



# Raport I

**Wykonał:**

Daniil Reznikov

**Opiekun:**

dr hab. inż. Agnieszka Tomaszewska,  
prof. nadz. PG

**POLITECHNIKA GDAŃSKA**

**Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska**



## Spis treści

- 1. Idea pracy**
- 2. Analizowany implant**
- 3. Funkcja energii sprężystości**
- 4. Procedura w Wolfram Mathematica**
- 5. Procedura w Matlab**
- 6. Modelowanie Abaqus**
- 7. Literatura**

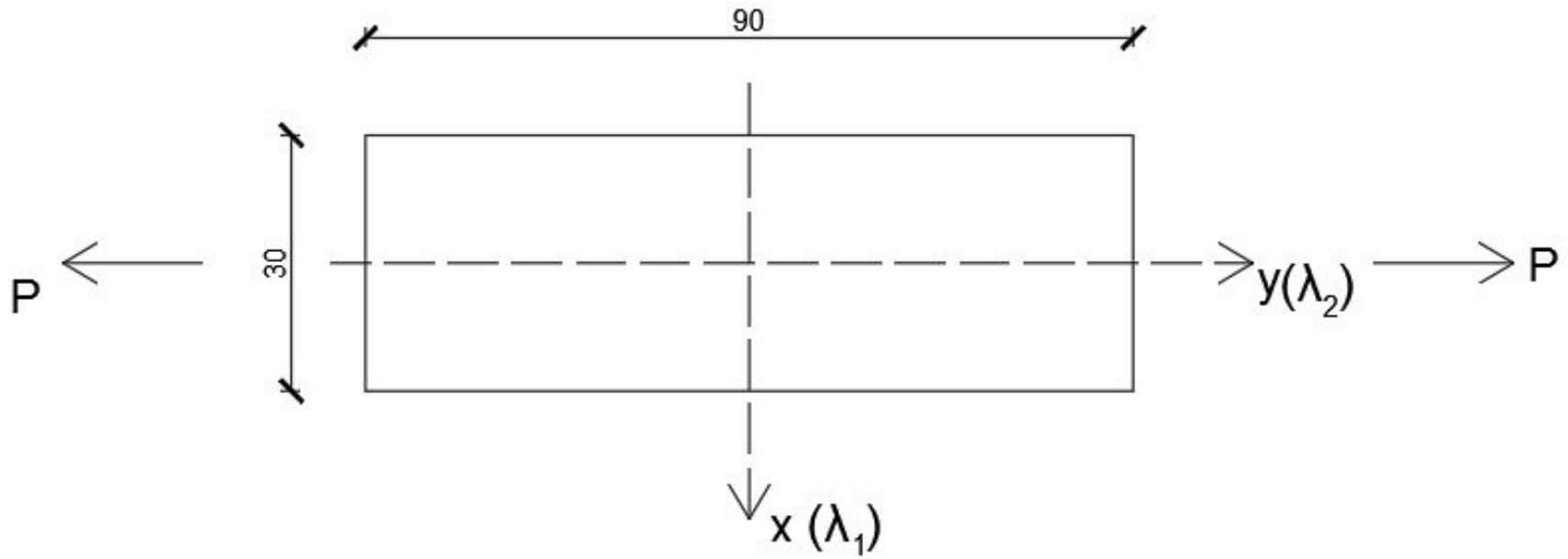


## Idea pracy

Zamodelowanie implantu (materiał hipersprężysty) w programie numerycznym jako model membranowy anizotropowy.



# Analizowany implant





## Funkcja energii sprężystości

Materiałem hipersprężystym nazywamy materiał, dla którego istnieje taka funkcja  $W$ , nazywana potencjałem sprężystym, przyjmująca wartości skalarne, a której argumentem jest miara deformacji materiału, że związek konstytutywny można zapisać w postaci:

$$\mathbf{T}_s = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}$$

Dodatkowo, można zapisać:

$$W(F) = W(C) = W(E)$$



## Funkcja energii sprężystości

Funkcja energii sprężystości:

$$U = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D} \left( \frac{(J^{el})^2 - 1}{2} - \ln J^{el} \right) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \exp \left[ k_2 \langle \bar{E}_\alpha \rangle^2 \right] - 1 \right\},$$

with

$$\bar{E}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \kappa (\bar{I}_1 - 3) + (1 - 3\kappa) (\bar{I}_{4(\alpha\alpha)} - 1),$$

Do zbudowania powyższej funkcji potrzebne następujące dane:

$\bar{I}_1(\bar{C})$  - niezmiennik I,

$\bar{I}_4(\bar{C})$  - niezmiennik IV,

$J^{el}$  - współczynnik związany z odkształceniami termicznymi.



