3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Матрица:

$$\underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{4\times 2}{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{4\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{4\times 2}{C} = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 + (-1)\cdot 1 & 3\cdot 2 + (-1)\cdot 5 \\ 1\cdot 4 + 2\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 5 \\ 4\cdot 4 + (-2)\cdot 1 & 4\cdot 2 + (-2)\cdot 5 \\ 2\cdot 4 + 1\cdot 1 & 2\cdot 2 + 1\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 6 & 7 \\ 14 & -2 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Некоторые приемы перемножения матрицы вручную:

$$\underset{4\times4}{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{4\times2}{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \\ A_{41} & A_{42} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\Rightarrow\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\ldots P\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}\Rightarrow A^T PA$$

Обращение матрицы 2х2:

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(N) = N_{11} \cdot N_{22} - N_{12} N_{21} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 16$$

$$Q = N^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det(N)}$$

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Оценивание

уравнивание (количество)

оценка точности (качество)

Оценка точности ⇒ Контроль качества

Контроль качества

в терминах точности

в терминах надежности

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Контроль качества

в терминах точности

- локальные, глобальные оценки

-точечные оценки, интервальные оценки

- выборочная, сплошная оценка

- абсолютная, относительная.

1 основа - закон переноса ошибок (фундаментальная теорема переноса ошибок) – выражение оцениваемой величины через величины, ковариационная матрица (матрица обратных весов, матрица кофакторов) которых известна.

Обычные выражения:

-через результаты измерений

-через уравненные параметры

- другие

Результаты эквивалентны.

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Контроль качества

2 основа – ковариационная матрица и стандартные отклонения (СКП) по *Гельмерту*

$$\sigma_i = \sqrt{Trace(K)_{ii}}$$

для i – той точки. Разделение по координатам.

Для 2D случая – круговая ошибка Гельмерта

i – тая точка

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}_i \Rightarrow \sigma_i = \sqrt{K_{11} + K_{22}} = \begin{cases} \sigma_0 \sqrt{q_{11} + q_{22}} \\ \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \end{cases}$$

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Локальная оценка – оценивается 1 элемент сети

Глобальная оценка – оценивается вся сеть

Выборочная оценка – оценивается несколько выборочных элемента;

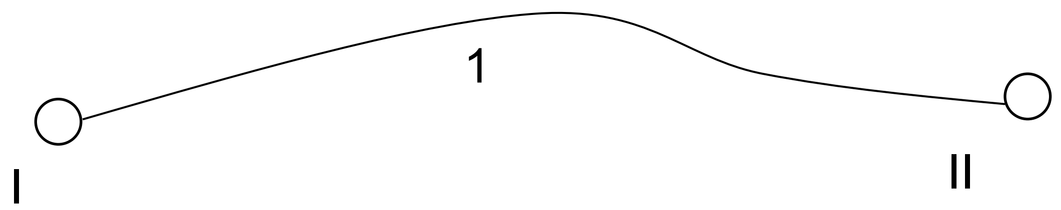
Сплошная – оцениваются все однотипные элементы.

Абсолютная – относительно исходных

Относительная – относительно определяемого

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Пример. В нивелирной сети 4 параметра *x* (высоты), оценить одно уравненное превышение (1-ое) и одну уравненную высоту (I-ую). Ковариационная матрица уравненных параметров $K_x = \sigma^2 Q_x$ известна.



Выражаем первое уравненное превышение через параметры:

$h_1 = H_{II} - H_I$ – остальные 2 не участвуют. Записываем вектор f из коэффициентов при параметрах

f = (-1 1 0 0). Тогда оценка дисперсии будет $m_{h_1}^2 = f \cdot K_x \cdot f^T$

Выражаем первую уравненную высоту через параметры:

$H_I = H_I$ – остальные 3 не участвуют. Записываем вектор f из коэффициентов при параметрах

f = (1 0 0 0). Тогда оценка дисперсии будет $m_{H_I}^2 = f \cdot K_x \cdot f^T$

- диагональный элемент ковариационной матрицы.

Контроль качества

в терминах надежности:

-локальная избыточность

-внутренняя надежность

-внешняя надежность.

Надежность в терминах Делфтской школы (Baarda, 1968 г) – способность выявления минимальной погрешности в качестве грубой в сети.

Основа – расширенные модели и статистическое тестирование.

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Основа контроля качества в терминах точности – ковариационная матрица вектора x

$$K_x = MO((x - MO(x)) \cdot (x - MO(x))^T).$$

Нужен только линейный вид. Вектор-функция

$$y = A \cdot x + b.$$

2Dслучай:

$$\begin{cases} y_1 = A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + b_1 \\ y_2 = A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + b_2 \\ y_3 = A_{31} \cdot x_1 + A_{32} \cdot x_2 + b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow y = A \cdot x + b$$

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Ковариационная матрица линейной вектор-функции $y = A \cdot x + b$ на основе

$$K_x = MO((x - MO(x)) \cdot (x - MO(x))^T).$$

Математическое ожидание:

$$MO(y) = A \cdot MO(x) + b;$$

Центрированная величина:

$$y - MO(y) = A \cdot x + b - A \cdot MO(x) - b = A \cdot (x - MO(x))$$

Ковариационная матрица:

$$K_y = MO\left[(A \cdot (x - MO(x)) \cdot (A \cdot (x - MO(x)))^T\right] =$$

$$= A \cdot MO\left[(x - MO(x)) \cdot (x - MO(x))^T\right] \cdot A^T =$$

$$= A \cdot K_x A^T$$ - Фундаментальная теорема оценки точности функции; закон переноса ошибок

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Часто используемый аналог: $Q_y = A \cdot Q_x \cdot A^T$

Пример: Найдем ковариационную матрицу для $l = y_{выч} - y_{изм}$

$$MO(l) = y_{выч} - MO(y_{изм})$$

$$l - MO(l) = -(y_{изм} - MO(y_{изм}))$$

$$K_l = MO((l - MO(l)) \cdot (l - MO(l))^T) =$$

$$= MO[(y_{изм} - MO(y_{изм})) \cdot (y_{изм} - MO(y_{изм}))^T] =$$

$$= K_y = \mu^2 \cdot P_y^{-1} = \mu^2 \cdot Q_y \Rightarrow Q_l = Q_y = P_y^{-1}.$$

Сразу по теореме: $K_l = A \cdot K_y \cdot A^T = (-E) \cdot K_y \cdot (-\text{E}) = K_y = \mu^2 \cdot P^{-1}$.

Найдем ковариационную матрицу для $b = (A^T P) \cdot l$:

$$K_b = (A^T P) \cdot K_y \cdot (PA) = \mu^2 \cdot (A^T P) \cdot P^{-1} \cdot (PA) = \mu^2 \cdot (A^T PA) = \mu^2 \cdot N.$$

Вектор-функция решения системы $N \cdot x + b = 0 \Rightarrow x = -N^{-1} \cdot b$.

По закону переноса ошибок:

$$K_x = A \cdot K_b \cdot A^T = \mu^2 \cdot N^{-1} \cdot N \cdot N^{-1} = \mu^2 \cdot N^{-1} = \mu^2 \cdot Q_x .$$

Для любой линейной функции.

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Формулы параметрического способа:

1. $l = y_{выч} - y_{изм}$
2. $v = A \cdot \delta t + l.$
3. $y_{ур} = y_{изм} + v_i$
4. $\delta t = - Q \cdot b = - (A^T PA)^{-1} \cdot A^T Pl$
5. $t_{ур} = t^o + \delta t$

Все к линейному виду через измерения y.

Целесообразнее через l (постоянная – измерение) и

$$K_l = K_y, \Rightarrow Q_l = Q_y = P_y^{-1} = P^{-1}$$

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Линейно через l:

$$l = l$$

$$v = A \cdot \delta t + l = -A \cdot (A^T P A)^{-1} \cdot A^T P l + l =$$

$$= (E - A \cdot Q \cdot A^T P) \cdot l$$

$$y_{ур} = y_{изм} + v_i = y_{выч} - l + (E - A \cdot Q \cdot A^T P) \cdot l = (-A \cdot Q \cdot A^T P) \cdot l$$

$$\delta t = [- Q \cdot A^T P] \cdot l$$

$$t_{ур} = t^o + \delta t = t^o + [- Q \cdot A^T P] \cdot l.$$

Можно искать ковариационную матрицу, можно матрицу кофакторов;

Можно искать через общую формулу ковариационной матрицы, можно через закон переноса ошибок;

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Оценка на основе фундаментальной теоремы переноса ошибок при $F = T \cdot y$:

- Через ковариационную матрицу

$$K_F = T \cdot K_y \cdot T^T$$

- Через обратную матрицу весов

$$Q_F = T \cdot Q_y \cdot T^T$$

T – вектор коэффициентов (производных) от линейных по измерениям уравнений.

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Можно оценивать по одной функции, можно сразу вектор-функцию для всех линейных зависимостей. Например, для одной:

$$t_{yp} = t^o + \delta t = t^o + [-Q \cdot A^T P] \cdot l.$$

Для $F = T \cdot y \Rightarrow T = [-Q \cdot A^T P]$

$$Q_{typ} = T \cdot P^{-1} \cdot T^T = [-Q \cdot A^T P] \cdot P^{-1} \cdot [-Q \cdot A^T P]^T =$$

$$= [-Q \cdot A^T P] \cdot P^{-1} \cdot [-PA \cdot Q]$$

$=$

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Для всех линейных зависимостей в виде вектор-функции: Тогда T будет

$$T = \begin{pmatrix} E \\ -AQA^T P \\ -QA^T P \\ E - AQA^T P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y \\ y_{yp} \\ t \ \ (\delta t) \\ v \end{cases}$$

Для матрицы кофакторов перемножение

$Q_F = T \cdot Q_y \cdot T^T$ $(Q_y = P^{-1})$ дает полную матрицу оценки точности для всех вариантов:

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Сводка результатов без корреляций:

	K	Q
y	$\sigma^2 \cdot P_y^{-1}$	P_y^{-1}
y_{yp}	$A \cdot K_x \cdot A^T$	$A \cdot Q_x \cdot A^T$
t	K_x	N^{-1}
v	$K_y - A K_x A^T$	$P_y^{-1} - A Q_x A^T$
F_x	$f K_x f^T$	$f Q_x f^T$

$K = \sigma^2 \cdot Q$ -> $\sigma_i = \sigma_0 \cdot \sqrt{q_{ii}}$

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Используя общую формулу ковариационной матрицы:

для v имеем:

$$K_v = MO(v \cdot v^{T}) = MO[(E - A \cdot (A^TPA)^{-1} \cdot A^TP) \cdot l\,) \cdot ((E - A \cdot (A^TPA)^{-1} \cdot A^TP) \cdot l)^T] = K_y - A\,K_x A^T.$$

Учитывать, что $y - MO(y) = v$.

для δt:

$$K_{\delta t} = MO(\delta t \cdot \delta t^T) = MO[(- (A^TPA)^{-1} \cdot A^TP \cdot l) \cdot (- (A^TPA)^{-1} \cdot A^TP \cdot l)^T\,] = \mu^2 \cdot (A^TPA)^{-1} = \mu^2 \cdot N^{-1}$$

Учитывать, что $t - MO(t) = \delta t$.

3. Оценка точности при параметрическом способ уравнивания

Получение масштабного фактора (погрешности единицы веса), нюансы (наша – не наша):

$$\mu^2 = \frac{v^T P v}{n-k} = \frac{\Phi}{r}$$

1. Непосредственно

2. $v = A \cdot \delta t + l.\quad \Phi = (l^T + \delta t^T \cdot A^T) \cdot P \cdot (A \cdot \delta t + l) =$

$$= l^T P l + b^T \cdot \delta t =$$

$$= l^T P l - l^T P A Q A^T P l =$$

$$= l^T (P - P A Q A^T P) \cdot l = l^T \overline{Q} l =$$

$$= l^T P \cdot (P^{-1} - A Q A^T) \cdot P\, l = l^T P \cdot Q_v \cdot P\, l =$$

$$= l^T P \cdot R\, l = l^T P \cdot v = \ldots$$

Интервальная оценка точности

Интервальные оценки - оцениваемая величина находится в доверительной области (интервал, фигура) с вероятностью *P*. Гарантируется только при гауссовском распределении результатов измерений и резко падает при отклонении от него. Для одномерной величины закрытый интервал

$$J_1 = \left[x_{H_1}, x_{B_1}\right] \equiv \left[\widetilde{X} - \Delta_P, \widetilde{X} + \Delta_P\right]$$

Дисперсия известна $\Delta_P = \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \cdot z_{(1+\beta)/2}$

