}e^{-i\frac{11\pi}{6}}}{2^3 e^{i\frac{3\pi}{2}}} = 2^{11-3}e^{-i\frac{11\pi}{6}-i\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= 2^8 e^{-i\frac{20\pi}{6}} = 2^8\left(\cos\left(\frac{-10\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-10\pi}{3}\right)\right) =$$

$\frac{-10\pi}{3} = \quad 2i-1; \quad 2-1=1; \quad -2-1=-3;$

$$= 2^8\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^8\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2^8}{2}+\frac{2^8}{2}i\sqrt{3} = \quad 1; -3; -1\pm 2i;$$

ОТВЕТ: $-2i-1;$

Вычисления произведем в ***тригонометрической*** форме, ответ запишем в **алгебраической** форме:

$$1)\ \frac{(\sqrt{3}-i)^{11}}{(i+1)^6} =$$

РЕШЕНИЕ:

представим $\sqrt{3}-i$ в ***тригонометрической*** форме :

$$\sqrt{3}-i = \left|\begin{array}{l} |z| = 2 \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} \end{array}\right| = 2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right);$$

представим $i+1$ в ***тригонометрической*** форме: $i+1 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \frac{\left(2\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^{11}}{\left(\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^6} = \frac{(2)^{11}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{11}}{\left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^6} =$$

по формуле Муавра:

$$= \frac{(2)^{11}\left(\cos(-\frac{11\pi}{6}) + i\sin(-\frac{11\pi}{6})\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4}\right)} = \frac{2^{11}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\right)}{2^3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2^{11}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\right)}{2^{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)} =$$

$$= 2^{11-3}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 2^{8}\left(\cos\left(\frac{-20\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-20\pi}{6}\right)\right) =$$

далее как
на слайде № 6

$$= \quad 2^{8} \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{8} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2^{8}}{2} + \frac{2^{8}}{2} i\sqrt{3} = -2^{7} + 2^{7}\sqrt{3}i;$$

ОТВЕТ: $-128 + 128\sqrt{3}i.$

Вычислить: 2) все значения $\sqrt[3]{\frac{i}{8}}$, ответ записать в **алгебраической** форме.

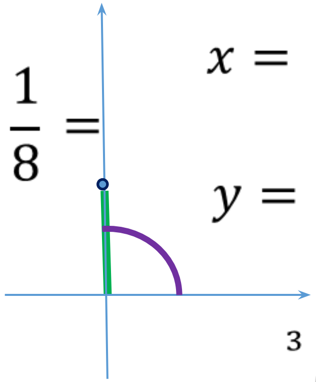
РЕШЕНИЕ: представим в ***тригонометрической*** форме:

$\mathrm{Im}z$

$\frac{i}{8}$

φ

0 $\mathrm{Re}z$



$x = 0$, $y = \frac{1}{8}$

$$|z| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{8}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt[3]{\frac{i}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right), k = 0,1,2;$$

$$k = 0; z_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4};$$

$$k = 1; z_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4};$$

$$k = 2; z_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (0 + i(-1)) = -\frac{i}{2};$$

ОТВЕТ: $\pm\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4};\ -\frac{i}{2}$