## Funkcja energii sprężystości

Funkcja energii sprężystości:

$$U = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D} \left( \frac{(J^{el})^2 - 1}{2} - \ln J^{el} \right) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \exp \left[ k_2 \langle \bar{E}_\alpha \rangle^2 \right] - 1 \right\},$$

with

$$\bar{E}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \kappa (\bar{I}_1 - 3) + (1 - 3\kappa) (\bar{I}_{4(\alpha\alpha)} - 1),$$

Do zbudowania powyższej funkcji potrzebne następujące dane:

$C_{10}$  – parametr opisujący naprężenia ścinające,

$D$  – parametr związany z odkształceniami termicznymi,

$k_1$  – parametr opisujący naprężenia ( $k_1 > 0$ ),

$k_2$  – parametr bezwymiarowy ( $k_2 > 0$ ),

$k$  – parametr dyspersji (od 0 do 1/3, jeżeli 0 – anizotropia, jeżeli 1/3 – izotropia).



# Funkcja energii sprężystości

## Wyznaczenie danych – zmodyfikowany tensor deformacji

Badany materiał jest ściśliwy. Dla materiału ściśliwego przyjmujemy następujące zależności:

$$F = J^{\frac{1}{3}} \bar{F}$$

$$C = J^{\frac{2}{3}} \bar{C}$$

$$\bar{\lambda}_\alpha = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_\alpha$$

gdzie:

$\bar{\lambda}_\alpha$  - zmodyfikowane rozciągnięcia główne,

$\bar{F}$  - zmodyfikowany gradient deformacji,

$\bar{C}$  - zmodyfikowany tensor deformacji.

$\bar{C}$  i  $\bar{F}$  odpowiadają części, która jest związana z zachowaniem objętości podczas deformacji.





## Funkcja energii sprężystości

### Wyznaczenie danych – zmodyfikowany tensor deformacji

W swoim rozwiązaniu dla uproszczenia przyjąłem, że materiał jest nieściśliwy. Z tego wynika:

$$\det F = J = 1$$

$$\bar{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha$$

Uwzględniając powyższe założenia, ostateczna postać tensora deformacji jest następująca:

$$\bar{C} = C = U^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} \end{bmatrix}$$



# Funkcja energii sprężystości

## Niezmienniki

Niezmiennik  $\bar{I}_1(\bar{C})$  wygląda następująco:

$$\bar{I}_1(\bar{C}) = \text{tr} \left[ \bar{I}_1(\bar{C}) \right] = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}$$

Niezmiennik ten ma taką postać, bo materiał jest nieściśliwy (z badań doświadczalnych potrzebujemy rozciągnięcia tylko na kierunku podłużnym i poprzecznym).



# Funkcja energii sprężystości

## Niezmienniki

Natomiast  $\bar{I}_4(\bar{C})$  opisuje zachowanie właściwości rodziny włókien i jego współdziałanie z innymi składnikami materialnymi. Ogólna postać danego niezmiennika wygląda następująco (wektory  $\bar{a}_0$  opisują kierunki włókien):

$$\bar{I}_4(\bar{C}) = \bar{a}_0^{\text{W}} \bar{C} \bar{a}_0^{\text{W}}$$

W naszym przypadku dany niezmiennik ma następującą postać:

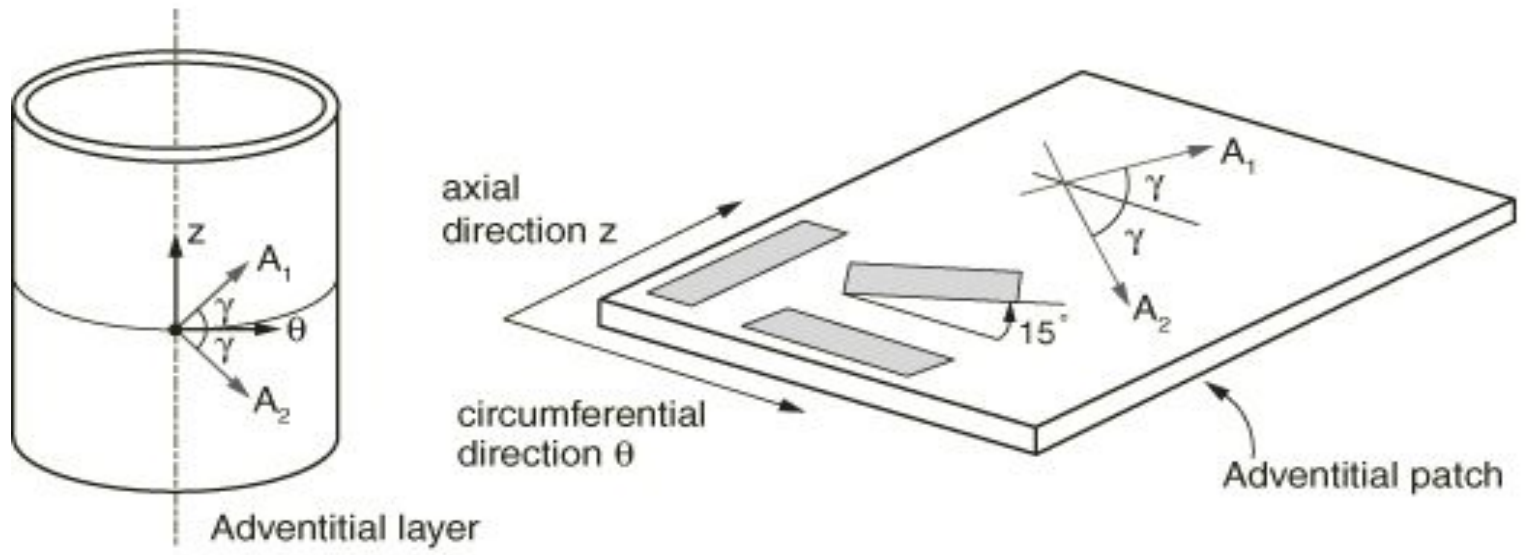
$$\bar{I}_4 = \lambda_2^2 \cos^2 \gamma + \lambda_1^2 \sin^2 \gamma$$

Ważne jest to, że mamy tutaj dodatkowy parametr  $\gamma$ .



# Funkcja energii sprężystości

## Niezmienniki





# Funkcja energii sprężystości

## Współczynnik związany z odkształceniami termicznymi

Wzór na  $J^{el}$  jest następujący (podany w Abaqusie):

$$J^{el} = \frac{J}{J^{th}}$$

Natomiast  $J^{th}$  ma postać (podana w Abaqusie):

$$J^{th} = (1 + \varepsilon_1^{th})(1 + \varepsilon_2^{th})(1 + \varepsilon_3^{th})$$

gdzie:

$\varepsilon^{th}$  - odkształcenie termiczne na kierunku głównym (w naszym przypadku zakładamy, że odkształcenia termiczne są równe 0)

Uwzględniając powyższe założenia ostateczna postać  $J^{el}$  jest następująca:

$$J^{el} = \frac{J}{(1 + \varepsilon_1^{th})(1 + \varepsilon_2^{th})(1 + \varepsilon_3^{th})} = \frac{J}{1} = J = 1$$



## Funkcja energii sprężystości

Ostatecznie mamy 6 niewiadomych parametrów:

$C_{10}$  – parametr opisujący naprężenia ścinające,

$D$  – parametr związany z odkształceniami termicznymi,

$k_1$  – parametr opisujący naprężenia ( $k_1 > 0$ ),

$k_2$  – parametr bezwymiarowy ( $k_2 > 0$ ),

$k$  – parametr dyspersji (od 0 do 1/3, jeżeli 0 – anizotropia, jeżeli 1/3 – izotropia),

$\gamma$  – kąt pomiędzy włóknem a osią.



