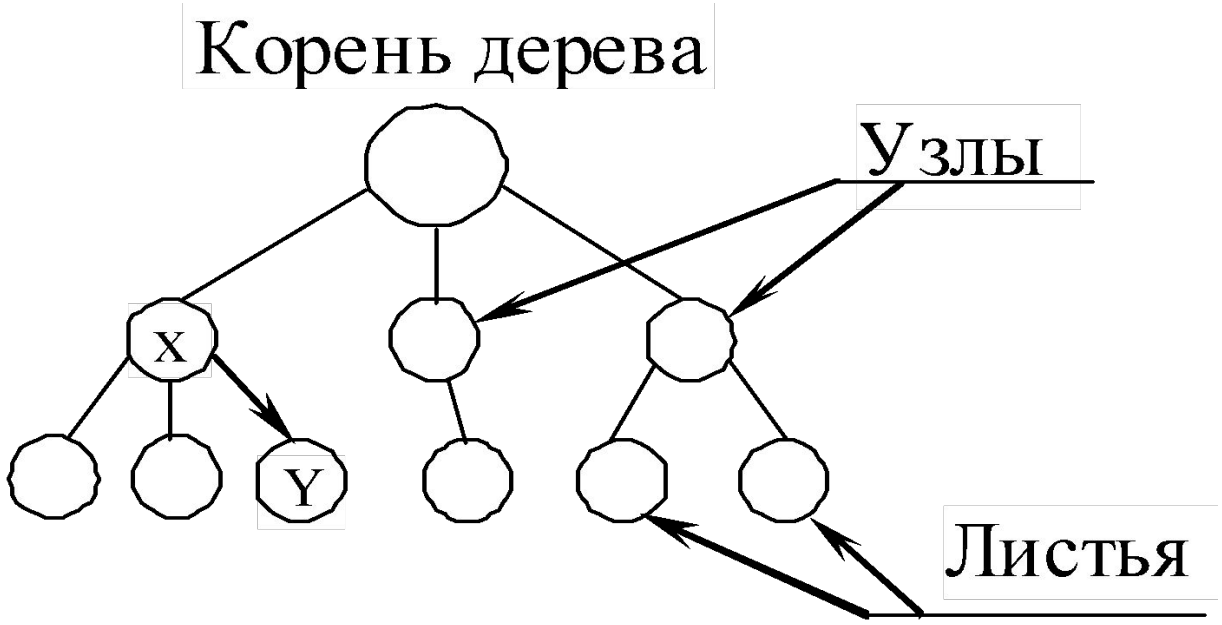
Нелинейные структуры данных

Введение в динамические данные двух и более указателей позволяет получить нелинейные структуры. Наиболее распространенными являются структуры, имеющие следующий вид:



Такая структура получила название «дерево».

Дерево состоит из элементов, называемых ***узлами*** (вершинами). Узлы соединены между собой дугами. В случае $X \rightarrow Y$, вершина X называется ***родителем***, а Y – ***сыном*** (*дочерью*).

Дерево имеет единственный узел, не имеющий родителей (ссылок на этот узел), который называется ***корнем***. Любой другой узел имеет ровно одного родителя, т.е. на каждый узел дерева имеется ровно одна ссылка.

Узел, не имеющий сыновей, называется ***листом***.

Внутренний – это узел, не являющийся ни листом, ни корнем.

Порядок узла равен количеству его узлов-сыновей.

Степень дерева – максимальный порядок его узлов.

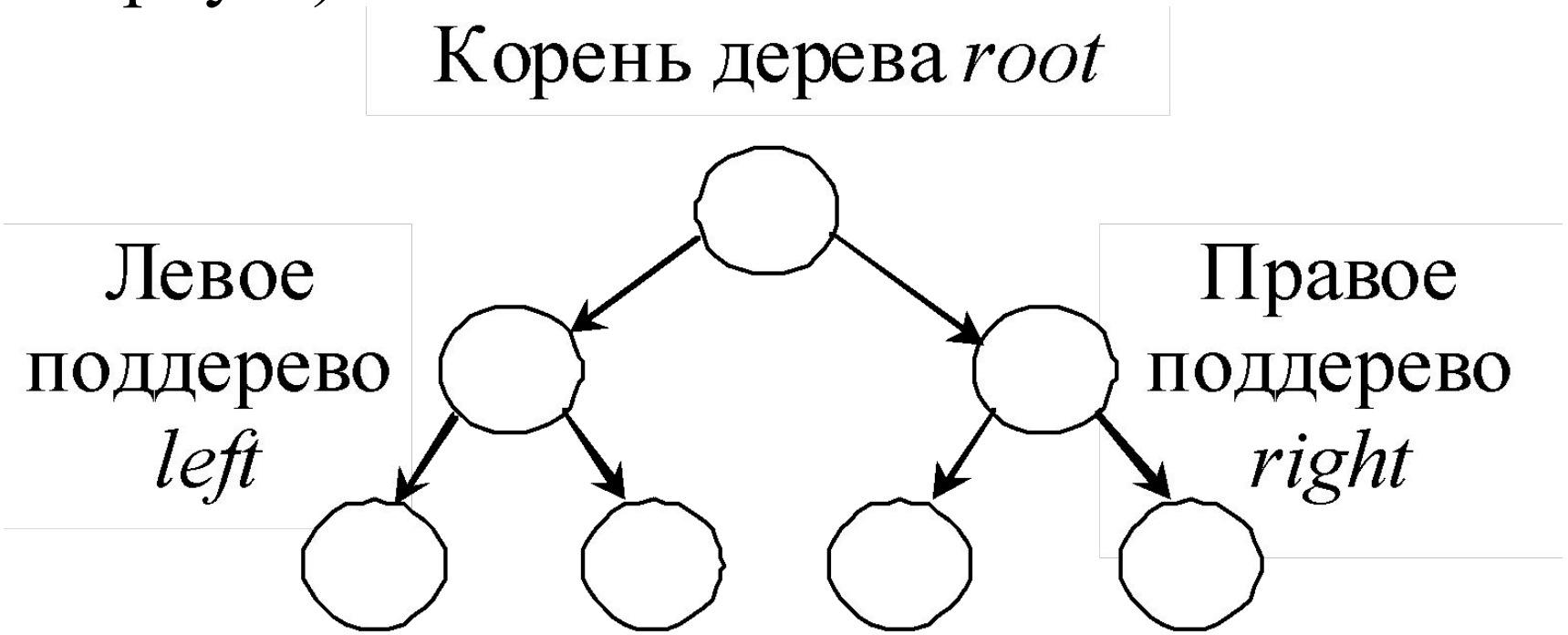
Высота (глубина) узла равна числу его родителей плюс один.

Высота дерева – это наибольшая высота его узлов.

Бинарные деревья

Бинарное – это дерево, в котором каждый узел-родитель содержит, кроме данных, не более двух сыновей (левый и правый).

