Раздел 2. Корни, степени, логарифмы.

Тема 2.1 Корни и степени

Лекция №3

Корни натуральной степени из числа и их свойства.
Степени с рациональными показателями и их свойства

Степенью числа а с целым показателем n (n>1) называется произведение n множителей, равных а.

$$a^n = \underbrace{\mathrm{a} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{a} \cdot \ldots \cdot \mathrm{a}}_{\text{n раз}}$$

Пример:

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Квадратным корнем из числа **а** называется такое число, квадрат которого равен **а**

Корнем n-й степени из числа **а** называется такое число, n-я степень которого равна **а**.

Т.е корень n-й степени из числа а – это решение уравнения $x^n = \mathrm{a}$

Арифметическим корнем n-й степени из числа а называют неотрицательное число, n-я степень которого равна а.

Обозначение: $\sqrt[n]{a}$

Пример:

Найдите значение $\sqrt[3]{8}$

$2^3 = 8$ => $\sqrt[3]{8} = 2$

Найдите значение $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$

$3^4 = 81, 2^4$=16 => $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2}$

Если степень чётная, то уравнение $x^n = а$ будет иметь два корня

Пример:

Найдите корни уравнения $x^4 = 81$

$x^4 = \sqrt[4]{81}$

$3^4 = 81$ => $\sqrt[4]{81} = \pm 3$

При нечётном *n* существует корень n-й из любого числа *a*, при том только один

Для корней <u>нечетной</u> степени справедливо равенство

$$\sqrt[n]{-a} = - \sqrt[n]{a}$$

Пример: $\sqrt[5]{-71} = -\sqrt[5]{71}$

Замечание 1. $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|\text{, если } n \text{ четно;} \\ x\text{, если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$

Замечание 2. Будем считать, что корень первой степени из числа *a* равен a. Корень второй степени из числа называют квадратным корнем, а показатель 2 опускают. Корень третьей степени называют кубическим корнем.

1) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ — разность квадратов;

2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы;

3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности;

4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы;

5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;

6) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сумма кубов;

7) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — разность кубов.

Основные свойства корней

$$1)\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$2)\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$3)\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (k>0)$$

$$4)\ \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (k>0)$$

$$5)\ \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$

Степенью числа a>0 с рациональным показателем
r = $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное,
называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Т.е $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Пример:

$7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$ $\quad\quad$ $2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$

Свойства степеней

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

2) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

3) $(a^r)^s = a^{rs}$

4) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

5) $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$

6) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$