## Procedura w Wolfram Mathematica

Funkcja energii sprężystości wygląda następująco:

$$\frac{\left( -1 + e^{k_2 \left( k \left( -3 + \lambda_x^2 + \frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + \lambda_y^2 \right) + (1-3k) \left( -1 + \sin^2[\phi] \lambda_x^2 + \cos^2[\phi] \lambda_y^2 \right) \right)^2} \right)^{k_1}}{2 k_2} + c_{10} \left( -3 + \lambda_x^2 + \frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + \lambda_y^2 \right)$$



## Procedura w Wolfram Mathematica

Kolejnym etapem jest obliczenie naprężeń. Żeby ich otrzymać został użyty następujący wzór :

$$\sigma_{\alpha} = J^{-1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_{\alpha}}$$

W naszym przypadku mamy tylko rozciąganie w kierunku podłużnym, więc powyższy wzór można przekształcić w następującą postać:

$$\sigma_2 = \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_2}$$





## Procedura w Wolfram Mathematica

Ostateczna postać naprężeń w programie Wolfram Mathematica wygląda następująco:

$$\lambda_y \left( C_{10} \left( -\frac{2}{\lambda_x^2 \lambda_y^3} + 2 \lambda_y \right) + e^{k_2 \left( -1 + (k + (1-3k) \sin^2[\phi]) \lambda_x^2 + \frac{k}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + (k + (1-3k) \cos^2[\phi]) \lambda_y^2 \right)^2} \right. \\ \left. k_1 \left( -\frac{2k}{\lambda_x^2 \lambda_y^3} + 2 (k + (1-3k) \cos^2[\phi]) \lambda_y \right) \left( -1 + (k + (1-3k) \sin^2[\phi]) \lambda_x^2 + \frac{k}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + (k + (1-3k) \cos^2[\phi]) \lambda_y^2 \right) \right)$$

Po zbudowaniu powyższego równania można zauważyć, że pozbyliśmy się parametru D.

Więc zostało nam 5 parametrów do wyznaczenia:  $C_{10}, k_1, k_2, k, \gamma$ .



## Procedura w Matlab

Do wyznaczenia parametrów została użyta funkcja *lsqnonlin*.

Zostały otrzymane następujące wartości parametrów:

$C_{10}$	$k_2$	$k_1$	$k$	$\gamma$
0.0126	0.0001	0.3644	0	0.2829

Do zbudowania powyższej funkcji potrzebne następujące dane:

$C_{10}$  – parametr opisujący naprężenia ścinające,

$\gamma$  – kąt początkowy,

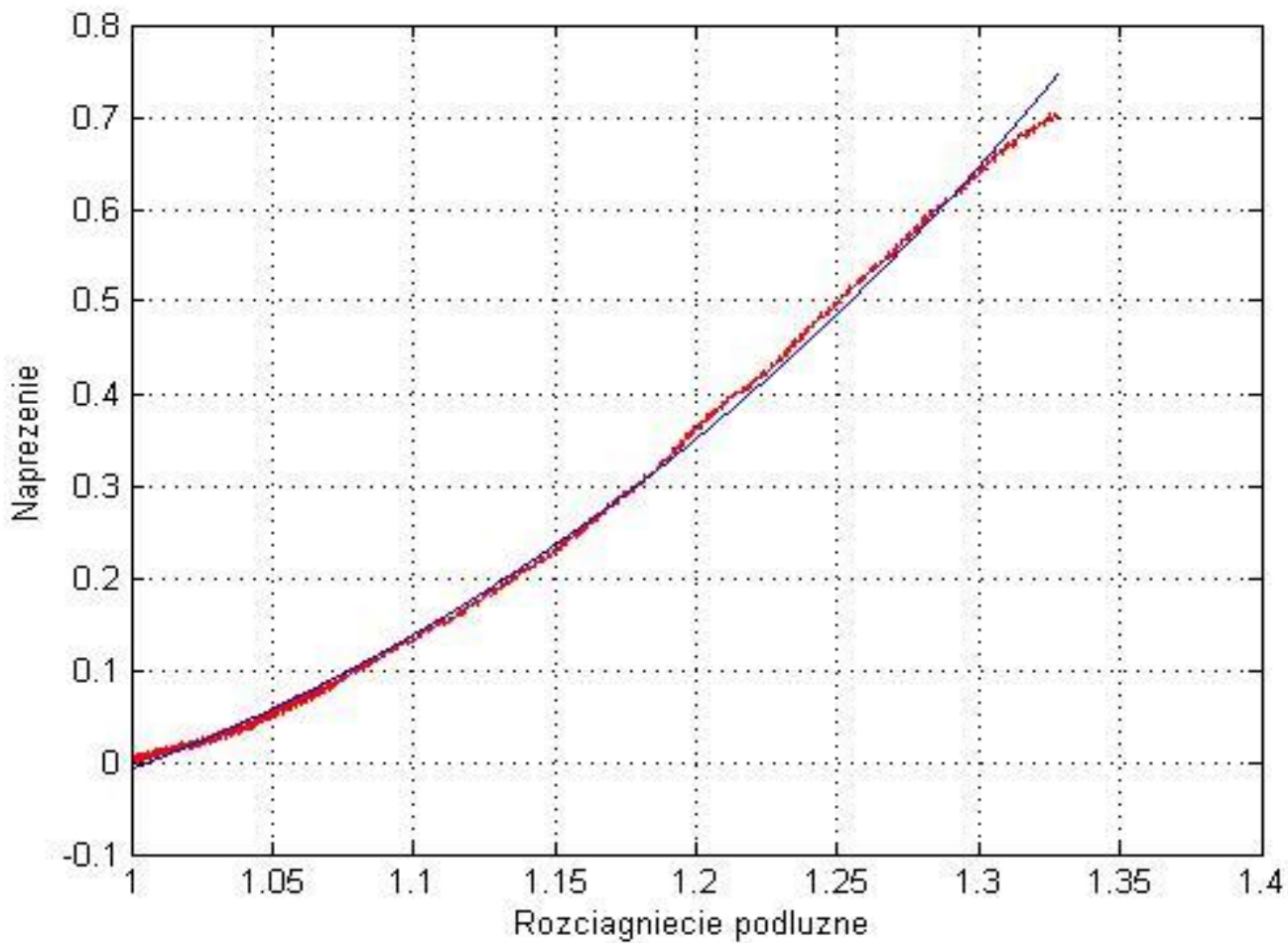
$k_1$  – parametr opisujący naprężenia ( $k_1 > 0$ ),