Пример бинарного дерева (корень обычно изображается сверху, хотя изображение можно и перевернуть):



Для работы с бинарными деревьями объ-является структурный тип (шаблон) следующего вида:

struct Tree {

Информационная Часть (***info***)

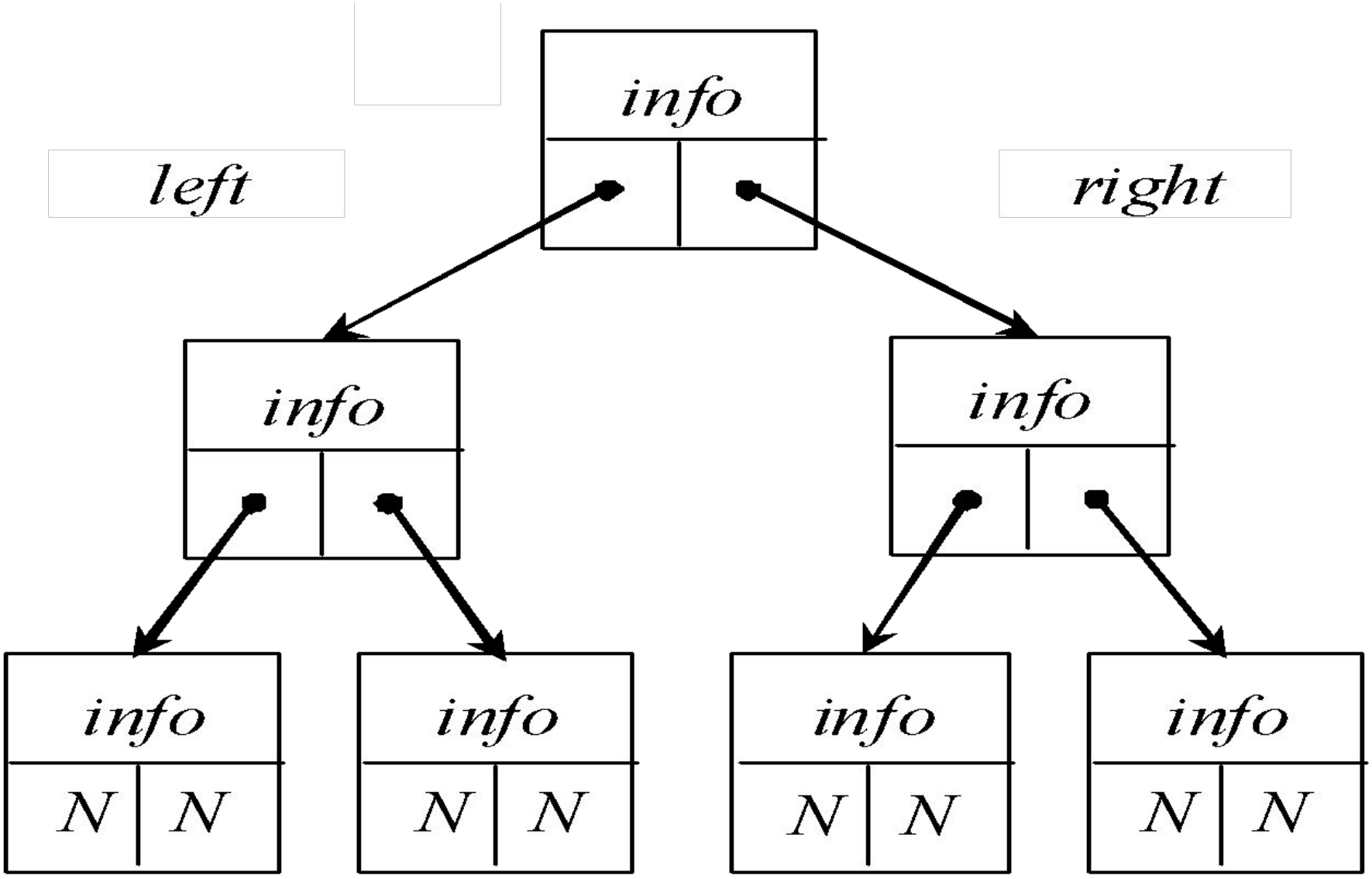
Tree *left, *right; – *Адресная Часть*

} * root;

Адресная часть – указатели на левую ***left*** и правую ***right*** ветви;

root – указатель корня.

Такая структура данных организуется следующим образом (*N* – *NULL*):



Высота дерева определяется количеством уровней, на которых располагаются его узлы.

Если дерево организовано таким образом, что для каждого узла все ключи его левого поддерева меньше ключа этого узла, а все ключи его правого поддерева – больше, оно называется ***деревом поиска***. Одинаковые ключи здесь не допускаются.

Древовидные структуры удобны и эффективны для быстрого поиска информации.

Сбалансированными называются деревья, для каждого узла которых количество узлов в его левом и правом поддеревьях различаются не более чем на единицу.

Дерево является ***рекурсивной*** структурой данных, поскольку каждое его поддерево также является деревом. В связи с этим действия с такими структурами чаще всего описываются с помощью рекурсивных алгоритмов.

Основные алгоритмы

При работе с деревьями необходимо уметь:

– построить (создать) дерево;

– добавить новый элемент;

– просмотреть все элементы дерева;

– найти элемент с указанным значением;

– удалить заданный элемент;

– освободить память.

Обычно бинарное дерево строится сразу в виде ***дерева поиска***.

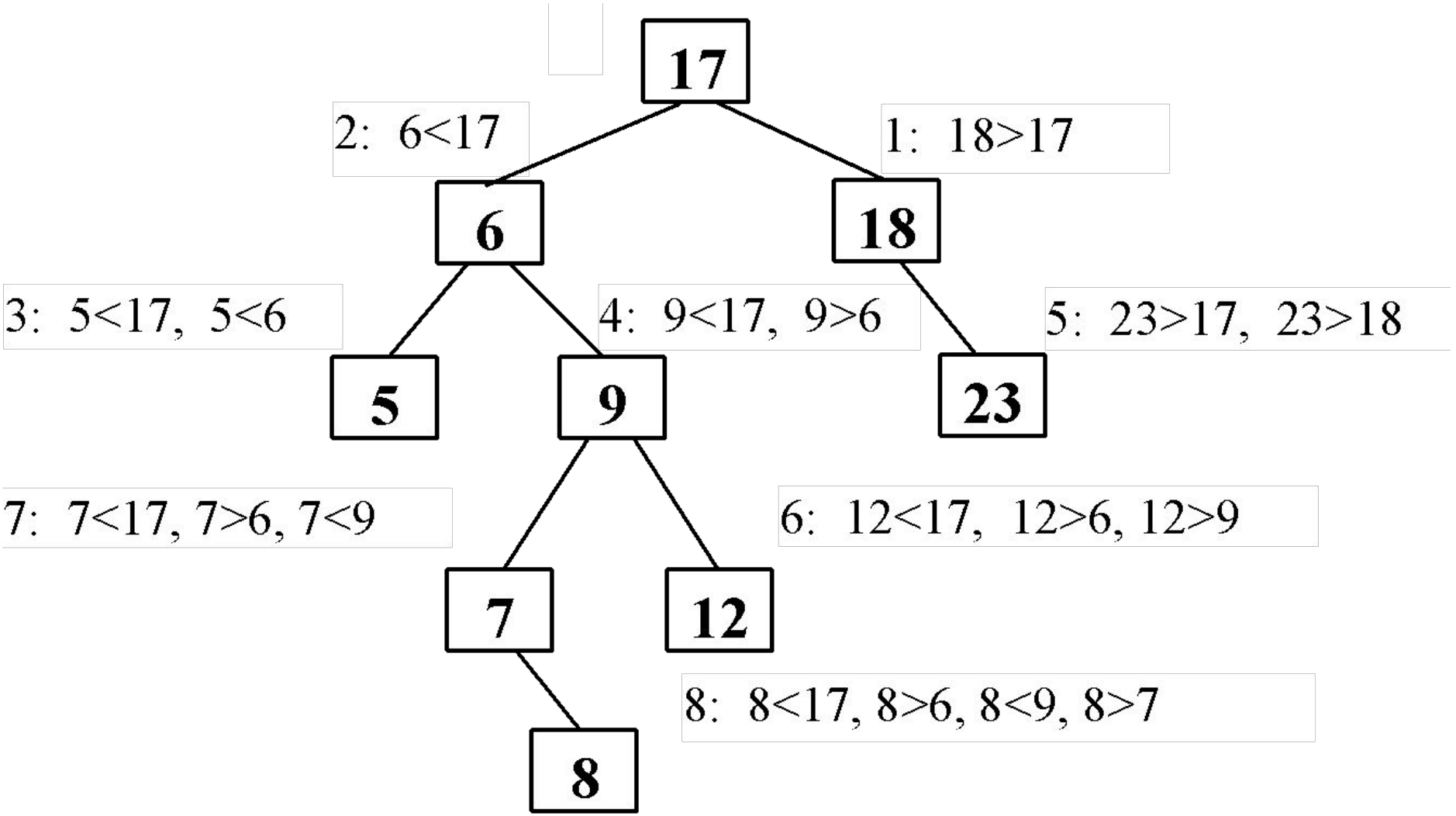
Все алгоритмы работы с деревьями будем рассматривать для данных, информационной частью которых являются целые числа (***ключи***).

