Тема 1. Численные методы алгебры

Лекция 2. Прямые и итерационные численные методы решения СЛАУ

Цель: изучить систематизированную основу теоретических знаний по численным прямым и итерационным методам решения СЛАУ.

Учебные вопросы:

2.1. Метод исключения Гаусса.

2.2. Метод простой итерации.

2.3. Метод Зейделя.

2.4. Метод скалярной прогонки ([1], с. 26…28).

Литература к лекции 2:

[1], с. 16…34;

[2], с. 7…17; 19…29;

[3], с. 4…13.

2.1. Метод исключения Гаусса

<u>Дана СЛАУ:</u>

$$a11 \cdot x1 + a12 \cdot x2 + a13 \cdot x3 = b1,$$
$$a21 \cdot x1 + a22 \cdot x2 + a23 \cdot x3 = b2,$$
$$a31 \cdot x1 + a32 \cdot x2 + a33 \cdot x3 = b3.$$

Прямой ход:

Составим расширенную матрицу:

$$\begin{array}{ccc|c} x1 & x2 & x3 & b \\ \hline a11 & a12 & a13 & b1 \\ a21 & a22 & a23 & b2 \\ a31 & a32 & a33 & b3 \end{array}$$

матрица системы ***A***

<u>Первый шаг</u>

$$-a21/a11;$$
$$-a31/a11;$$
$$a11 \neq 0.$$

$$\left|\begin{array}{c|ccc} a11 & a12 & a13 & b1 \\ \hline 0 & a22^{(1)} & a23^{(1)} & b2^{(1)} \\ \hline 0 & a32^{(1)} & a33^{(1)} & b3^{(1)} \end{array}\right|$$

<u>Второй шаг</u>

$$-a32^{(1)} / a22^{(1)};$$

$$a22^{(1)} \neq 0.$$

$$\begin{array}{cccc} x1 & x2 & x3 & b \\ \hline \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} a11 & a12 & a13 & b1 \\ 0 & a22^{(1)} & a23^{(1)} & b2^{(1)} \\ 0 & 0 & a33^{(2)} & b3^{(2)} \end{array}\right|$$

Прямой ход закончен! Получили СЛАУ с треугольной матрицей!

Обратный ход:

$$a33^{(2)} \cdot x3 = b3^{(2)} \to x3 = b3^{(2)} / a33^{(2)};$$

$$a22^{(1)} \cdot x2 + a23^{(1)} \cdot x3 = b2^{(1)} \to x2 = (b2^{(1)} - a23^{(1)} \cdot x3) / a22^{(1)};$$

$$a11 \cdot x1 + a12 \cdot x2 + a13 \cdot x3 = b1 \to x1 = (b1 \ - a12 \cdot x2 - a13 \cdot x3) / a11.$$

Обратный ход закончен!

Заданная СЛАУ **решена методом исключения Гаусса!**

Замечание 1. Если все элементы какой-либо строки матрицы системы A в результате преобразования стали равными нулю, а правая часть b **не равна нулю**, то СЛАУ **несовместна**, поскольку не выполняются условия теоремы **Кронекера-Капелли**.

2.2. Метод простой итерации

Задана СЛАУ:

$$\begin{aligned}
&a11\cdot \underline{x1}+a12\cdot x2+\ldots+a1n\cdot xn=b1,\\
&a21\cdot x1+a22\cdot \underline{x2}+\ldots+a2n\cdot xn=b2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&an1\cdot x1+an2\cdot x2+\ldots+ann\,\underline{\cdot\, xn}=bn.
\end{aligned}\tag{3}$$