$k_2$  – parametr bezwymiarowy ( $k_2 > 0$ ),

$k$  – parametr dyspersji (od 0 do 1/3, jeżeli 0 – anizotropia, jeżeli 1/3 – izotropia).



# Procedura w Matlab

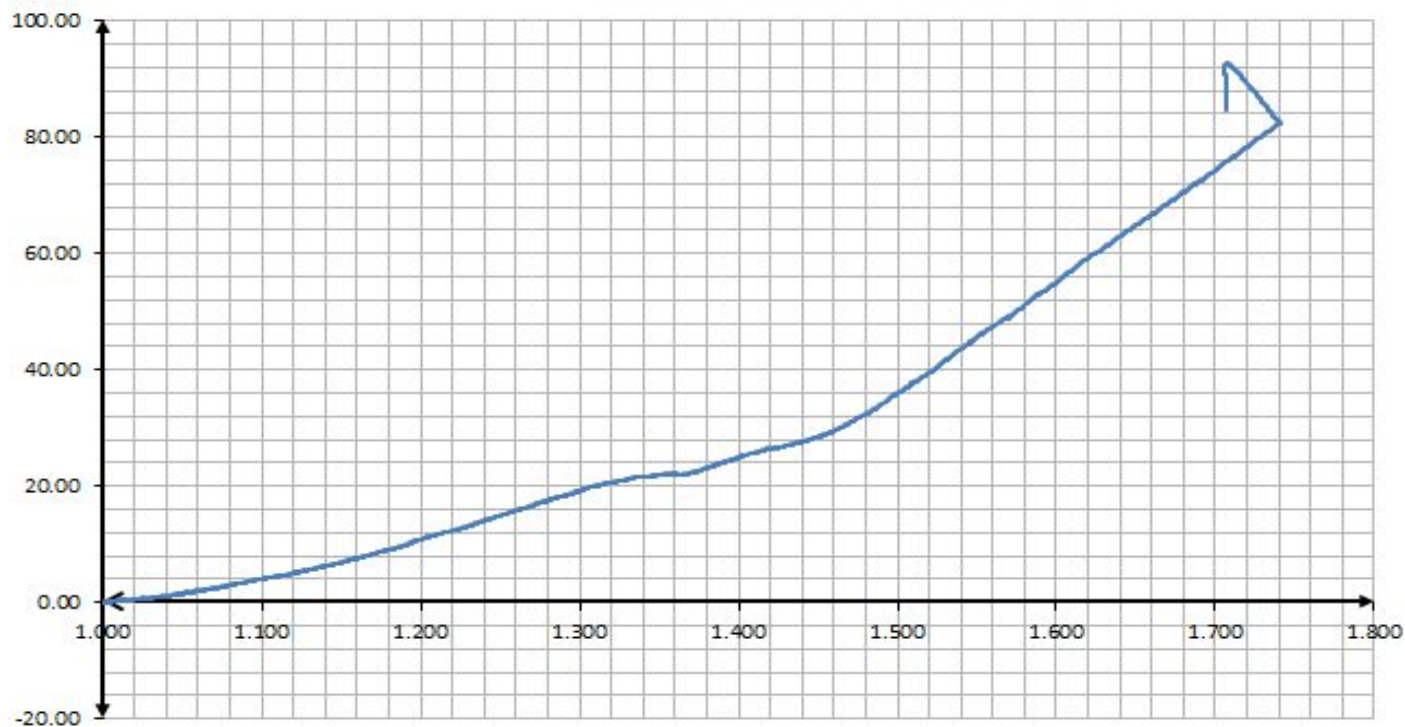




## Procedura w Matlab

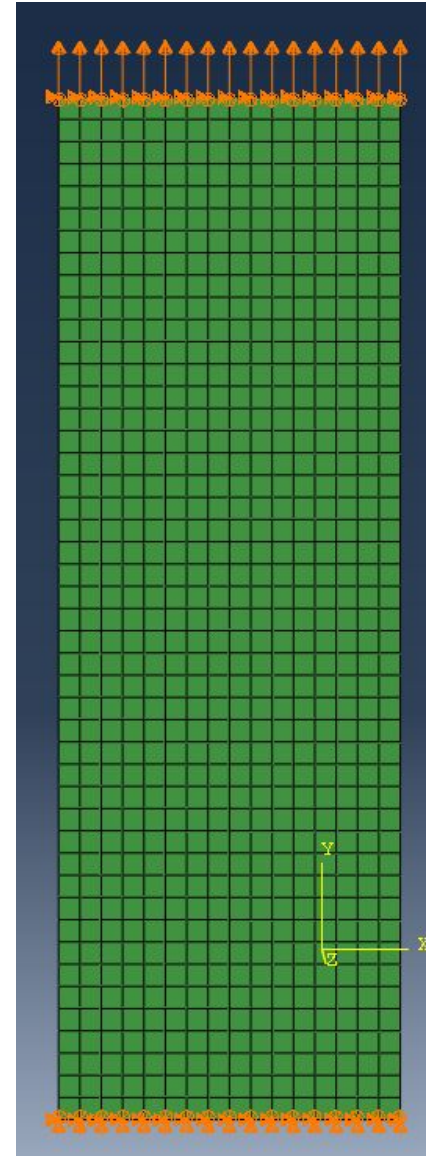
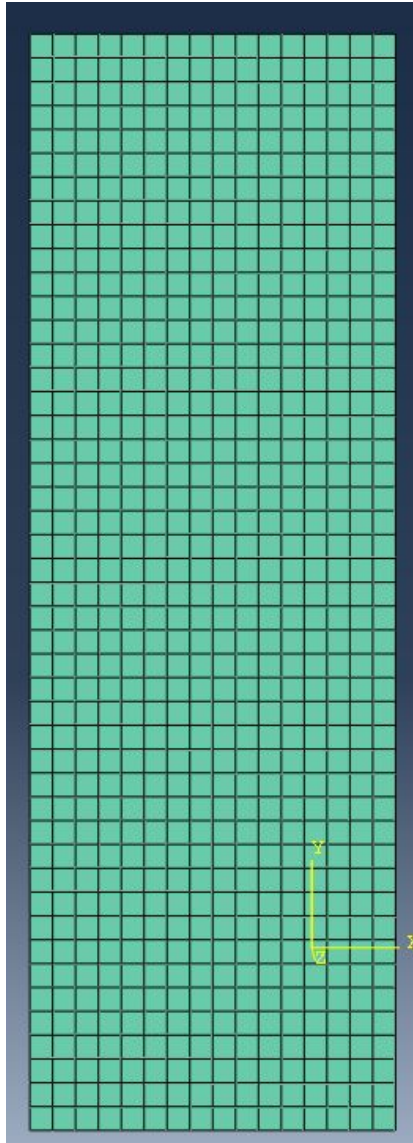
Parametry wyznaczone dla zakresu rozciągnięcia od 1 do 1,33. Widać z wykresu, że po wartości 1,33 jest mały spadek, dlatego moim zdaniem równanie, które było opisane wyżej nie jest w stanie obliczyć parametry dla zakresu całkowitego. Ten spadek na wykresie może być związany z tym, że próbka podczas badania jednoosiowego rozciągania zaczyna się zwijać.

