Логические операции: высказывания и связки

Определение 1.
ВЫСКАЗЫВАНИЕМ называется повествовательное предложение, о котором можно говорить, что оно либо **ИСТИННО**, либо **ЛОЖНО.**

Основные **операции** над высказываниями соответствует связкам между предложениями, употребляемым в обычной речи.

	Операция	**Связка**
1	отрицание $\overline{a}$	не a
2	ди<u>з</u>ъюнкц<u>и</u>я $a \vee b$	a или b
3	конъюнкц<u>и</u>я $a \wedge b$	a и b
4	импликация $a \Rightarrow b$	если $a, \ldots$ то b
5	эквивалентность $a \Leftrightarrow b$	a тогда и только тогда, когда b

Операции задаются с помощью ***таблиц истинности***. В строках такой таблицы помещаются **все комбинации** значений простых высказываний и соответствующее им значения сложного высказывания - результата операции.

Операции над высказываниями

Из простых высказываний строятся составное высказывание пользуясь логическими операциями

Конъюнкцией двух высказываний называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания X и Y. Эта логическая операция соответствует соединению высказываний союзом "и" (*логическое произведение*). Обозначения:

$X \& Y \quad X \wedge Y \quad X \cdot Y$

a	b	$a \wedge b$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Пример 1

1) A: «2=2» - истина = 1

A	B	A ∧ B
1	1	1

B: «7=7» - истина =1

A ∧ B вычисляем логическое произведение $1 \cdot 1 = 1$

2) A: «сосна -это дерево» - истина $= 1$

A	B	A ∧ B
1	0	1

B: «Дуб – это цветок» - ложь $= 0$

A ∧ B вычисляем логическое произведение $1 \cdot 0 = 0$

3) A: «$6 \cdot 2 = 3$» - ложь $= 0$

A	B	A ∧ B
0	1	0

B: «$6 : 2 = 3$» - истина $= 1$

A ∧ B вычисляем логическое произведение $0 \cdot 1 = 0$

4) A: «Уральск – столица» - ложь $= 0$

A	B	A ∨ B
0	0	0

B: «Актобе - столица» – ложь $= 0$

A ∧ B вычисляем логическое произведение $0 \cdot 0 = 0$

Операции над высказываниями

Дизъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание ложное в том и только в том случае, когда оба высказывания X и Y ложны. В разговорной речи этой логической операции соответствует союз "или" (неисключающее "или")(*логическая сумма*). Обозначения: $X \vee Y$, $X + Y$.

a	b	$a \vee b$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Пример 2

1) A: «Олег учится в колледже» - истина = 1
B: «Айбек учится в колледже» - истина =1
$A \vee B$ вычисляем логическую сумму $1 + 1 = 1$

A	B	A V B
1	1	1

2) A: «Артем занимается кикбоксингом» - истина = 1
B: «Даурен занимается гимнастикой» - ложь = 0
$A \vee B$ вычисляем логическое произведение $1 + 0 = 1$

A	B	A V B
1	0	1

3) A: «Обучение в колледже офлайн» - ложь = 0
B: «Обучение в колледже онлайн» - истина = 1
$A \vee B$ вычисляем логическое произведение $0 + 1 = 1$

A	B	A V B
0	1	1

4) A: «Уральск – столица» - ложь = 0
B: «Актобе - столица» –ложь = 0
$A \vee B$ вычисляем логическое произведение $0 + 0= 0$

A	B	A V B
0	0	0

Операции над высказываниями

Отрицанием (инверсией) высказывания X называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда X ложно (обозначается $\neg X$ или $\overline{X}$ читается “не X” или “неверно, что X”).

a	$\overline{a}$
И	Л
Л	И

Пример 3

А: «Сегодня 19.11.20. жарко» – ложь = 0

$\neg$ А: «Сегодня 19.11.20. не жарко» – истина = 1

Импликацией *(логическое следование)* двух высказываний X и Y называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда X истинно, а Y – ложно. *Операнды этой операции имеют специальные названия: X – посылка, Y – заключение.* Обозначения: $X \to Y$, $X \supset Y$ читается "X влечет Y", "если X, то Y".

a	b	$a \Rightarrow b$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Из истины следует истина –это истина

Из истины следует ложь – это ложь

Из лжи следует истина –это истина

Из лжи следует ложь –это истина

Эквиваленцией *(эквиваленцией, равносильностью)* двух высказываний X и Y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения X и Y совпадают, и ложное – в противном случае. (Обозначение: $X \sim Y$, $X \leftrightarrow Y$, $X \equiv Y$).

