Нелинейная оптика - 1

1. Литература по курсу
2. Цели и задачи курса
3. Уравнения Максвелла в нелинейной среде
4. Поляризация и восприимчивость вещества

Литература по курсу

1. Р. Шен, «Принципы нелинейной оптики»
2. Д.Н. Клышко, «Физические основы квантовой электроники»
3. D.L. Mills, "Nonlinear Optics"
4. Ф. Цернике и Дж. Мидвинтер, «Прикладная нелинейная оптика»
5. M. Wegener, "Extreme Nonlinear Optics"

Цели и задачи курса

- от статики и микроволн к оптическому диапазону, лазеры
- параметрические и непараметрические нелинейные процессы
- феноменология vs микроскопика
- стационарная и нестационарная нелинейная оптика
- traditional vs extreme nonlinear optics

Уравнения Максвелла в нелинейной среде

В рамках классического описания, для электрической и магнитной компонент электромагнитного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\qquad \nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho,\qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

Плотности тока и заряда, $\mathbf{j}(\mathbf{r},t),\ \rho(\mathbf{r},t)$, связаны законом сохранения заряда:

$$\nabla\cdot\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

В общем случае, плотности тока и заряда раскладываются по мультиполям (см. курс электродинамики)

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+c\,\nabla\times\mathbf{M}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{Q})+\ldots$$

$$\rho = \rho_0-\nabla\cdot\mathbf{P}-\mathbf{Q}(\nabla\cdot\mathbf{Q})$$

Уравнения Максвелла в нелинейной среде

На оптических частотах намагниченность $\mathbf{M}=0$,

статическая плотность заряда $\rho_0=0$

тогда $$\mathbf{j}=\mathbf{j}_0+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t},\quad \rho=-\nabla\cdot\mathbf{P}$$

где в зависящую от времени поляризацию при необходимости включены нелокальные поправки от квадруполя.

Уравнения Максвелла принимают вид

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}\right)+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0$$

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}\right)=0,\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

Распространение волн в нелинейной среде

Общий вид волнового уравнения в нелинейной среде:

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$$

Предположим, что $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ можно разложить по плоским волнам:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\sum_i \mathbf{E_i}(\mathbf{k_i},\omega_i)=\sum_i \overrightarrow{\mathcal{E}_i}\mathbf{e}^{i(\mathbf{k_i}\cdot\mathbf{r}-\omega_i t)},$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\mathbf{P}^{(\mathbf{1})}(\mathbf{r},t)+\mathbf{P}^{(\mathbf{NL})}(\mathbf{r},t),$$

$$\mathbf{P}^{(\mathbf{1})}(\mathbf{r},t)=\sum_i \mathbf{P_i}(\mathbf{k_i},\omega_i)=\sum_i \chi^{(1)}(\omega_i)\cdot\mathbf{E_i}(\mathbf{k_i},\omega_i),$$

$$\mathbf{P}^{(\mathbf{NL})}(\mathbf{r},t)=\sum_{n\geq 2}\mathbf{P}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{r},t)=\sum_m \mathbf{P}^{(\mathbf{NL})}(\mathbf{k_m},\omega_m)=\sum_m \overrightarrow{\mathcal{P}}^{(NL)}\mathbf{e}^{i(\mathbf{k_m}\cdot\mathbf{r}-\omega_m t)},$$

Амплитуды поля и компонент нелинейной поляризации – не зависят от времени (проблема описания нестационарных нелинейных процессов вынесена за скобки)

Распространение волн в нелинейной среде

Вспомнив, что

$$\varepsilon(\omega_i) \equiv 1 + 4\pi\chi^{(1)}(\omega_i)$$

исходное волновое уравнение

$$\left[\nabla\times(\nabla\times) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$$

запишется в виде системы уравнений

$$\left[\nabla\times(\nabla\times) - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right]\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2}\mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{k}_m,\omega_m=\omega)$$

Замечания:

1. В общем виде, нелинейная поляризация $\mathbf{P}^{(NL)}$ определяется всеми полями $\mathbf{E}_n(\mathbf{k}_n,\omega_n)$
2. Это означает, что перед нами система связанных уравнений
3. Связанность уравнений означает перераспределение энергии между различными компонентами поля
4. Частоты справа и слева 0динаковые, а волновые вектора могут быть разными (закон сохранения энергии в стационарном случае и возможность нарушения закона сохранения импульса)