**Siła - Rozciągnięcie podłużne**



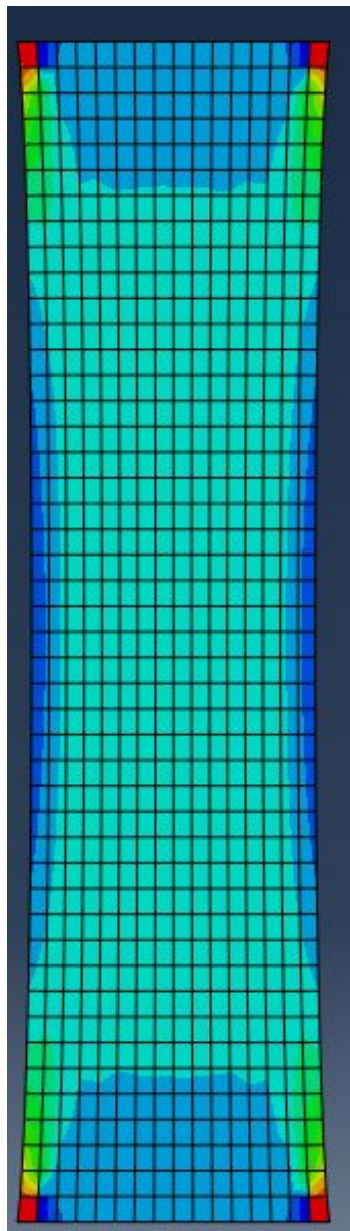


# Modelowanie Abaqus



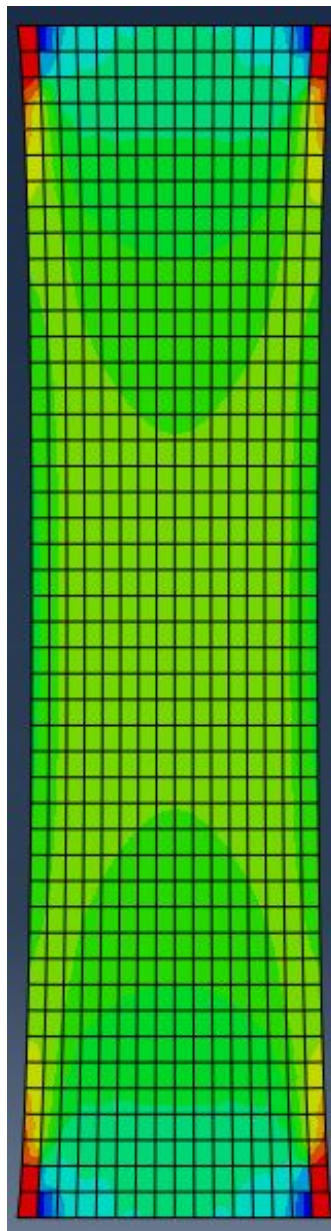


# Modelowanie Abaqus



S, S22  
(Avg: 75%)

+	7.456e-01
+	7.441e-01
+	7.426e-01
+	7.411e-01
+	7.397e-01
+	7.382e-01
+	7.367e-01
+	7.352e-01
+	7.338e-01
+	7.323e-01
+	7.308e-01
+	7.293e-01
+	7.279e-01