Структурный тип будет иметь вид:

```
struct  Tree  {
    int   info;
    Tree  *left,  *right;
} *root;
```

Формирование дерева

Построим дерево поиска для следующих ключей 17, 18, 6, 5, 9, 23, 12, 7, 8:



Вставка нового элемента

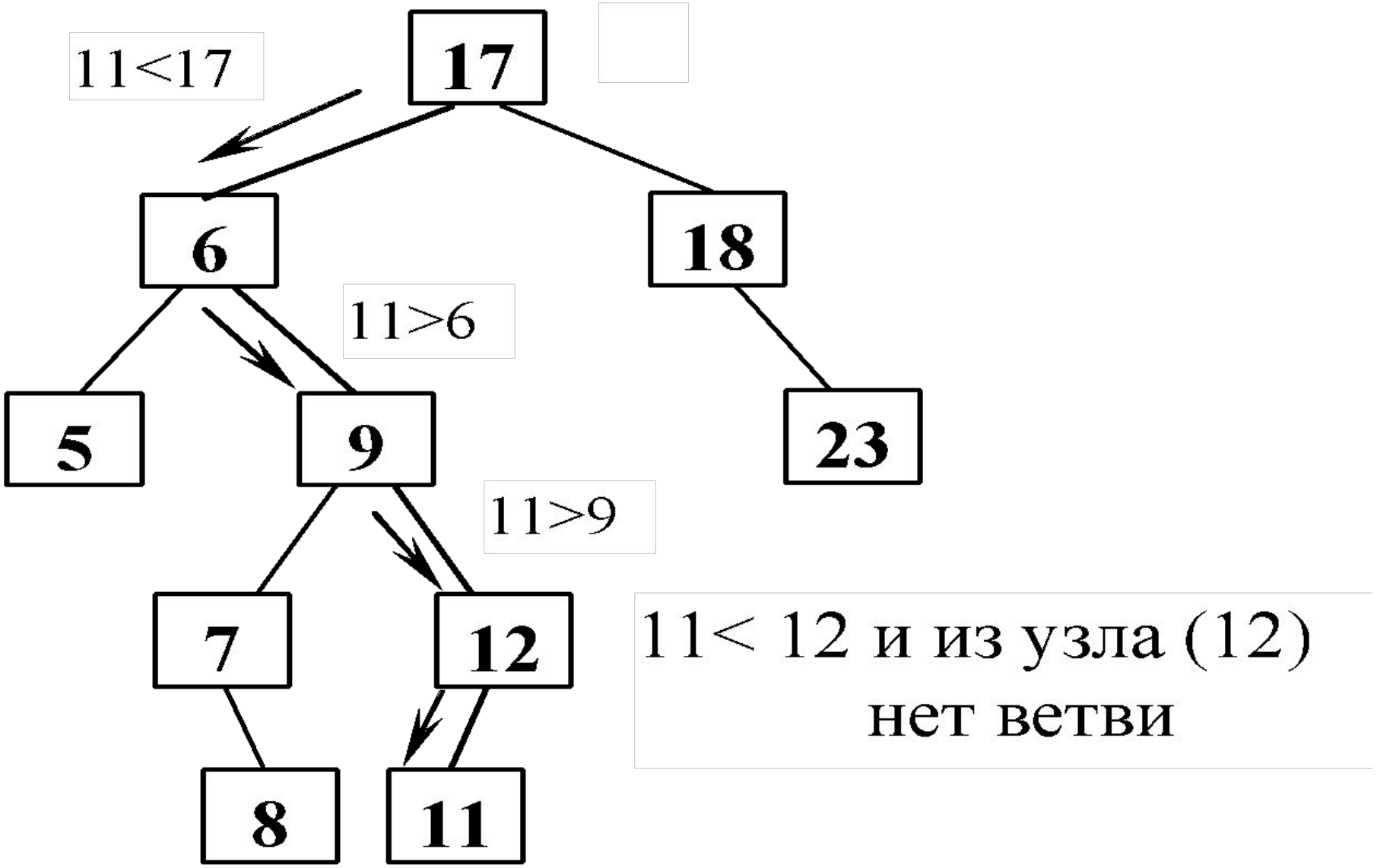
Для того чтобы вставить новый элемент в дерево, необходимо найти для него место.

Для этого, начиная с корня, сравниваем значения узлов (***t -> info,*** где ***t*** – текущий указатель) со значением нового элемента (***b***).

Если ***b < t -> info***, то идем по левой ветви, в противном случае – по правой ветви.

Когда дойдем до узла, из которого не выхо-дит нужная ветвь для дальнейшего поиска, это означает, что место под новый элемент найдено.

Поиск места для узла **11** в построенном дереве:



Функция создания дерева, ключами которого являются ***целые положительные*** числа:

```
Tree* Create (Tree *root)  {
    Tree *Prev, *t;
// Prev – родитель текущего элемента
    int b, find;
    if ( ! root ) {              // Если дерево не создано
        cout << " Input Root :  ";
        cin >> b;
        root = List (b);    /* Создаем адрес корня root,
   который первоначально – лист*/
    }
```

```
//---------- Добавление элементов ----------
while (1) {                 //  while (true)
    cout << "Input Info :  ";
    cin >> b;
    if (b < 0) break;
// Признак выхода – отрицательное число
    t = root;
// Текущий указатель установили на корень
    find = 0;
// Признак поиска
```

