

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Формула трапеций и
Симпсона

Формула трапеций

При $n=1$, $f(x) \approx P_1(x)$

Для построения $P_1(x)$ требуется

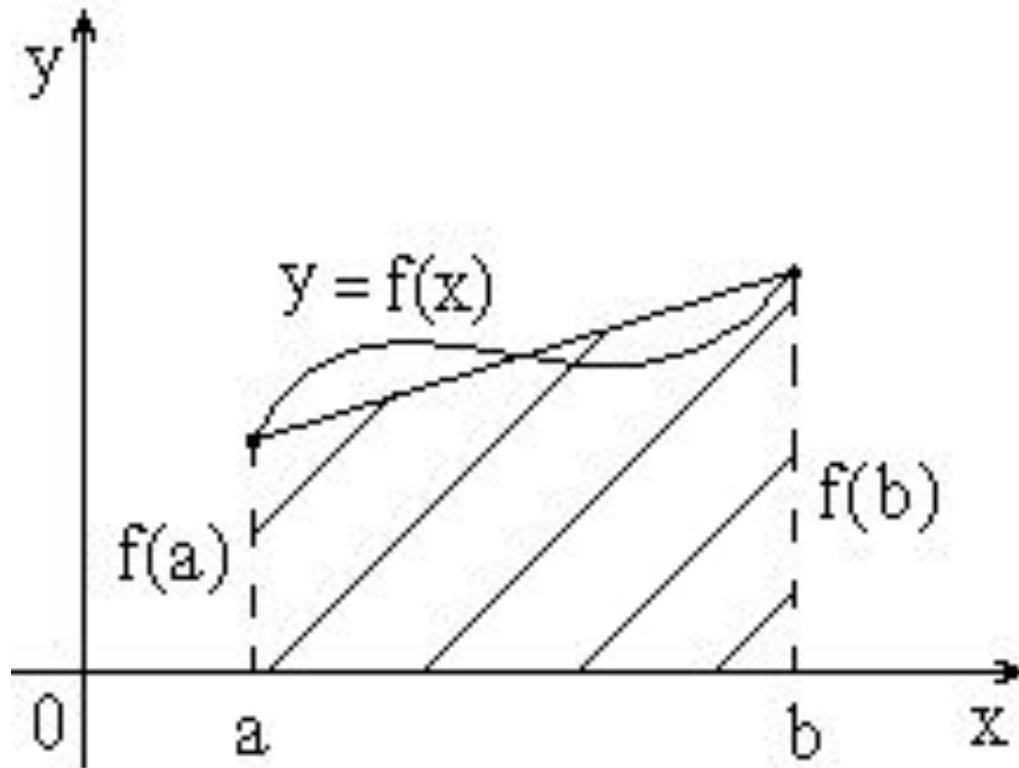
две точки

x	y
$x_0=a$	$y_0=f(a)$
$x_1=b$	$y_1=f(b)$

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Подставив значения x_0, x_1, y_0 и y_1 получим окончательно формулу трапеций

Формула трапеций



$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_1(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(b)(x-a) - f(a)(x-b)) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a)$$