Эквивалентная СЛАУ:

$$\begin{aligned}
&x1=\beta1+\alpha11\cdot \underline{x1}+a12\cdot x2+\ldots+\alpha1n\cdot xn,\\
&x2=\beta2+\alpha21\cdot x1+a22\cdot \underline{x2}+\ldots+\alpha2n\cdot xn,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&xn=\beta n+\alpha n1\cdot x1+an2\cdot x2+\ldots+\alpha nn\cdot \underline{xn}.
\end{aligned}\tag{4}$$

$$x=\beta+\alpha\cdot x,\tag{5}$$

$$x = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \dots \\ xn \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta 1 \\ \beta 2 \\ \dots \\ \beta n \end{bmatrix}; \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \alpha 1n \\ \alpha 21 & \dots & \alpha 2n \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha n1 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\alpha ij = \begin{cases} \dfrac{-aij}{aii}, npu \quad i \neq j, \ i, j = \overline{1,n}, \\ 0, \quad npu \ \ i = j, \ i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{6}$$

Итерационная последовательность метода простой итерации

$$x^{(0)} = \beta,$$

$$x^{(1)} = \beta + \propto \cdot\, x^{(0)},$$

$$x^{(2)} = \beta + \propto \cdot\, x^{(1)}, \qquad (7)$$

. . . .

$$x^{(K+1)} = \beta + \propto \cdot\, x^{(K)},$$

$$K = 0,1,2,3,\ldots.$$

Условие остановки итерационного процесса:

$$\left\| x^{(K+1)} - x^{(K)} \right\| \leq \frac{1 - \|\propto\|}{\|\propto\|} \cdot \varepsilon.$$

2.3. Метод Зейделя

$$x1^{(K+1)} = \beta 1 + 0 \cdot x1^{(K)} + \alpha 12 \cdot x2^{(K)} + \ldots + \alpha 1n \cdot xn^{(K)},$$

$$x2^{(K+1)} = \beta 2 + \alpha 21 \cdot \underline{x1^{(K+1)}} + 0 \cdot x2^{(K)} + \ldots + \alpha 2n \cdot xn^{(K)},$$

$$x3^{(K+1)} = \beta 3 + \alpha 31 \cdot \underline{x1^{(K+1)}} + \alpha 32 \cdot \underline{x2^{(K+1)}} + 0 \cdot x3^{(K)} + \ldots + \alpha 3n \cdot xn^{(K)},$$

. . . .

$$x(n-1)^{(K+1)} = \beta(n-1) + \alpha(n-1),1 \cdot \underline{x1^{(K+1)}} + \alpha(n-1),2 \cdot \underline{x2^{(K+1)}} +$$

$$+ \alpha(n-1),3 \cdot \underline{x3^{(K+1)}} + \ldots + \alpha(n-1),n \cdot xn^{(K)},$$

$$xn^{(K+1)} = \beta n + \alpha n1 \cdot \underline{x1^{(K+1)}} + \alpha n2 \cdot \underline{x2^{(K+1)}} + \alpha n3 \cdot \underline{x3^{(K+1)}} +$$

$$+ \ldots + \alpha n,(n-1) \cdot \underline{x(n-1)^{(K+1)}} + 0 \cdot xn^{(K)}.$$

$$\boxed{x^{(K+1)} = \beta + B \cdot x^{(K+1)} + C \cdot x^{(K)}.} \qquad (9)$$

$$\boxed{x^{(K+1)} = \beta + B \cdot x^{(K+1)} + C \cdot x^{(K)}.} \quad (9)$$

$$x^{(K+1)} = \underbrace{(E-B)^{-1} \cdot \beta}_{\beta^{3}} + \underbrace{(E-B)^{-1} \cdot C}_{\alpha^{3}} \cdot x^{(K)}$$

$$\begin{cases} x^{(K+1)} = \beta^{3} + \alpha^{3} \cdot x^{(K)} \\ K = 0,1,2,.... \\ x^{(0)} = \beta^{3}. \end{cases} \quad (10)$$

Условие остановки итерационного процесса:

$$\|x^{(K+1)} - x^{(K)}\| \le \frac{1 - \|\alpha^{3}\|}{\|\alpha^{3}\|} \cdot \varepsilon.$$