Общий вид линейной восприимчивости

В линейном случае поляризация определяется линейной восприимчивостью

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}',t')d\mathbf{r}'dt'$$

(учет нелокальности и нестационарности)

Если электромагнитная волна является плоской монохроматической,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)=\mathbf{E}_0\exp\left(i\mathbf{kr}-i\omega t\right)$$

то поляризация

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\mathbf{P}(\mathbf{k},\omega)=\chi^{(1)}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)$$

где линейная восприимчивость

$$\chi^{(1)}(\mathbf{k},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^{(1)}(\mathbf{r},t)\exp\left(-i\mathbf{kr}+i\omega t\right)d\mathbf{r}dt$$

и линейная проницаемость

$$\varepsilon(\mathbf{k},\omega)=1+4\pi\chi^{(1)}(\mathbf{k},\omega)$$

Общий вид нелинейной восприимчивости

В нелинейном случае разложим поляризацию по степеням внешнего поля

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r},t)+\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{r},t)+\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{r},t)+\dots$$

или

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}',t')d\mathbf{r}'dt'+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\chi^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t';\mathbf{r}-\mathbf{r}'',t-t''):\mathbf{E}(\mathbf{r}',t')\mathbf{E}(\mathbf{r}'',t'')d\mathbf{r}'dt'd\mathbf{r}''dt''+\dots$$

Если взаимодействующие электромагнитные волны являются плоскими монохроматическими, т.е. полное поле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\sum_i\mathbf{E}(\mathbf{k}_i,\omega_i)$$

то после преобразования Фурье полная поляризация примет вид

$$\mathbf{P}(\mathbf{k},\omega)=\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{k},\omega)+\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{k},\omega)+\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{k},\omega)+\dots$$

где

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{k},\omega)=\chi^{(1)}(\mathbf{k},\omega)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega),$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{k},\omega)=\chi^{(2)}(\mathbf{k}=\mathbf{k}_i+\mathbf{k}_j,\omega=\omega_i+\omega_j):\mathbf{E}(\mathbf{k}_i,\omega_i)\mathbf{E}(\mathbf{k}_j,\omega_j)$$

Связанные волны в нелинейной среде

Рассмотрим пример трехволнового процесса сложения частоты

Участвуют три волны,

$$\mathbf{E}(\mathbf{k_1},\omega_1),\mathbf{E}(\mathbf{k_2},\omega_2),\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega=\omega_1+\omega_2)$$

Ограничиваясь дипольным приближением, рассматриваем только компоненты квадратичной поляризации вида

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega_l)=\chi^{(2)}(\omega_l=\omega_m\pm\omega_n):\mathbf{E}(\mathbf{k}_m,\omega_m)\mathbf{E}(\mathbf{k}_n,\omega_n)$$

а компоненты квадратичной восприимчивости подчиняются следующим перестановочным соотношениям:

$$\chi^{(2)}_{ijk}(\omega=\omega_1+\omega_2)=\chi^{(2)}_{jki}(\omega_1=-\omega_2+\omega)=\chi^{(2)}_{kij}(\omega_2=\omega-\omega_1),$$

Связанные волны в нелинейной среде

Система связанных уравнений для трехволнового процесса примет вид:

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)-\frac{\omega_1^2}{c^2}\varepsilon_1\right]\mathbf{E_1}(\mathbf{k}_1,\omega_1)=\frac{4\pi\omega_1^2}{c^2}\mathbf{P}^{(2)}(\omega_1)=\frac{4\pi\omega_1^2}{c^2}\chi^{(2)}(\omega_1=-\omega_2+\omega):\mathbf{E_2^*}(\mathbf{k}_2,\omega_2)\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega),$$

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)-\frac{\omega_2^2}{c^2}\varepsilon_2\right]\mathbf{E_2}(\mathbf{k}_2,\omega_2)=\frac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\mathbf{P}^{(2)}(\omega_2)=\frac{4\pi\omega_2^2}{c^2}\chi^{(2)}(\omega_2=\omega-\omega_1):\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{E}_1^*(\mathbf{k}_1,\omega_1),$$

$$\left[\nabla\times(\nabla\times)-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right]\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)=\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\mathbf{P}^{(2)}(\omega)=\frac{4\pi\omega^2}{c^2}\chi^{(2)}(\omega=\omega_1+\omega_2):\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1,\omega_1)\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2,\omega_2),$$