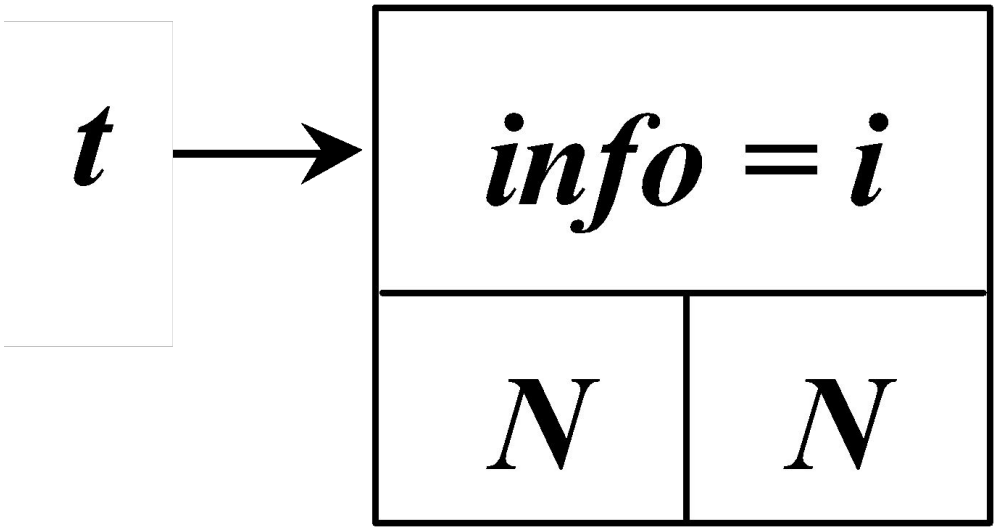
```
    while ( t && ! find) {
        Prev = t;
        if( b == t->info)
                find = 1;
// Ключи должны быть уникальны
        else
            if ( b < t -> info ) t = t -> left;
                else   t = t -> right;
    }
```

```
// Если нашли место с адресом Prev
  if ( ! find ) {          //  if (find == 0)
// Создаем новый узел, являющийся листом
      t = List ( b );
// и присоединяем его, либо
      if ( b < Prev -> info )
// на левую ветвь,
         Prev -> left = t;
// либо на правую ветвь
      else    Prev -> right = t;
  }
   }            // Конец цикла while ( 1 )
    return root;
}
```

В функции ***List*** создается новый элемент – лист (***i*** – информационная часть, в нашем случае ***ключ***):

```
Tree* List (int i)
{
Tree *t = new Tree;// Захват памяти
t -> info = i;        // Формирование ИЧ
// Формирование АЧ
t -> left = t -> right = NULL;
    return t;
}
```

В результате выполнения функции ***List*** создается новый элемент-лист (*N – NULL*):



Участок кода с обращением к функции ***Create*** будет иметь вид:

```
…
Tree *root = NULL;        // Указатель корня
…
root = Create (root);
…
```

Рассмотрим функцию добавления ***одного*** листа в дерево:

```
void Add_List (Tree *root, int key)
{
    Tree *prev, *t;
    bool find = true;          // int find = 1;
    t = root;
    while ( t && find) {
prev = t;
if( key == t -> info) {
                find = false;        // find = 0;
    cout << " Такой уже есть !“ << endl;
}
```

```
    else
     if ( key < t -> info ) t = t -> left;
     else
          t = t -> right;
}
if (find) {
     t = List(key);
     if ( key < prev -> info )
          prev -> left = t;
     else
          prev -> right = t;
}
}
```

Участок кода с обращением к функции ***Add_List*** будет иметь вид:

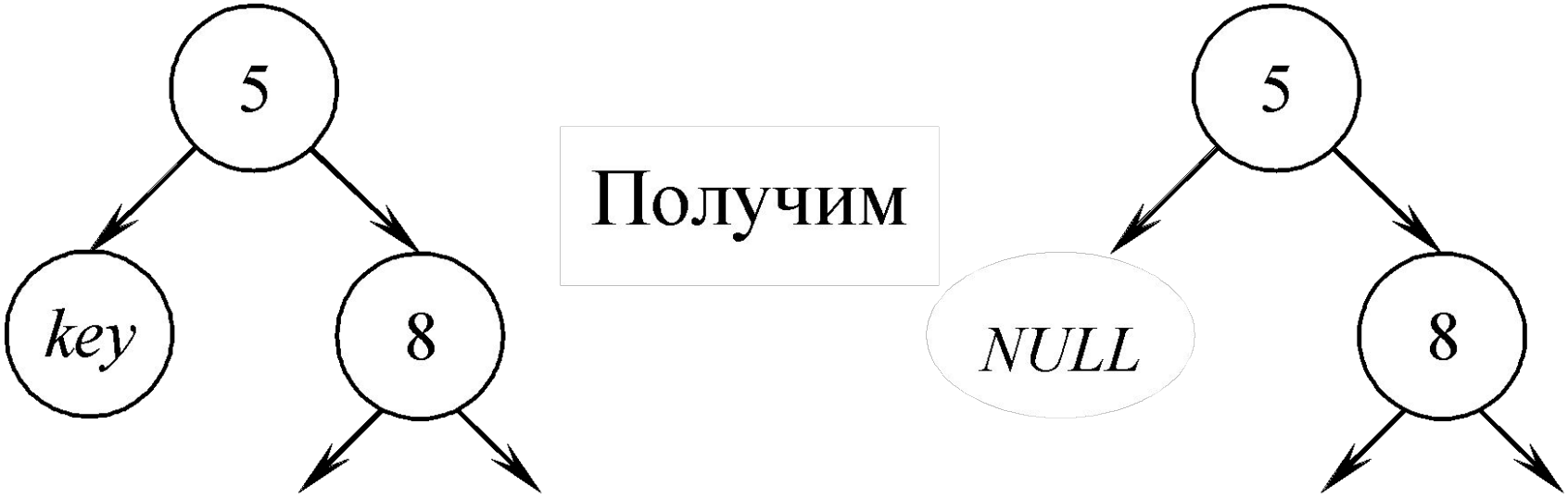
```
    . . .
cout << “ Input info : “;
cin >> in;
if (root == NULL)
    root = List (in);
        else
    Add_List (root, in);
    . . .
```

Удаление узла

Удаление узла из дерева зависит от того, сколько сыновей (потомков) имеет удаляемый узел. Возможны три варианта.

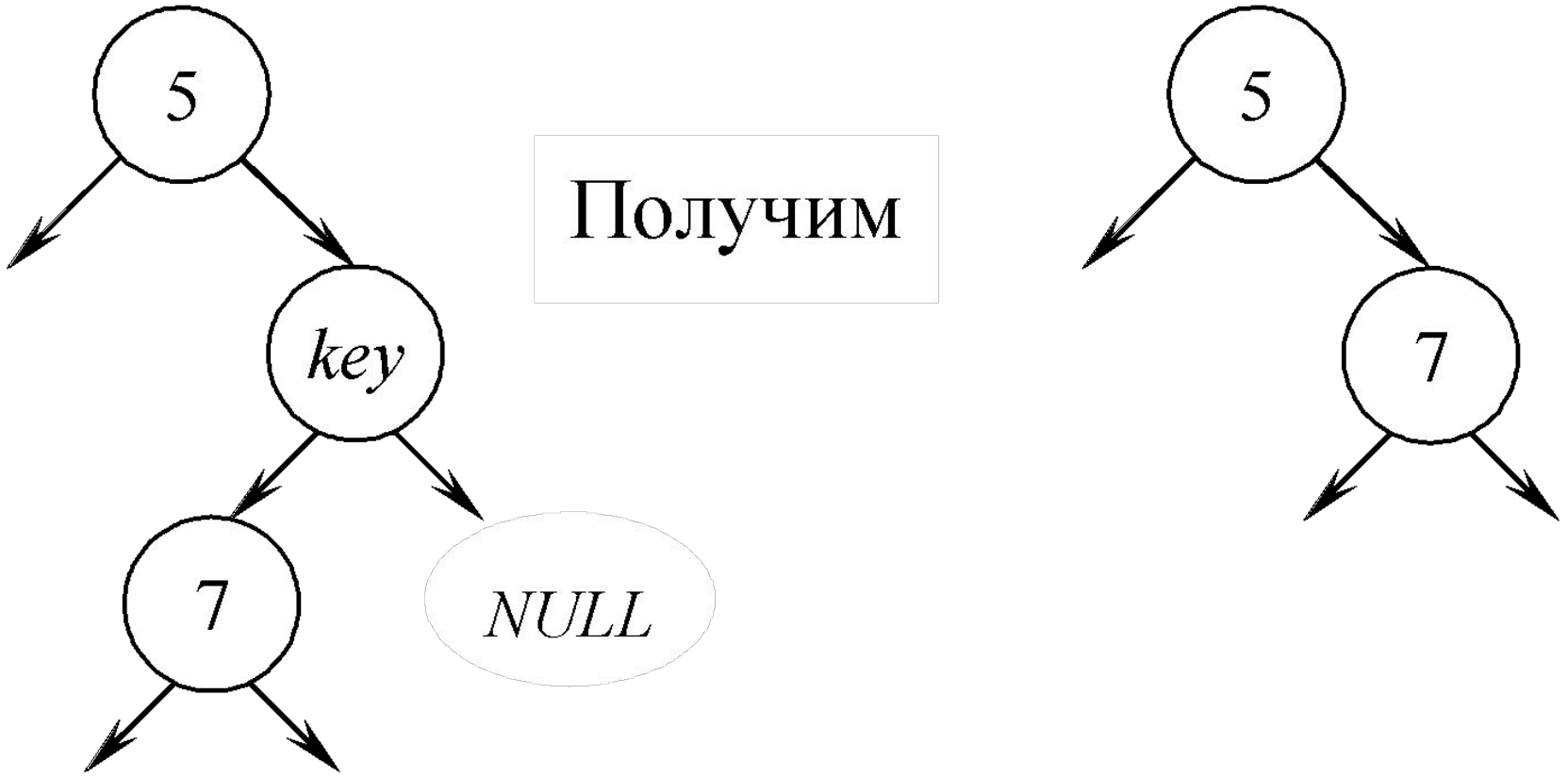
1. Удаляемый узел является ***листом*** – просто удаляем ссылку на него.

Пример схемы удаления ***листа*** с ключом ***key***:



2. Удаляемый узел имеет ***одного потомка***, т.е. из удаляемого узла выходит ровно одна ветвь.

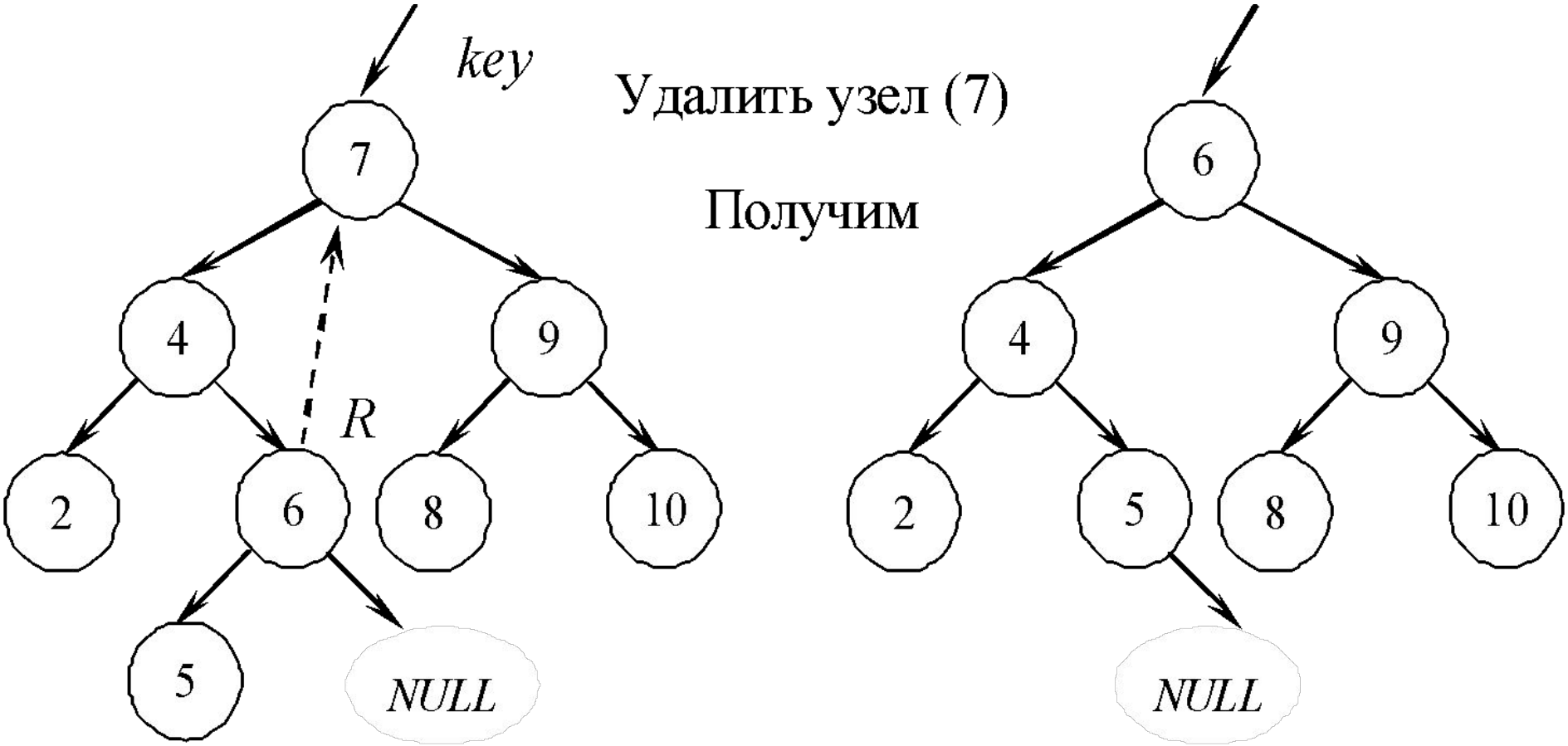
Пример схемы удаления узла ***key***, имеющего одного сына:



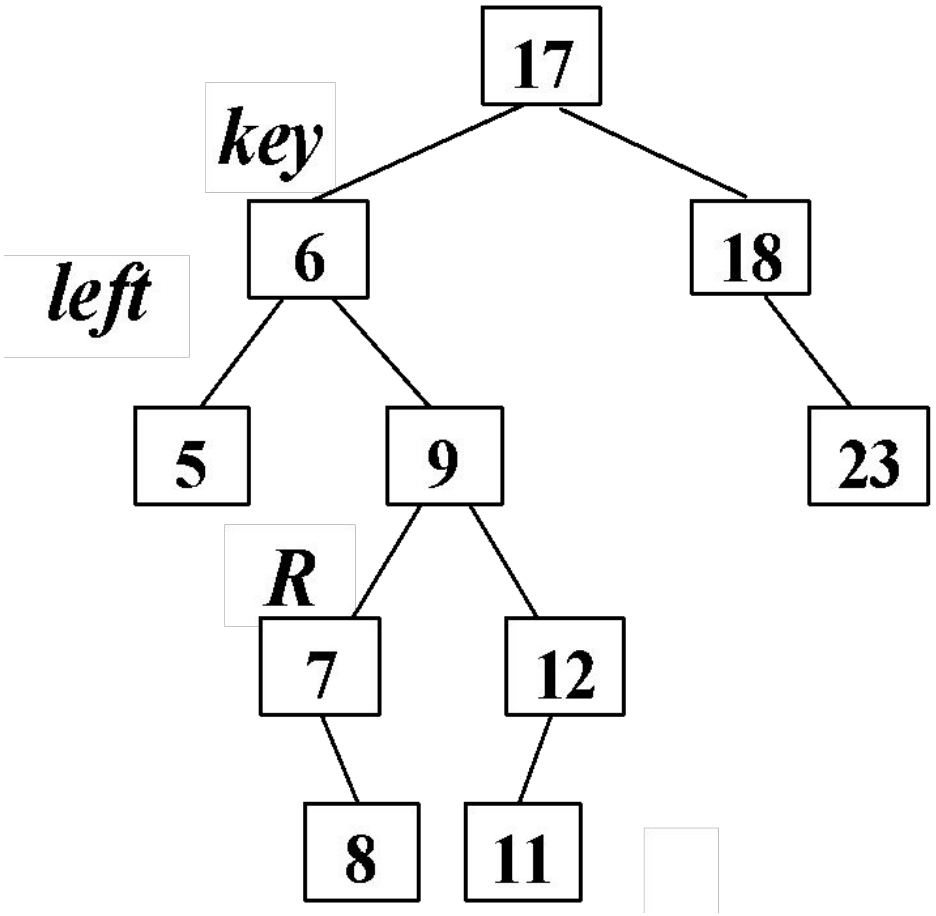
3. Удаление узла, имеющего ***двух сыновей***, сложнее рассмотренных выше.

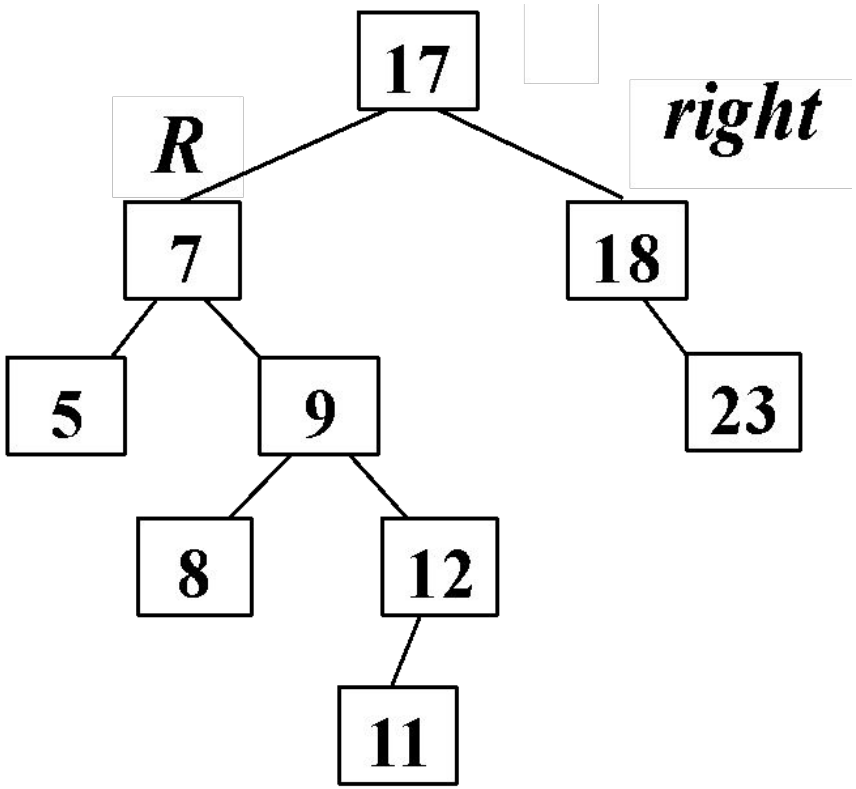
Если ***key*** – удаляемый узел, то его следует заменить узлом ***R***, который содержит либо наибольший ключ в левом поддереве (самый правый, у которого указатель ***right*** равен ***NULL***), либо наименьший ключ в правом поддереве (самый левый, у которого указатель ***left*** равен ***NULL***).

Используя первое условие, находим узел ***R***, который является самым правым узлом поддерева узла ***key***, у него имеется только левый сын:



В построенном ранее дереве удалим узел ***key*** (6), используя второе условие, т.е. ищем самый левый узел в правом поддереве – это узел ***R*** (указатель ***left*** равен ***NULL***):





Функция удаления узла по заданному ключу ***key*** может иметь вид:

```
Tree* Del (Tree *root,  int key)  {

Tree *Del, *Prev_Del, *R, *Prev_R;

/* Del, Prev_Del – удаляемый элемент и его предыдущий (родитель);

R, Prev_R – элемент, на который заменяется удаленный, и его родитель; */

Del = root;

Prev_Del = NULL;
```

```
// Поиск удаляемого элемента и его родителя
while (Del != NULL && Del -> info != key) {
    Prev_Del = Del;
    if (Del -> info > key)  Del = Del -> left;
        else Del = Del -> right;
}
if (Del == NULL) {        // Элемент не найден
    cout << "\n NO Key!“ << endl;
    return root;
}
```

```
// --------- Поиск элемента R для замены ---------
if (Del -> right == NULL) R = Del -> left;
else
    if (Del -> left == NULL) R = Del -> right;
    else {
// Ищем самый правый узел в левом поддереве
        Prev_R = Del;
        R = Del -> left;
        while (R -> right != NULL) {
            Prev_R = R;
            R = R -> right;
        }
```

/* Нашли элемент для замены ***R*** и его родителя ***Prev_R*** */

```
if( Prev_R == Del)
        R -> right = Del -> right;
else {
    R -> right = Del -> right;
    Prev_R -> right = R -> left;
    R -> left = Prev_R;
    }
    }
```

```
    if (Del == root) root = R;
    // Удаляя корень, заменяем его на R
    else
    /* Поддерево R присоединяем к родителю уда-
ляемого узла  */
    if ( Del ->I nfo < Prev_Del -> info)
        Prev_Del -> left = R;   // На левую ветвь
    else
        Prev_Del -> right = R;  // На правую
    cout << " Delete " <<  Del -> info << endl;
    delete  Del;
    return root;
    }
```

Участок программы с обращением к данной функции будет иметь вид

```
…
cout << " Input Del Info :  ";
cin >> key;
root = Del (root, key);
```

Функция просмотра

Рекурсивная функция вывода ***узлов*** дерева:

```
void View ( Tree *t,  int level ) {
if ( t ) {
    View ( t -> right , level+1);
// Вывод узлов правого поддерева
    for ( int i=0; i < level; i++)
            cout << "    ";
    cout << t -> info << endl;
    View ( t -> left , level+1);
// Вывод узлов левого поддерева
}
}
```

Обращение к функции ***View*** будет иметь вид

View (root, 0);

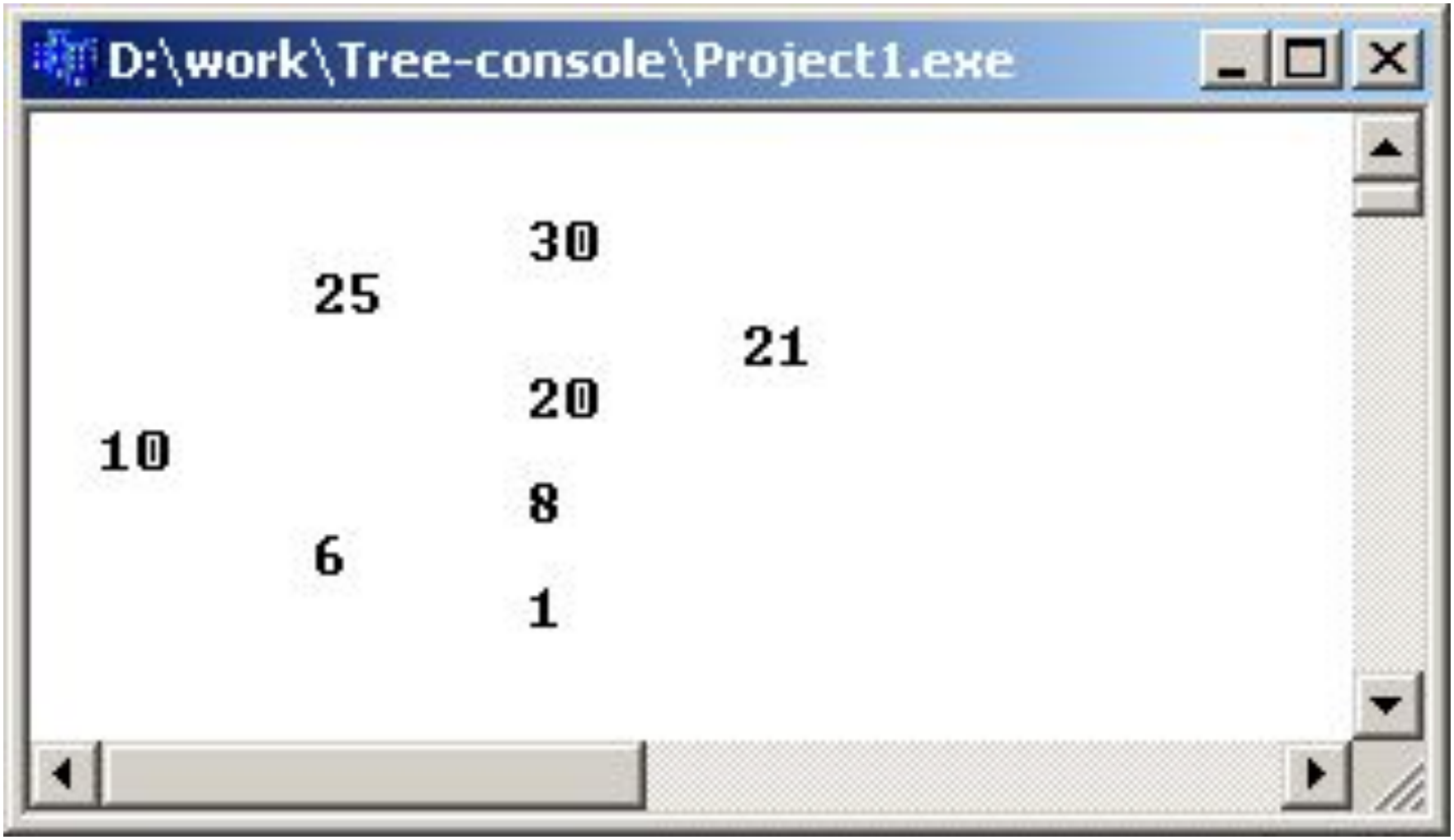
Второй параметр определяет уровень (***level***), на котором находится узел.

Корень находится на уровне **0**. Значения узлов выводятся по горизонтали так, что корень находится слева.

Перед значением узла для имитации структуры дерева выводится количество пробелов, пропорциональное уровню узла.

Если закомментировать цикл печати пробе-лов, ключи будут выведены просто в столбик.

Для ключей **10** (корень), **25**, **20**, **6**, **21**, **8**, **1**, **30**, построенное дерево будет выведено на экран функцией ***View*** в следующем виде:



Освобождение памяти

Функция освобождения памяти, занятой элементами дерева, может быть реализована аналогично рекурсивной функции ***View*** :

```
void Del_All (Tree *t)  {
        if ( t != NULL)  {
            Del_All ( t -> left);
            Del_All ( t -> right);
            delete t;
        }
}
```

Поиск узла с минимальным (макс.) ключом

```
Tree* Min_Key (Tree *p) { // Max_Key
      while (p -> left != NULL)
      p = p -> left;        // p = p -> right;
      return p;
  }
```

Вызов функции для нахождения минимального ключа ***p_min -> info*** :

```
Tree *p_min = Min_Key (root);
```

Для п***остроения сбалансированного дерева поиска*** из ключей необходимо сформировать массив, отсортировать его в порядке возрастания и после этого обратиться к функции

Make_Blns (root, 0, k, a);

k – размер массива.

```
void Make_Blns (Tree **p, int n, int k, int *a)
{
    if (n == k) {
    *p = NULL;
            return;
    }
    else {
            int m = (n + k) / 2;
            *p = new Tree;
            (*p) -> info = a[m];
            Make_Blns ( &(*p) -> left, n, m, a);
            Make_Blns ( &(*p) -> right, m+1, k, a);
    }
}
```

Алгоритмы обхода дерева

Существуют три алгоритма обхода деревьев, которые естественно следуют из самой структуры дерева.

1. Обход слева направо: *Left-Root-Right* (сначала посещаем левое поддерево, затем – корень и, наконец, правое поддерево).
2. Обход сверху вниз: *Root-Left-Right* (посещаем корень до поддеревьев).
3. Обход снизу вверх: *Left-Right-Root* (посещаем корень после поддеревьев).

Рассмотрим результаты этих обходов на примере записи формулы в виде дерева, т.к. они и позволяют получить различные формы записи арифметических выражений.

Пусть для операндов A и B выполняется операция сложения.

Привычная форма записи $A + B$ называется ***инфиксной.***

Запись, в которой знак операции перед операндами $+AB$, называется ***префиксной***.

Если операция после операндов $AB+$ это ***постфиксная*** форма.

Рассмотрим обходы дерева на примере формулы:

$$(a + b / c) * (d – e * f).$$

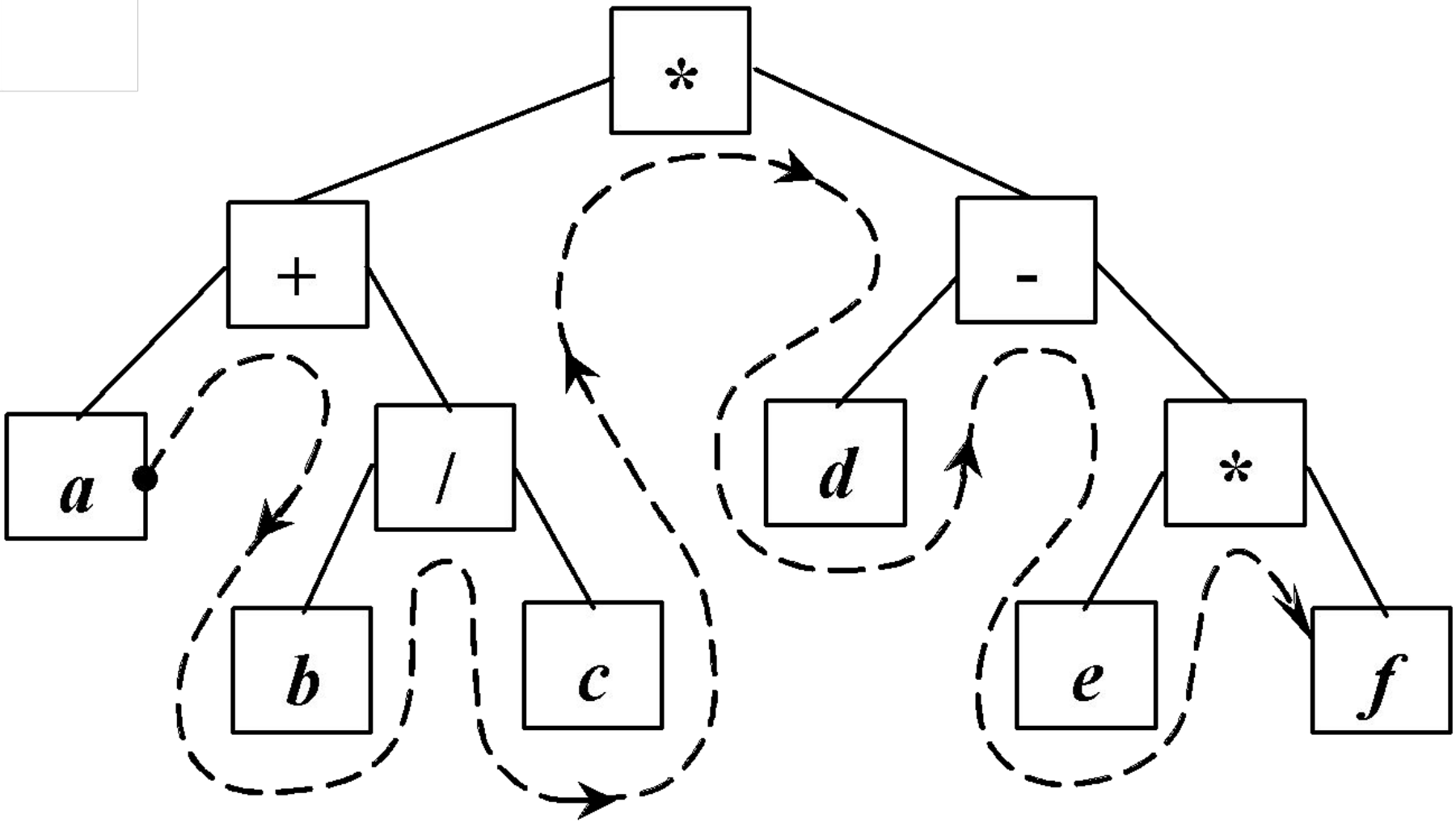
Дерево формируется по принципу:

– в корне размещаем операцию, которая выполнится последней;

– далее узлы-операции, операнды – листья дерева.

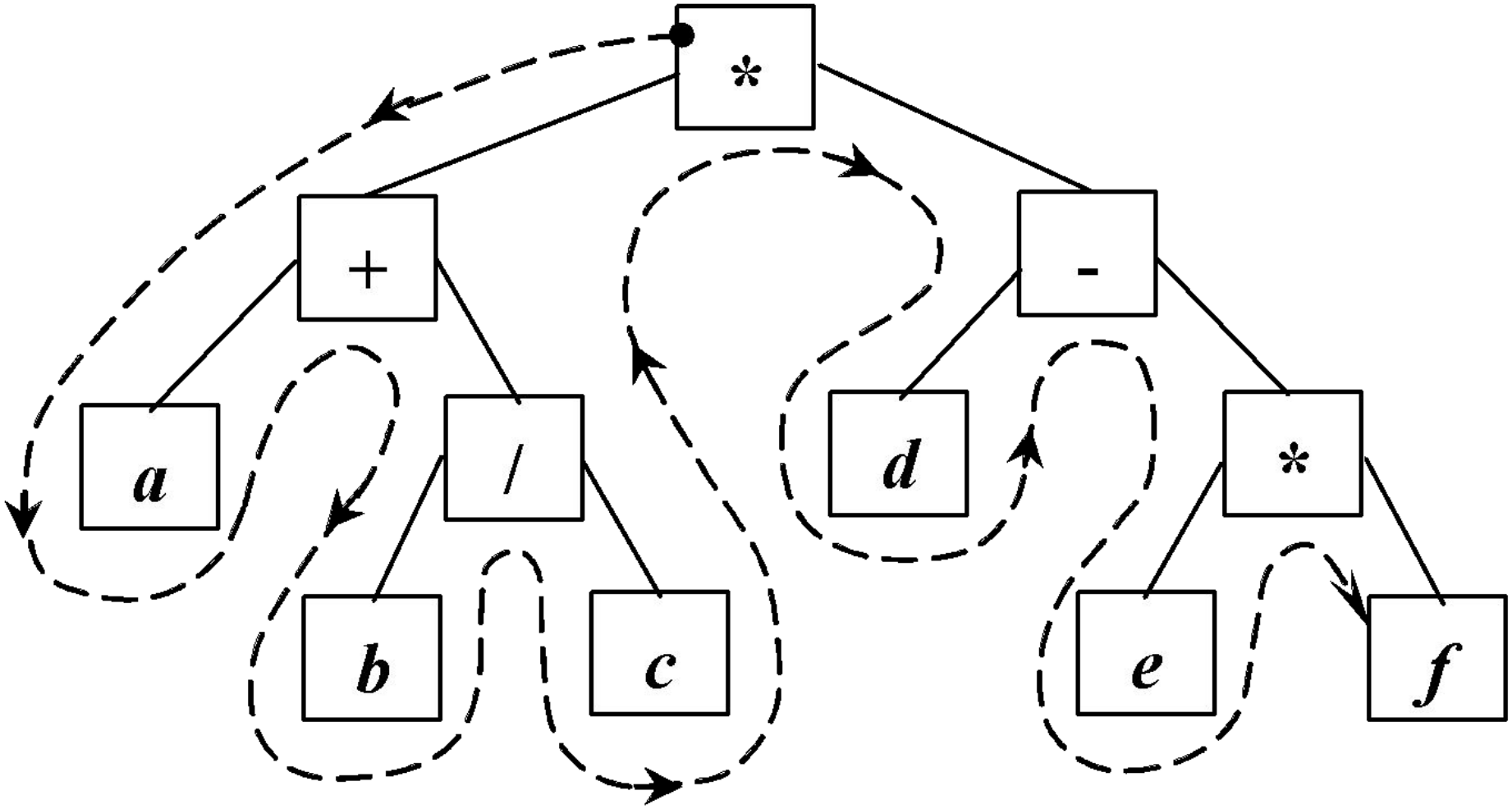
Обход **1** (*Left-Root-Right*) дает инфиксную запись выражения (без скобок):

a + b / c * d – e * f



Обход 2 (*Root-Left-Right*) дает префиксную запись выражения (без скобок):

**** + a / b c – d * e f***



Обход 3 (*Left-Right-Root*) дает постфиксную запись выражения:

a b c / + d e f * – *