Лекция 9

Комплексные числа

Летучка
(ПИШЕМ ТОЛЬКО ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ!)

1) Комплексное число – это

2) Алгебраическая форма записи комплексного числа

3) Какое число называется сопряженным данному комплексному числу?

4) $i^2 =$

5) Тригонометрическая форма комплексного числа

6) Формула Муавра

Летучка(ответы)

1) упорядоченная пара действительных чисел $\mathrm{z} = (x; y)$.

2) $z = x + iy$

3) $\bar{\mathrm{z}} = x - iy$

4) $i^2 = -1$

5) $\mathrm{z} = |\,\mathrm{z}\,|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

6) $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_1|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin} \quad \frac{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

После умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю, получим:

$$\frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{|z_2|(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{|z_1|[\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2]}{|z_2|\ \mathrm{x}\ 1} =$$

$$= \frac{|z_1|[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\,(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Извлечение корня из комплексного числа

$\sqrt[n]{z}$ корень степени n ($n \in N$ – натуральное число!!!) из комплексного числа z

- это такое комплексное число w, что

$$w^n = z$$

Пусть

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi); \quad w^n = |w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

$$|w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

из условия равенства комплексных чисел в тригонометрической форме записи :

$$|w|^n = |z| \quad \Rightarrow \quad |w| = \sqrt[n]{|z|}$$

$$n\psi = \varphi + 2\pi \cdot k \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$$

k – любое целое число ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Получим формулу:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Извлечение корня из комплексного числа

Пусть $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi);$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n - 1;$$

Показательная форма записи комплексного числа

Если в тригонометрической форме записи $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

обозначить $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, то получим

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

Показательная форма записи комплексного числа

В показательной форме операции

умножения, деления, возведения в степень

выполняют по правилам действий со степенями.

Следствие из показательной формы записи комплексного числа

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} =$$

Пусть даны два числа $a, b \in R, a < b$;

$$= \left| \begin{matrix} |z| = \sqrt{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}};$$

представим $1 - i$ в показательной форме :

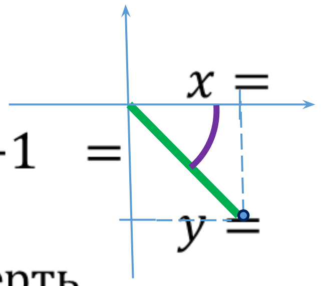
y

0 1 x

φ $1{-}1$ $=$

-1 IV

четверть



$x =$

$y =$

$$\left| \begin{matrix} |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{-1}{1} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}};$$

$$= \frac{(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})^5}{(\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}})^3} = \frac{(\sqrt{2})^5 e^{\frac{5\pi}{4}i}}{(\sqrt{2})^3 e^{-\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{2e^{\frac{5\pi}{4}i}}{e^{-\frac{3\pi}{4}i}} = 2e^{\frac{5\pi}{4}i - (-\frac{3\pi}{4}i)} =$$

$$= 2e^{\frac{5\pi}{4}i + \frac{3\pi}{4}i} = 2e^{\frac{8\pi}{4}i} = 2e^{2\pi i} = 2 \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2$$

ОТВ
ЕТ