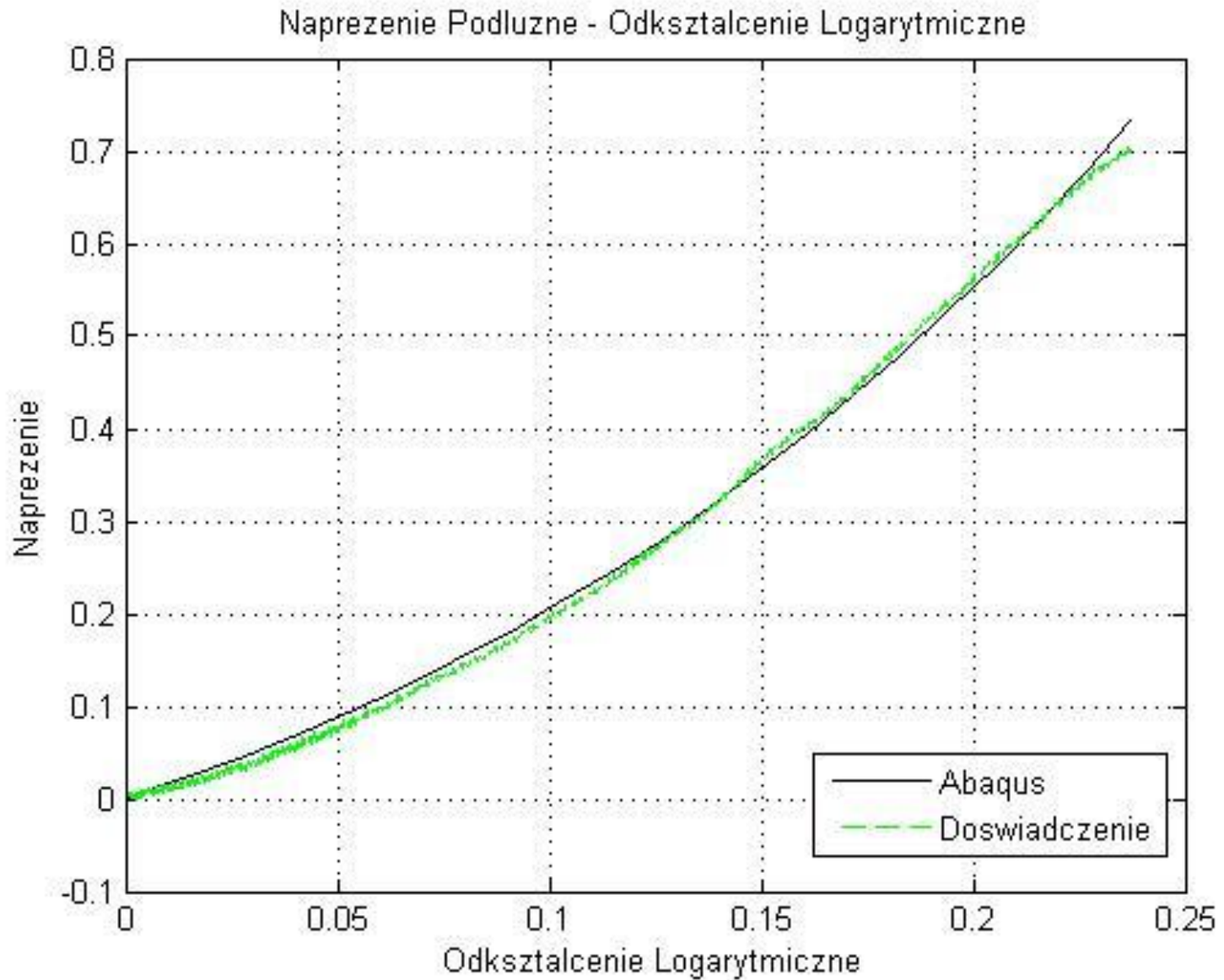


LE, LE22  
(Avg: 75%)

+	2.386e-01
+	2.383e-01
+	2.380e-01
+	2.378e-01
+	2.375e-01
+	2.372e-01
+	2.369e-01
+	2.366e-01
+	2.364e-01
+	2.361e-01
+	2.358e-01
+	2.355e-01
+	2.353e-01



# Modelowanie Abaqus





## Literatura

1. T. Christian Gasser, Ray W. Ogden and Gerhard A. Holzapfel: *Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations*
2. Gerhard A. Holzapfel, Gerhard Sommer, Christian T. Gasser, and Peter Regitnig: *Determination of layer-specific mechanical properties of human coronary arteries with nonatherosclerotic intimal thickening and related constitutive modeling*
3. Szeptyński P.: *Teoria sprężystości*
4. *Abaqus manual*
5. Gerhard A. Holzapfel: *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering.*



**DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ**



**POLITECHNIKA GDAŃSKA**  
**Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska**