Элементы векторной алгебры

Кафедра высшей математики ТПУ

<u>Лектор:</u>

доцент

Тарбокова Татьяна Васильевна

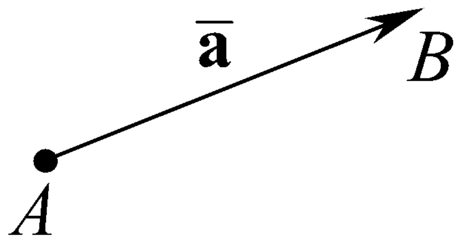
§ 6. Векторы. Линейные операции на множестве векторов

1. Определение вектора. Основные отношения на множестве векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вектором называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).*

Обозначают: $\overline{\mathbf{AB}}$ (где A – начало вектора, а B – его конец), $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и т. д.

Изображают:



Расстояние между точками начала и конца вектора называется *длиной* (или *модулем*) вектора.

Обозначают: $\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|$ или $\left|\overline{\mathbf{a}}\right|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым***. Обозначают: $\overline{\mathbf{0}}$.

Нулевой вектор не имеет определенного направления

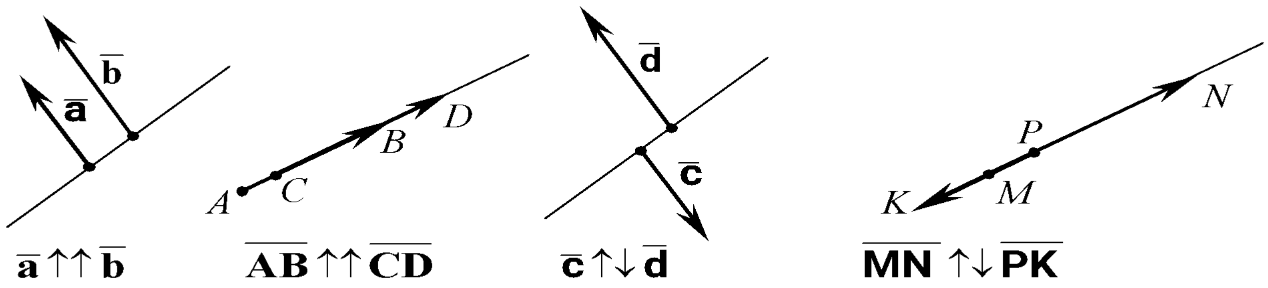
и имеет длину, равную нулю.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются ***коллинеарными*** **(*параллельными*).**

Записывают: $\overline{\mathbf{a}} \parallel \overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарные, и
$\overline{\mathbf{a}} \nparallel \overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ неколлинеарные.

Коллинеарные векторы обозначают: $\overline{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ сонаправленные,

и $\overline{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}$ противоположно направленные.



Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называются **равными**, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}}$.

Все нулевые векторы считаются равными.

Векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, лежащие на перпендикулярных прямых, называются ***перпендикулярными*** **(*ортогональными*)**.

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} \perp \bar{\mathbf{b}}$.

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются ***компланарными***.

2. Линейные операции на множестве векторов

1) Умножение на число; 2) Сложение векторов

Произведением вектора $\overline{\mathbf{a}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ ***на число*** $\alpha \neq 0$ *называется вектор, длина которого равна* $|\alpha| \cdot |\overline{\mathbf{a}}|$, *а направление совпадает с направлением вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *при* $\alpha > 0$ *и противоположно ему при* $\alpha < 0$.

Если $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{0}}$ *или* $\alpha = 0$, *то их произведение полагают равным* $\overline{\mathbf{0}}$.

Обозначают: $\alpha\,\overline{\mathbf{a}}$.

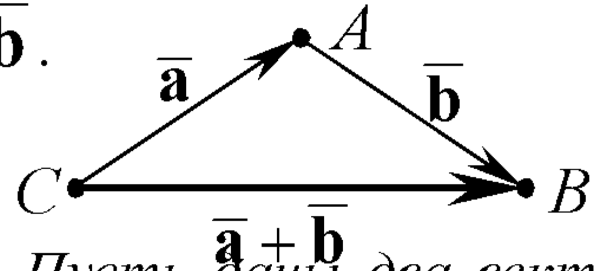
Частный случай: произведение $(-1)\overline{\mathbf{a}}$.

Вектор $(-1)\overline{\mathbf{a}}$ называют ***противоположным вектору*** $\overline{\mathbf{a}}$ и обозначают $-\overline{\mathbf{a}}$.

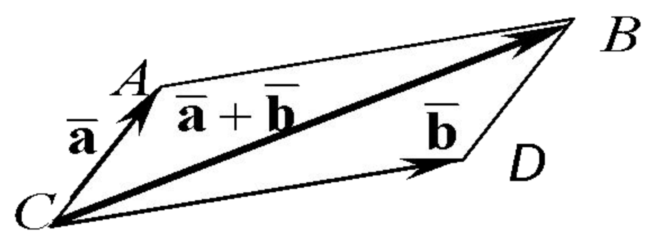
Критерий коллинеарности векторов

Два ненулевых вектора $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\overline{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \overline{\mathbf{b}}$, *для некоторого числа* $\alpha \neq 0$.

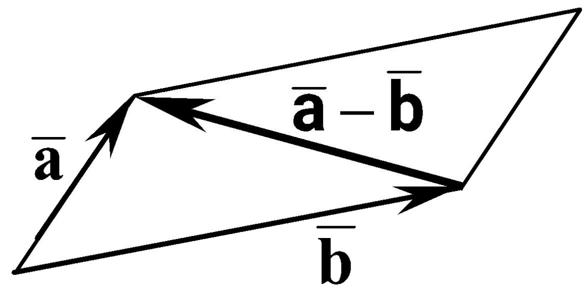
Сумма векторов (правило треугольника). *Пусть даны два вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку* C *и построим последовательно векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{b}}$. *Вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *соединяющий начало первого и конец второго построенных векторов, называется суммой векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *и обозначается* $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}$.



(правило параллелограмма). *Пусть даны два вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку* C *и построим векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \overline{\mathbf{b}}$. *Суммой векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *будет вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *имеющий начало в точке* C *и совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \overline{\mathbf{b}}$.



Частный случай: сумма $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{b}})$.



Сумму $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{b}})$ называют *разностью векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ и обозначают $\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}$.

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД ВЕКТОРАМИ

1) $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{a}}$ (коммутативность сложения векторов);

2) $(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) + \overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}} + (\overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}})$ (ассоциативность сложения векторов);

3) $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{a}}$;

4) $\overline{\mathbf{a}} + (-\overline{\mathbf{a}}) = \overline{\mathbf{0}}$;

5) $\alpha(\beta\,\overline{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta)\overline{\mathbf{a}}$ (ассоциативность относительно умножения на числа);

6) $(\alpha + \beta)\overline{\mathbf{a}} = \alpha\,\overline{\mathbf{a}} + \beta\,\overline{\mathbf{a}}$ (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел);

7) $\alpha(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) = \alpha\,\overline{\mathbf{a}} + \alpha\,\overline{\mathbf{b}}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов);

8) $1\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}$.

3. Понятия линейной зависимости и независимости. Базис

Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ *называют* *линейно зависимыми*, *если существуют числа*

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, *не все равные нулю и такие, что линейная комбинация векторов*

$$\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k$$

равна нулевому вектору $\bar{o}$.

Если равенство $\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k = \bar{o}$ *возможно только когда все* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, *то векторы* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ *называют* *линейно независимыми*.

Теорема. *Векторы* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные .*

Пространство называется *n*-мерным, если в нем существует система *n линейно независимых векторов,* *а любая система из n+1 вектора линейно зависима.*

Максимальное число линейно независимых векторов пространства называется базисом этого пространства.

То есть, векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_n$ образуют базис в некотором множестве векторов, если выполняются два условия:

1) $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_n$ – линейно независимы;

2) $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_n$, $\bar{\mathbf{a}}$ – линейно зависимы для любого вектора $\bar{\mathbf{a}}$ из этого множества.

ЛЕММА (о базисе в $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ и $V^{(3)}$).

1) *Базисом множества* $V^{(1)}$ (одномерного векторного пространства) *является* *любой ненулевой вектор*.

2) *Базисом множества* $V^{(2)}$ (двумерного векторного пространства (плоскости)) *являются* *любые два неколлинеарных вектора*.

3) *Базисом множества* $V^{(3)}$ (трехмерного векторного пространства) *являются* *любые три некомпланарных вектора*.

Критерий линейной зависимости 2-х и 3-х ненулевых векторов).

1) *Два ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

2) *Три ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

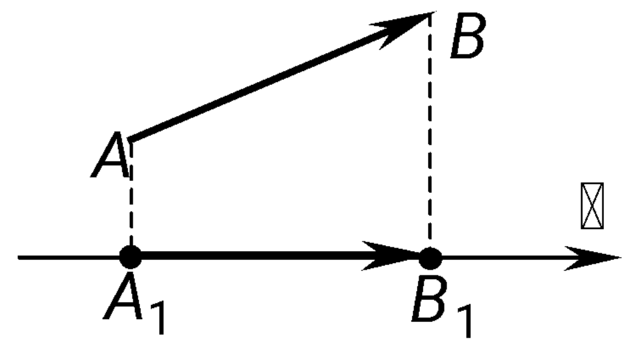
ТЕОРЕМА (о базисе). *Каждый вектор множества* $V^{(3)}$ $(V^{(2)}, V^{(1)})$ *линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.*

4. Координаты вектора

Коэффициенты в разложении вектора по базису называются ***координатами*** *этого вектора в данном базисе*.

Прямую, на которой выбрано направление, называют ***осью***.

Пусть □ – ось,
$\overline{\mathbf{AB}}$ – некоторый вектор,
A_1 и B_1 – ортогональные проекции на ось □ точек A и B соответственно.



Вектор $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ назовем ***векторной проекцией вектора*** $\overline{\mathbf{AB}}$ ***на ось*** □.

Проекцией *(ортогональной проекцией) вектора* $\overline{\mathbf{AB}}$ *на ось* ▯ *называется длина его векторной проекции* $|\overline{\mathbf{A_1B_1}}|$ *на эту ось, взятая со знаком плюс, если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* ▯ *сонаправлены, и со знаком минус – если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* ▯ *противоположно направлены.*

Обозначают: $\text{Пр}^{\perp}_{▯}\overline{\mathbf{AB}}$, $\text{Пр}_{▯}\overline{\mathbf{AB}}$.

Проекция вектора на ось – ЧИСЛО.

Система базисных векторов, исходящих из одной точки О (начала координат), называется АФФИННОЙ системой координат.

- ДЕКАРТОВОЙ системой координат (ДСК) называется система единичных попарно ортогональных векторов.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ координат свободных векторов в декартовом прямоугольном базисе:

ТЕОРЕМА. *Координаты вектора*

$\bar{\mathbf{a}} \in V^{(2)}$ $(V^{(3)})$

в декартовом прямоугольном базисе **i, j** (**i, j, k**)

есть проекции этого вектора

на соответствующие координатные оси.

ТЕОРЕМА.

1) *Если вектор* $\overline{\mathbf{a}}$ *имеет в базисе* $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ *координаты* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, *вектор* $\overline{\mathbf{b}}$ *имеет в том же базисе координаты* $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, *то вектор* $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}$ *будет иметь в базисе* $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ *координаты*

$$\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3\}.$$

2) *Если вектор* $\overline{\mathbf{a}}$ *имеет в базисе* $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ *координаты* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, *то для любого действительного числа* λ *вектор* $\lambda\overline{\mathbf{a}}$ *будет иметь в том же базисе координаты* $\{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3\}$.

Вывод: линейным операциям над векторами соответствуют такие же операции над их координатами.

ТЕОРЕМА (критерий коллинеарности свободных векторов в координатной форме).

Векторы $\bar{\mathbf{a}} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$ *и* $\bar{\mathbf{b}} = \{\beta_1; \beta_2; \beta_3\}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты – пропорциональны, т.е.*

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = k\ .$$

Причем, если коэффициент пропорциональности $k > 0$, *то векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *– сонаправлены, а если* $k < 0$ *– то противоположно направлены*

ТЕОРЕМА (связь координат вектора в разных базисах).

Пусть $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ *и* $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$ *два базиса в множестве* $V^{(3)}$.

Причем имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_1 &= \tau_{11}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{21}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{31}\bar{\mathbf{e}}_3, \\ \bar{\mathbf{f}}_2 &= \tau_{12}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{22}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{32}\bar{\mathbf{e}}_3, \\ \bar{\mathbf{f}}_3 &= \tau_{13}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{23}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{33}\bar{\mathbf{e}}_3. \end{aligned}$$

Если вектор $\bar{\mathbf{a}}$ *имеет в базисе* $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ *(старом) координаты* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, *а в базисе* $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$ *(новом) – координаты* $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, *то справедливо равенство*

$$X_в = \mathbf{T}X,$$

где $X_с = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $X_н = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$

(матрицу $\mathbf{T}$, столбцами которой являются координаты новых базисных векторов в старом базисе, называют матрицей перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$).

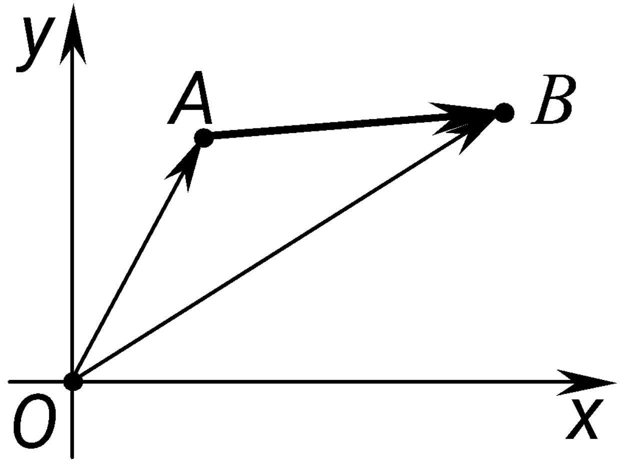
§7. Простейшие задачи векторной алгебры

Пусть на плоскости (в пространстве) задана декартова прямоугольная система координат. Выберем во множестве $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) декартов прямоугольный базис

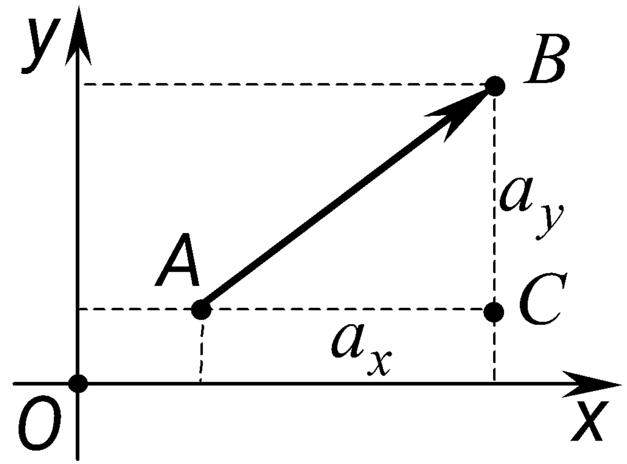
i, j, k (**i, j**).

ЗАДАЧА 1. Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{AB}}$, если известны декартовы координаты начала и конца вектора.

Вектор OA называется радиусом-вектором точки A. Координатами точки A называют координаты её радиуса-вектора.



ЗАДАЧА 2. Найти длину вектора, если известны его координаты в декартовом прямоугольном базисе.



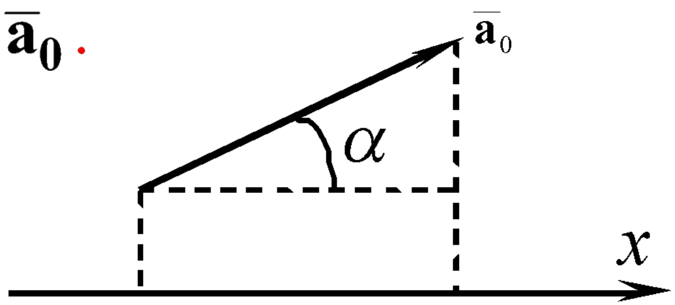
ЗАДАЧА 3. Известны координаты вектора. Найти координаты его орта.

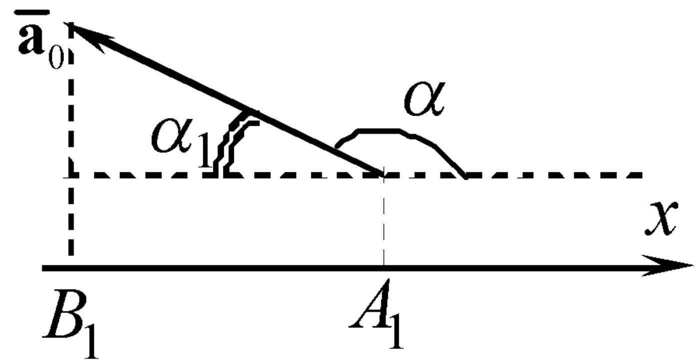
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ортом вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *называется вектор* $\bar{\mathbf{a}}_0$, *сонаправленный с вектором* $\bar{\mathbf{a}}$ *и имеющий единичную длину.*

Геометрический смысл координат **орта** вектора

Будем обозначать через α, β и γ углы, которые вектор $\bar{\mathbf{a}}$ образует с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\bar{\mathbf{a}}_0$.





Координаты *орта вектора* $\bar{\mathbf{a}}_0$ *являются его направляющими косинусами*.

Замечание. Так как $|\bar{\mathbf{a}}_0| = 1$ и $\bar{\mathbf{a}}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

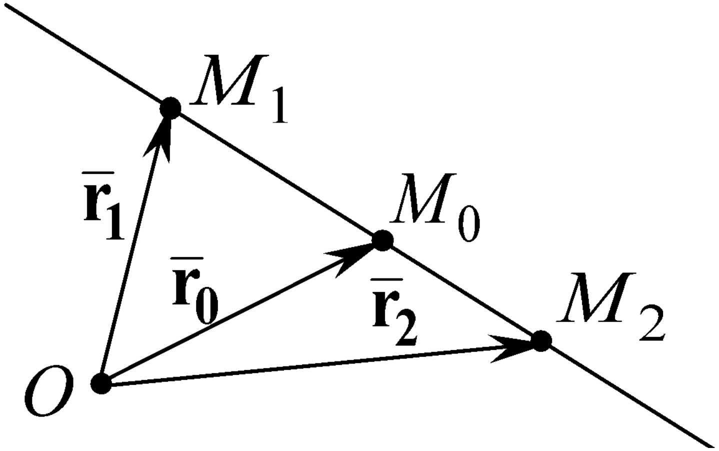
Это равенство называют *основным тождеством для направляющих косинусов вектора*.

ЗАДАЧА 4. Известны координаты концов отрезка. Найти координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении.

Говорят, что точка M_0 *делит отрезок* M_1M_2 *в отношении* λ $(\lambda \neq -1)$, *если* $\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{M_0M_2}}$.

Если $\lambda > 0$, то точка M_0 лежит между точками M_1 и M_2. В этом случае говорят, что точка M_0 *делит отрезок* M_1M_2 *во внутреннем отношении*.

Если $\lambda < 0$, то точка M_0 лежит на продолжении отрезка M_1M_2. В этом случае говорят, что точка M_0 *делит отрезок* M_1M_2 *во внешнем отношении*.



§8. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов
2. Векторное произведение векторов
3. Смешанное произведение векторов

1. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется* ***число***, *равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е. число* $|\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos\varphi$.

Если $\bar{\mathbf{a}}=\bar{\mathbf{0}}$ *или* $\bar{\mathbf{b}}=\bar{\mathbf{0}}$, *то скалярное произведение векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *полагают равным нулю.*

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

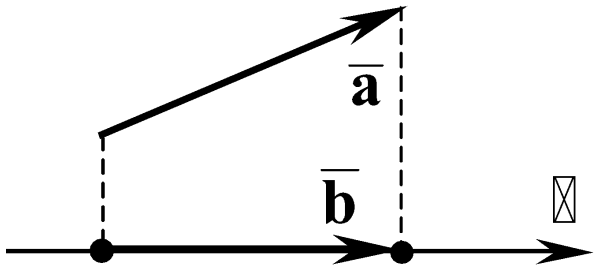
1) *Скалярное произведение векторов коммутативно*, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})=(\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}})$$

2) *Скалярное произведение ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *равно произведению длины вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на проекцию вектора* $\bar{\mathbf{b}}$ *на вектор* $\bar{\mathbf{a}}$ *(длины вектора* $\bar{\mathbf{b}}$ *на проекцию* $\bar{\mathbf{a}}$ *на* $\bar{\mathbf{b}}$*).*

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) = \left|\bar{\mathbf{a}}\right| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{a}}}\bar{\mathbf{b}} = \left|\bar{\mathbf{b}}\right| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}$$

Проекцией вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *на вектор* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется проекция вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на ось, определяемую вектором* $\bar{\mathbf{b}}$.



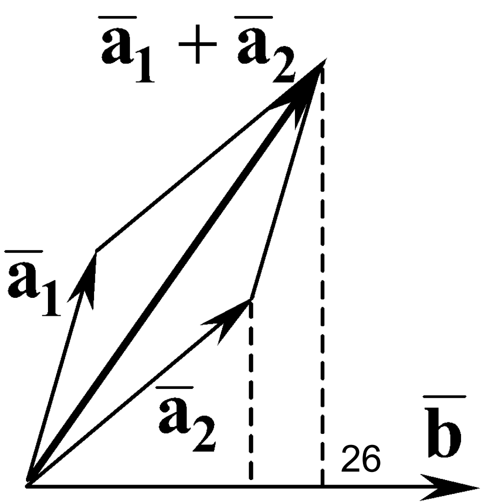
3) *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак скалярного произведения.* Т.е.

$$(\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}},\lambda\bar{\mathbf{b}}) = \lambda(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})$$

4) *Если один из векторов записан в виде суммы, то их скалярное произведение тоже можно записать в виде суммы.* Т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{b}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}})$$

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2) = (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_1) + (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_2)$$



5) Скалярное произведение **вектора на себя** (скалярный квадрат вектора) равно **квадрату его длины**: $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}) = |\overline{\mathbf{a}}|^2$

6) *Ненулевые векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю* (критерий перпендикулярности векторов).

7) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *имеют координаты:* $\overline{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$,

то

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,. \tag{1}$$

Формулу (1) называют *выражением скалярного произведения через декартовы координаты векторов*.

8) *Если под действием постоянной силы* $\overline{\mathbf{F}}$ *точка перемещается по прямой из точки* M_1 *в* M_2, *то работа силы* $\overline{\mathbf{F}}$ *будет равна* $A = \left(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{M_1 M_2}}\right)$ (физический смысл скалярного произведения).

Скалярным произведением вычисляется:

1. Длина вектора $\overline{a}$ **:** $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$ **;**

2. Проекция вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ **:**

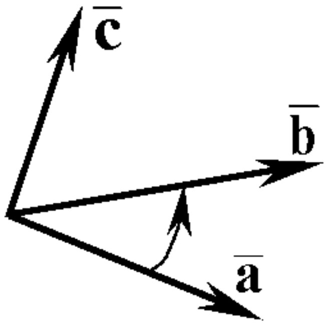
$$np_{\overline{b}}\,\overline{a} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{\left|\overline{b}\right|};$$

3. Угол между векторами $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ **:**

$$\cos\left(\overline{a}, \wedge \overline{b}\right) = \frac{\left(\overline{a}, \overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}$$

2. Векторное произведение векторов

Тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ *и* $\bar{c}$ *называется правой, если поворот от вектора* $\bar{a}$ *к вектору* $\bar{b}$ *на меньший угол виден из конца вектора* $\bar{c}$ *против хода часовой стрелки.*



Правило правой руки. Если расположить четыре пальца правой руки в сторону кратчайшего поворота

от вектора $\bar{a}$ *к вектору* $\bar{b}$,

то большой палец покажет расположение вектора $\bar{c}$.

Векторным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *называется* ***вектор*** $\bar{c}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, *где* φ *– угол между векторами* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$;

2) *вектор* $\bar{c}$ *ортогонален векторам* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$;

3) *тройка векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *и* $\bar{c}$ *– правая.*

Если хотя бы один из векторов $\bar{a}$ *или* $\bar{b}$ *нулевой, то их векторное произведение полагают равным нулевому вектору.*

Обозначают $[\bar{a},\bar{b}]$ или $\bar{a}\times\bar{b}$.

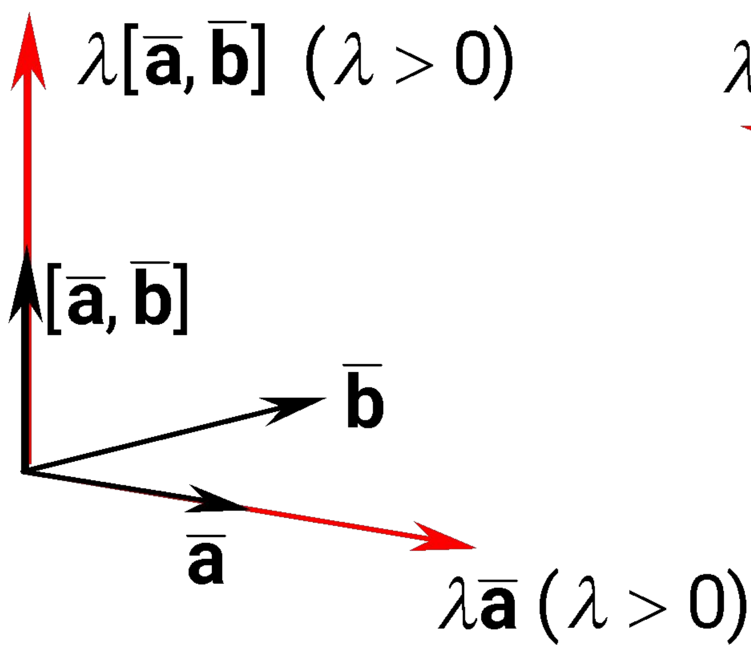
СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

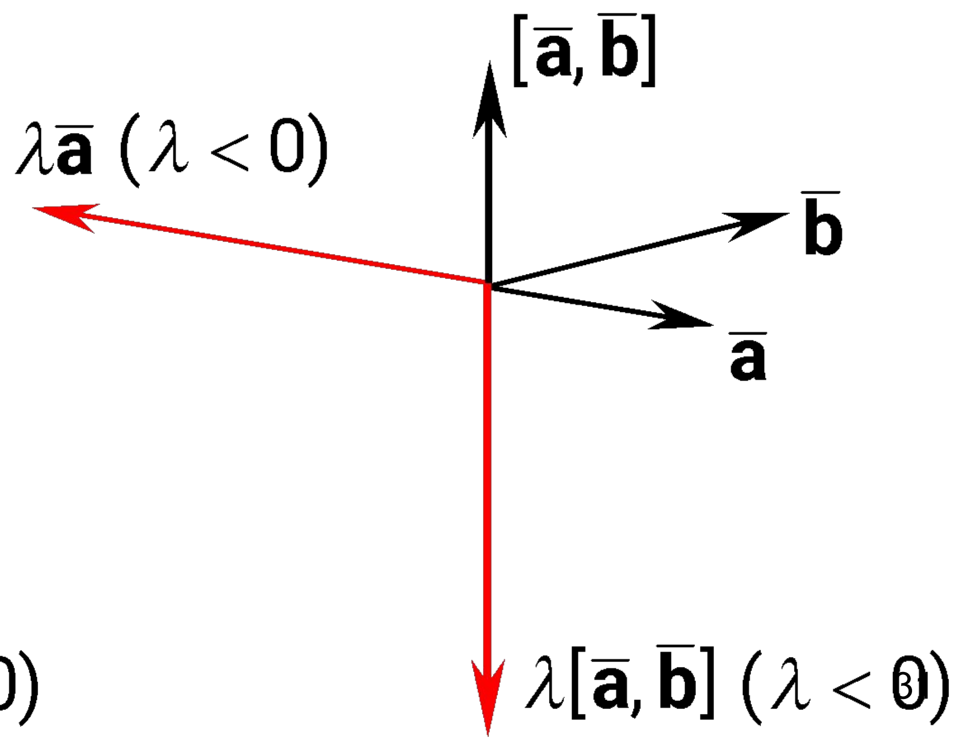
1) *При перестановке векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *их векторное произведение меняет знак*, т.е.

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = -[\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}].$$

2) *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак векторного произведения*. Т.е.

$$[\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}] = \lambda[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}].$$





3) *Если один из векторов записан в виде суммы, то векторное произведение тоже можно записать в виде суммы*. А именно: $[\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}] = [\bar{a}_1, \bar{b}] + [\bar{a}_2, \bar{b}]$,

$$[\bar{a}, \bar{b}_1 + \bar{b}_2] = [\bar{a}, \bar{b}_1] + [\bar{a}, \bar{b}_2].$$

4) *Ненулевые векторы* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *коллинеарные тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору* (Критерий коллинеарности векторов).

5) *Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах* (Геометрический смысл векторного произведения).

6) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *имеют координаты:* $\overline{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, *то*

$$[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

7) (Механический смысл векторного произведения). *Если вектор* $\overline{\mathbf{F}}$ *это сила, приложенная к точке* M, *то векторное произведение* $\left[\overline{\mathbf{OM}}, \overline{\mathbf{F}}\right]$ *представляет собой момент силы* $\overline{\mathbf{F}}$ *относительно точки* O.

3. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *называется* ***число***, *равное скалярному произведению вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на векторное произведение векторов* $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$, *т.е.* $(\bar{\mathbf{a}},[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}])$.

Обозначают: $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})$ или $\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{c}}$.

СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1) *При циклической перестановке векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ *их смешанное произведение не меняется*, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}})=(\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}).$$

2) *При перестановке любых двух соседних векторов их смешанное произведение меняет знак.*

3) *Числовой множитель любого из трех векторов можно вынести за знак смешанного произведения.* Т.е.

$$(\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{a}},\lambda\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\lambda\bar{\mathbf{c}})=\lambda(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}).$$

4) *Если один из векторов записан в виде суммы, то смешанное произведение тоже можно записать в виде суммы.* А именно:

$$(\bar{\mathbf{a}}_1+\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})+(\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}),$$

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_1+\bar{\mathbf{b}}_2,\bar{\mathbf{c}})=(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_1,\bar{\mathbf{c}})+(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}_2,\bar{\mathbf{c}}),$$

$$(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}_1+\bar{\mathbf{c}}_2)=(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}_1)+(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}_2).$$

5) *Ненулевые векторы* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ ***компланарны***
тогда и только тогда, когда их
смешанное произведение равно нулю
(Критерий компланарности векторов).

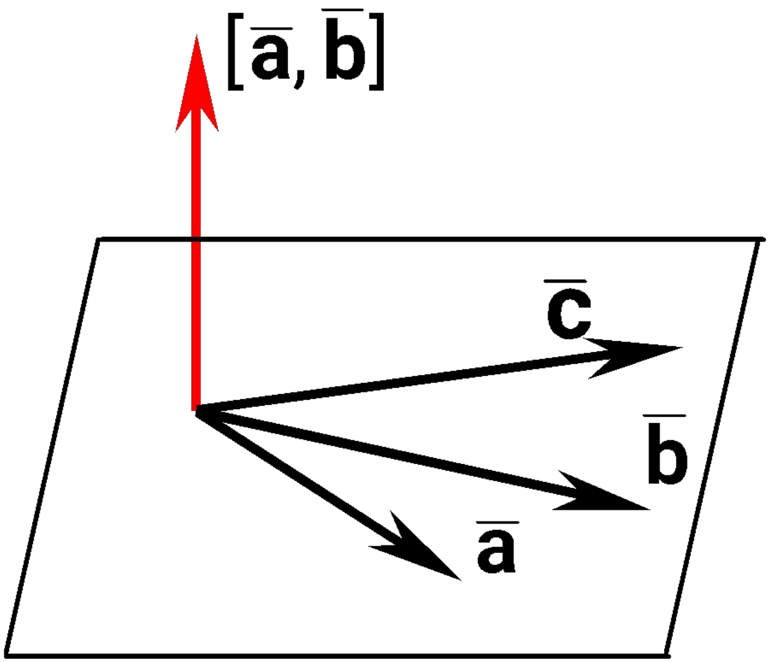


рис. 1

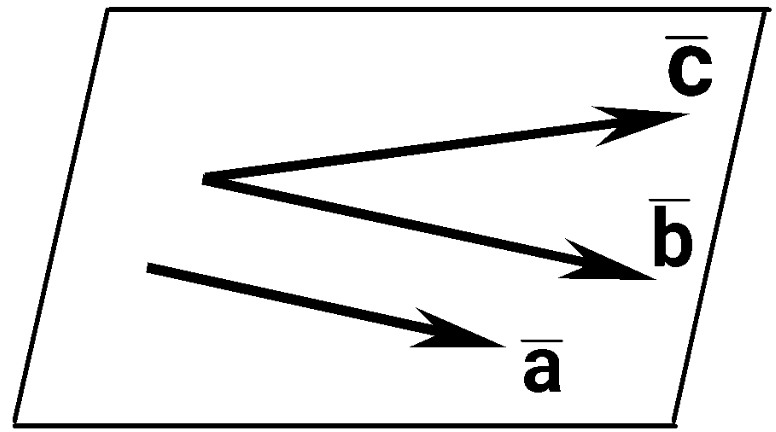


рис. 2

6) *Если* $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) > 0$, *то векторы* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ *образуют* *правую тройку*.

Если $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) < 0$, *то тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ – *левая*.

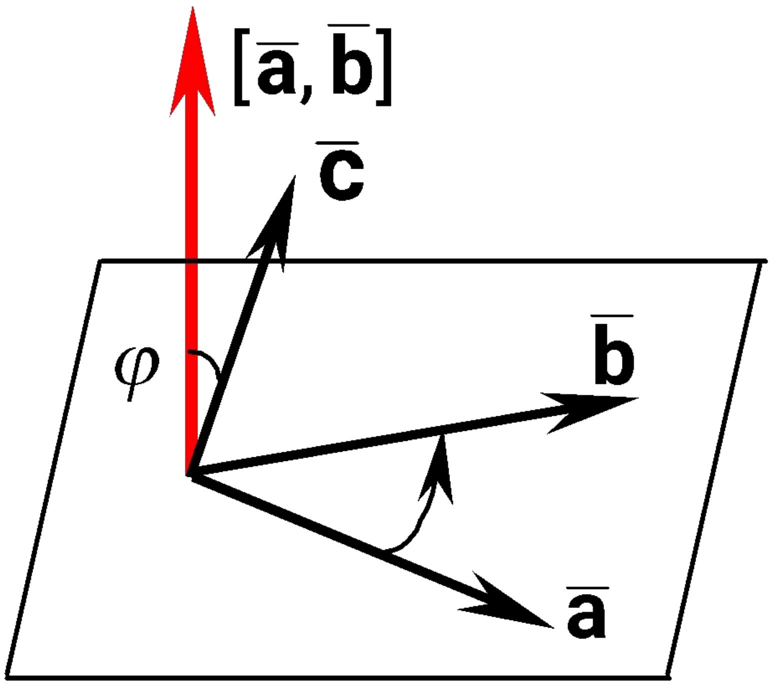


рис. 3

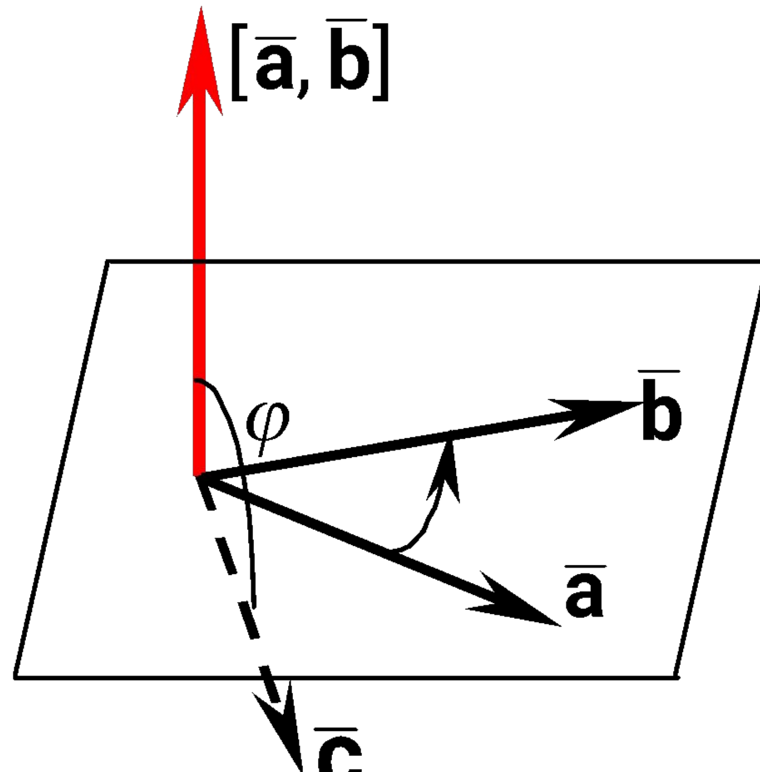


рис.4

7) ***Модуль смешанного произведения*** *некомпланарных векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *равен* ***объему параллелепипеда****, построенного на этих векторах*

(Геометрический смысл смешанного произведения).

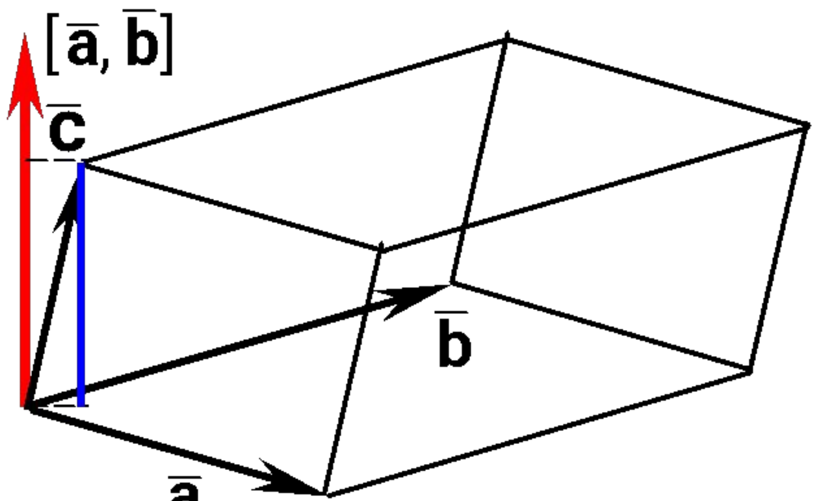


рис. 5

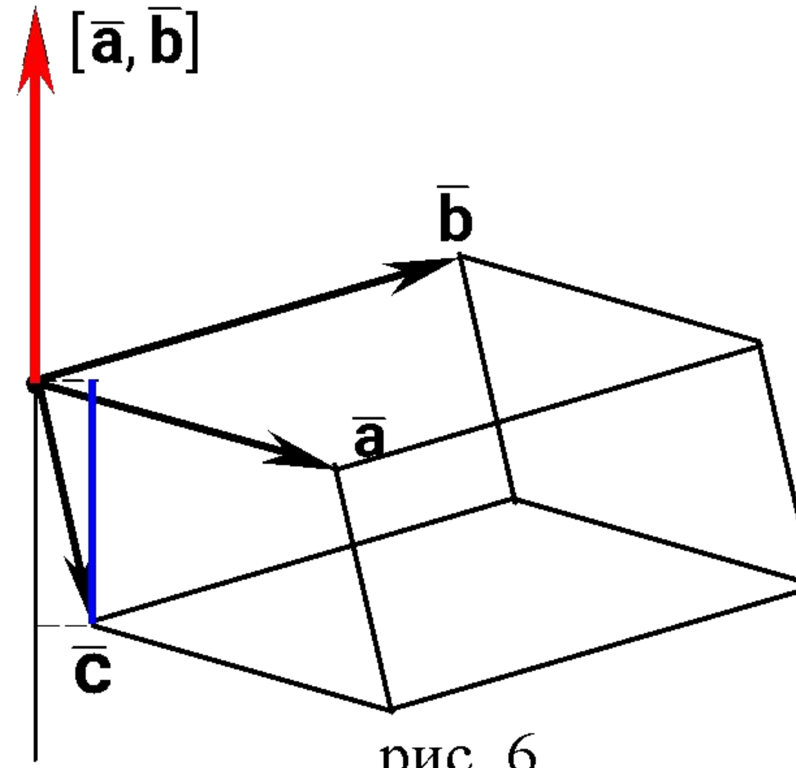


рис. 6

8) (Следствие свойства 7). *Объем пирамиды, построенной на векторах* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ *равен* $\frac{1}{6}$ *модуля их смешанного произведения.*

9) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ *имеют координаты:* $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\bar{\mathbf{c}} = \{c_x; c_y; c_z\}$, *то*

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$