Формула Симпсона

При $n=2$, $f(x) \approx P_2(x)$

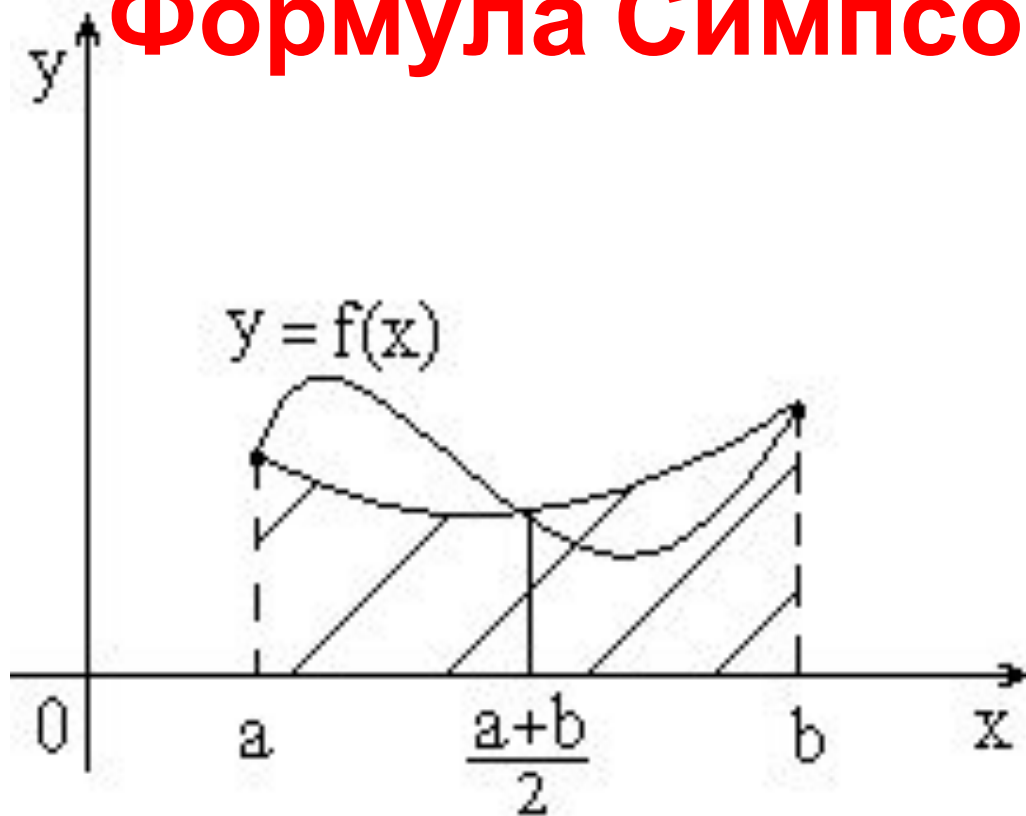
Для построения $P_2(x)$ требуется три
ТОЧКИ

x	y
$X_0=a$	$Y_0=f(a)$
$x_1 = \frac{a+b}{2}$	$y_1 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$X_2=b$	$Y_2=f(b)$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Подставив значения x_0, x_1, x_2, y_0, y_1 и y_2
получим окончательно формулу
Симпсона

Формула Симпсона:



$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$$

Обобщенная формула трапеции



$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(a) + f(b)}{2} \right)$$

Обобщенная формула Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + \right. \\ \left. + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) \right]$$

где $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$

Вычислить приближенно по формуле трапеций интеграл, полагая $n=10$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

При $n=10$ разобьем отрезок интегрирования на 10 частей с шагом

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{10} = 0,1$$

Составим таблицу значений подынтегральной функции в точках деления отрезка:

i	x_i	x_i^2	$y_i = e^{-x^2}$
0	0	0	1.0000
1	0.1	0.01	0.9900
2	0.2	0.04	0.9608
3	0.3	0.09	0.9139
4	0.4	0.16	0.8521
5	0.5	0.25	0.7788
6	0.6	0.36	0.6977
7	0.7	0.49	0.6126
8	0.8	0.64	0.5273
9	0.9	0.81	0.4449
10	1.0	1.00	0.3679

Произведем вычисления:

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_{10}) + \sum_{i=1}^9 y_i = 7.4620$$

По формуле трапеций получим
значение интеграла

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.1 * 7.4620 = 0.7462$$

Вычислить приближенно интеграл по формуле Симпсона при $n=10$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{10} = 0,1$$

Составим таблицу значений подынтегральной функции, в точках деления отрезка, записывая ординаты с четными и нечетными номерами в разные столбцы:

i	x_i	x_i^2	$y_i = e^{x_i^2}$		
			При i=0, i=10	При четном i	При нечетном i
0	0.0	0,00	1,0000		
1	0.1	0,01			1,0101
2	0.2	0,04		1,0408	
3	0.3	0,09			1,0942
4	0.4	0,16		1,1735	
5	0.5	0,25			1,2840
6	0.6	0,36		1,4333	
7	0.7	0,49			1,6323
8	0.8	0,64		1,8965	
9	0.9	0,81			2,2479
10	1.0	1,00	2,7188		
суммы			3,7188	5,4441	7,2685

Затем по формуле Симпсона
находим

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{0.1}{3} (3.7183 + 4 * 7.2685 + 2 * 5.5441) = 1.46268$$