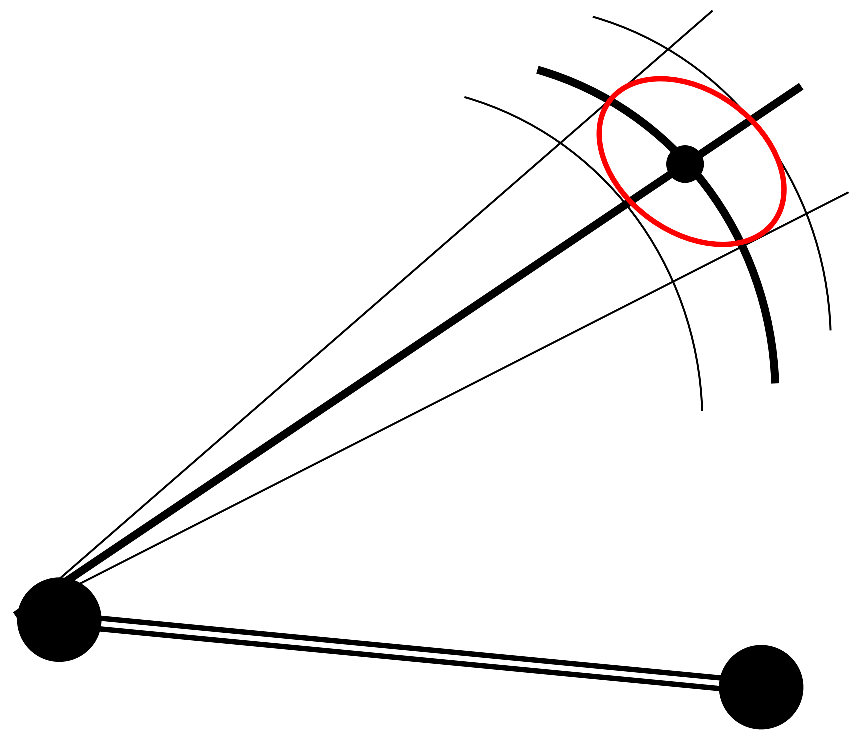
Дисперсия не известна $\Delta_P = \dfrac{m_X}{\sqrt{n}} \cdot t_{r,(1+\beta)/2} = m_{\widetilde{X}} \cdot t_{r,(1+\beta)/2}$

Интервал для любой оцененной функции *F*

$$\widetilde{F} - t_{r,(1+\beta)/2} m_{\widetilde{F}} < F < \widetilde{F} + t_{r,(1+\beta)/2} m_{\widetilde{F}}$$

Интервальная оценка точности

Откуда и как получают 2-мерный интервал?



Погрешности 0 и не 0.

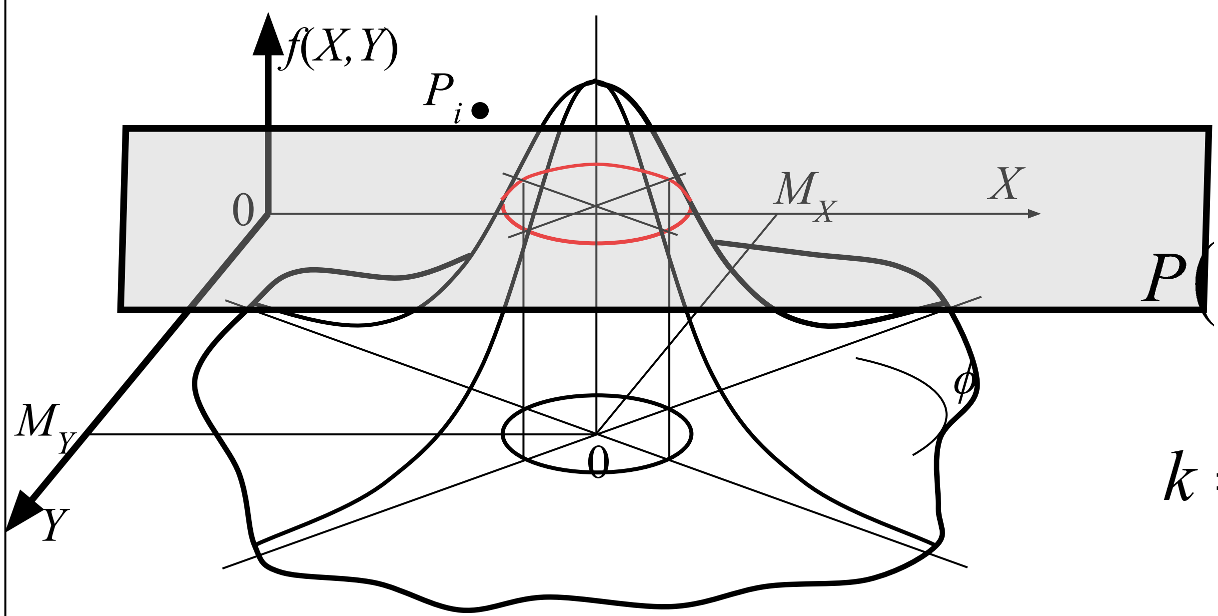
Интервальная оценка точности

Для 2D и др. - эллипс погрешностей (основа вид ЗР).
Абсолютный и относительный эллипс.

Для НЗР:

$$f(X,Y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2}+\frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right)}$$

$$\frac{x^2}{\sigma_X^2}+\frac{y^2}{\sigma_Y^2}=k^2$$



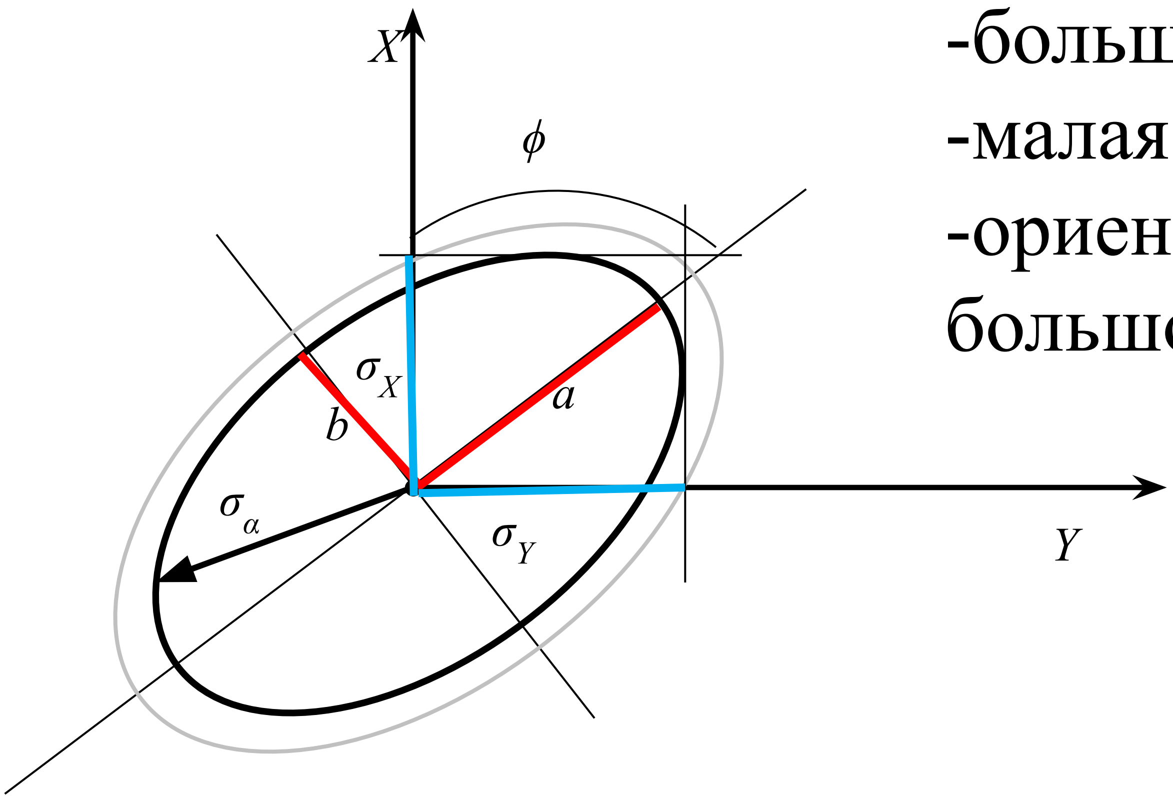
$$k=\sqrt{-2\cdot\ln(1-P)}$$

$$P\left((X,Y)\subset D\right)=1-e^{-\frac{k^2}{2}}$$

$$k=\sqrt{d\cdot F^{-1}_{1-\alpha,d,\infty}}$$

Интервальная оценка точности

Элементы плоского эллипса погрешностей



-большая полуось a,
-малая полуось b,
-ориентировка большой полуоси ϕ

Интервальная оценка точности

Вычисление через блоки ковариационной матрицы (матрицы кофакторов) для *i*-го пункта:

$$K_{(i)} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \sigma_0^2 \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

Основные методы определения:

- На основе вращений;
- На основе собственных значений;
- На основе комбинации.

Интервальная оценка точности

Комбинированный метод вычислений:

Оси – собственные значения блока ковариационной матрицы для *i*-го пункта, или решение системы уравнений вида

$$\det(K_i - \lambda E) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} K_{11} - \lambda & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(K_{11} - \lambda) \cdot (K_{22} - \lambda) - K_{12}^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (K_{11} + K_{22}) \cdot \lambda + (K_{11} \cdot K_{22} - K_{12}^2) = \lambda^2 - Sp(K_{(i)}) \cdot \lambda + \det(K_{(i)}) = 0$$

Интервальная оценка точности

Решение уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-Sp(K_{(i)}) \pm \sqrt{(Sp(K_{(i)}))^2 - 4 \cdot \det(K_{(i)})}}{2}$$

Sp (Tr) – след, Det – определитель матрицы.

Доказано, что

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda_1} = a = \sigma_a \\ \sqrt{\lambda_2} = b = \sigma_b \end{cases}$$

Ориентировка:

$$\tan(2\varphi) = \frac{2 \cdot K_{12}}{K_{11} - K_{22}}$$

+ По чс, - против чс

Интервальная оценка точности

Последовательность для хода (сети):

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} q_{33} & q_{34} \\ q_{43} & q_{44} \end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix} .. & .. \\ .. & .. \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} q_{pp} & q_{pk} \\ q_{kp} & q_{kk} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

-выбирают из обратной матрицы диагональные (оценочные блоки)

-переходят через σ от блоков обратной матрицы к блокам ковариационной

-для каждого блока (точки хода) рассчитывают оси и ориентировку эллипса.

-если надо, отображают графически

-анализ

Интервальная оценка точности

Относительный эллипс погрешностей:

Представляет доверительную область при оценивании точности позиционирования *i*-той определяемой точки в сети относительно *j*-той определяемой.

Получают из ковариационной матрицы используя блоки для K_i и K_j точки и связанные K_{ij} блоки .

Рисуются на середине линии, соединяющей *i*-тую и *j*-тую точки, для которых представляется эллипс.

Интервальная оценка точности

Последовательность построения:

-Из общей ковариационной матрицей *K* извлекают диагональные блоки *Ki* и *Kj* и не диагональные *Kij* и *Kji* соответствующие нужным нам точкам.

- Из блоков формируем новую матрицу размера (4 × 4) вида

$$(K)_{ij} = \begin{bmatrix} K_i & K_{ij} \\ K_{ji} & K_j \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

- Строят вектор разностей координат (из конечной точки *j* вычитают координаты начальной точки *i*) и формируют матрицу *F* из коэффициентов при координатах, используя таблицу:

	X_i	Y_i	X_j	Y_j
$X_j - X_i$	−1	0	1	0
$Y_j - Y_i$	0	−1	0	1

Интервальная оценка точности

Матрица F (единичные и нулевые блоки)

$$F = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -E & E \end{bmatrix}$$

Закон переноса ошибок $K = F \cdot K_{ij} \cdot F^T$

$$(K)_{ij} = \begin{bmatrix} -E & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -E \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} + K_{jj} - K_{ij} - K_{ji} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Используя любой известный алгоритм рассчитывают оси относительного эллипса и его ориентировку.

Интервальная оценка точности

По последней инструкции на основании формулы

$$(K)_{ij} = \begin{bmatrix} -E & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -E \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} + K_{jj} - K_{ij} - K_{ji} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

рассчитывают относительную среднюю квадратическую погрешнось (*i*-той точки относительно *j*-той) по формуле Гельмерта. Пример.

$$\sigma_{P_{ij}} = \sqrt{Trace(K)_{ij}} = \hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{Trace(Q)_{ij}}$$

Здесь *Trace* – след (сумма диагональных элементов матрицы); $(Q)_{ij}$ – матрица кофакторов соответствующего блока.

Интервальная оценка точности

Контрольные вопросы по модулю:

1. Возникновение и постановка задачи уравнивания геодезических построений, общие положения.
2. Параметрический способ уравнивания, прямой подход.
3. Параметрический способ уравнивания, косвенный подход.
4. Параметрический способ уравнивания, не линейный случай.
5. Точечная оценка точности результатов уравнивания при параметрическом способе.
6. Интервальная оценка точности при параметрическом способе.