a	b	$a \Leftrightarrow b$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Пример. a «4 < 8»; b «4 = 8»;

$a \Leftrightarrow b$ "$4<8 \Leftrightarrow 4=8$" - ложно

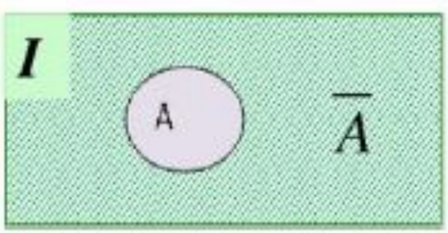
Операции над множествами

Существуют три основных операции над множествами, которые определяются через логические операции:

	Операция над множествами	Логическая операция
1	Дополнение	отрицание
2	Объединение	дизъюнкция
3	Пересечение	конъюнкция

1. Операция "**дополнение**" обозначается $\overline{A}$, читается "не A". В дополнение множества A входят те и только те элементы, которые не принадлежат множеству A.

$$\forall x\, x \in \overline{A} \underset{Df}{\Leftrightarrow} x \notin A.$$



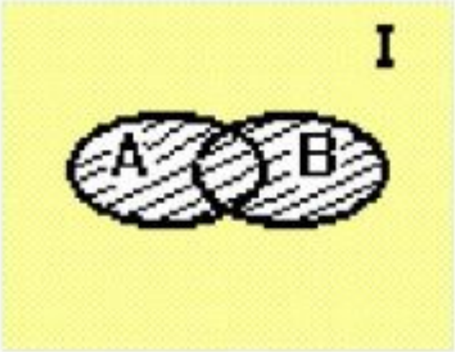
Пример 1. $\boldsymbol{I}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 3, 5\}$

$$\overline{A} = \{2, 4\}$$

Пример 2. $\overline{I} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = I$.

2. Объединение $A\bigcup B$, определяется выражением

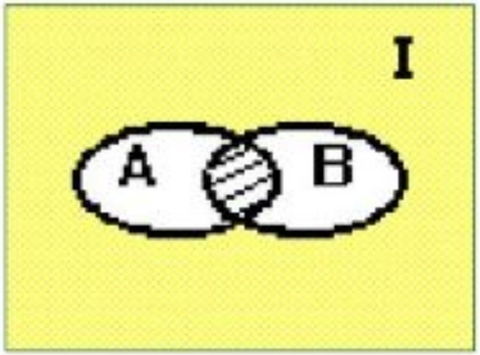
$$\forall x \; x\in A\bigcup B \underset{Df}{\Leftrightarrow} x\in A \vee x\in B$$



В объединение множеств входят элементы каждого множества

3. Пересечение $A\bigcap B$, определяется выражением

$$\forall x \; x\in A\bigcap B \underset{Df}{\Leftrightarrow} x\in A \wedge x\in B$$



В пересечение множеств входят общие элементы всех множеств

Пример. $A=\{1, 3, 5\}$; $B=\{7, 3\}$.

$$A\bigcup B=\{1,3,5,7\};\; A\bigcap B=\{3\}.$$

Определение
ТОЖДЕСТВОМ называется высказывания про множества, которые истинны при любых видах входящих в них множеств.

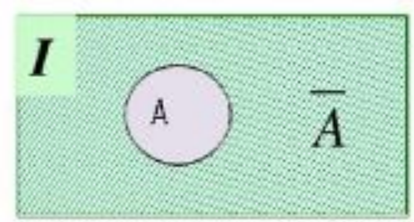
В определении операций над множествами используются логические операции. Поэтому тождествам теории множеств соответствуют некоторые логические законы, использующиеся при их доказательстве ***методом принадлежности***.

Пример. Тождество $A \cup \overline{A} = I$

Запишем высказывание о принадлежности произвольного элемента согласно определению равенства множеств. Полученное высказывание должно быть логическим законом.

$\forall x \; x \in A \cup \overline{A} \Leftrightarrow x \in I;$ $\quad \forall x \; x \in A \vee x \in \overline{A} \Leftrightarrow \text{И}$

$\forall x \; x \in A \vee \overline{x \in A} \Leftrightarrow \text{И};$ $\quad \forall x \; a_x \vee \overline{a_x} \Leftrightarrow \text{И}$



Получили логический закон исключенного третьего $a \vee \overline{a}$