

*** Логарифмы**
Решение
логарифмических
уравнений и
неравенств

Понятие логарифма

При любом $a > 0$ и $a \neq 1$ степень a^p с произвольным действительным показателем p определена и равна некоторому положительному действительному числу b : $a^p = b$. Показатель p степени a^p называется логарифмом этой степени с основанием a .

* Логарифмом положительного числа x по положительному и не равному 1 основанию a : $\log_a x$ называется показатель степени, при возведении в который числа a получается x .

$$a^{\log_a x} = x, a > 0, a \neq 1$$

или

$$a^b = x, a > 0,$$

$$a \neq 1,$$

тогда

$$b = \log_a x$$

* СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

- * 1) Если $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$, то
- $$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y .$$
- * Если $a > 0, a \neq 1, x < 0, y < 0$, то
- $$\log_a(x \cdot y) = \log_a(-x) + \log_a(-y) .$$
- * 2) Если $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$, то
- $$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y .$$
- * Если $a > 0, a \neq 1, x < 0, y < 0$, то
- $$\log_a \frac{x}{y} = \log_a(-x) - \log_a(-y) .$$

*

Во всех равенствах

$$a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, x > 0, y > 0 .$$

$$3) \log_a(x^c) = c \log_a x ;$$

$$4) \log_{a^d}(x^c) = \frac{c}{d} \log_a x ;$$

$$5) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} ;$$

$$6) \log_a x \cdot \log_b y = \log_b x \cdot \log_a y ;$$

$$7) \log_{\sqrt[n]{a}} x = n \log_a x ;$$

$$8) \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x ;$$

$$9) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} ; \log_a b \cdot \log_b a = 1 ;$$

***10)** $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, $a^{(\log_a x)^2} = x^{\log_a x}$;

11) $\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$, $y \neq 1$;

12) $\log_a(xy) + \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x^2)$, *если $xy > 0$;*

13) $\log_a(x^k) = k \log_a|x|$, *если k -чётное число,*
 $\log_a(x^k) = k \log_a(x)$, *если k -нечётное число.*

* * Десятичный логарифм и натуральный логарифм

* Десятичным логарифмом называется логарифм, если его основание равно 10.

* Обозначение десятичного логарифма: $\lg x$.

* Натуральным логарифмом называется логарифм, если его основание равно числу e .

* Обозначение натурального логарифма: $\ln x$.

* *Примеры с логарифмами

* Найдите значение выражения:

* № 1. $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$;

* № 2. $7 \cdot 5^{\log_5 4}$;

* № 3. $36^{\log_6 5}$;

* № 4. $\log_4 8$;

* № 5. $\log_5 0,2 + \log_{0,5} 4$;

* № 6. $\log_{0,3} 10 - \log_{0,3} 3$;

* № 7. $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$;

* № 8. $\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13}$;

* № 9. $\log_5 9 \cdot \log_3 25$;

- * № 10. $\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$;
- * № 11. $(1 - \log_2 12)(1 - \log_6 12)$;
- * № 12. $6 \log_7 \sqrt[3]{7}$;
- * № 13. $\frac{\log_3 18}{2 + \log_3 2}$;
- * № 14. $\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0,2$;
- * № 15. $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25$;
- * № 16. $5^{\log_{25} 49}$;
- * № 17. $(\log_{\sqrt{7}} 49)^2$;
- * № 18. $5^{3 + \log_5 2}$;
- * № 19. $8^2 \log_8 3$;
- * № 20. $64^{\log_8 \sqrt{3}}$;
- * № 21. $\log_4 \log_5 25$;

* № 22. $\frac{24}{3^{\log_3 2}}$;

* № 23. $\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13}$;

* № 24. $\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13}$;

* № 25. $(3^{\log_2 3})^{\log_3 2}$;

* № 26. Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{7}$;

* № 27. Найдите значение выражения $\log_a \frac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$;

* № 28. Найдите значение выражения $\log_a(a^2 b^3)$, если $\log_a b = -2$.

* **** Простейшие логарифмические уравнения***

* Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида:

* $\log_a x = b; \log_a f(x) = b; \log_a f(x) = \log_a u(x) ,$

* где a и b - действительные числа,

* $a \neq 1; a > 0; f(x), u(x)$ - выражения, содержащие x .

*

* Методы решения простейших логарифмических уравнений

* 1. По определению логарифма.

* А) Если $a \neq 1$, $a > 0$, то уравнение $\log_a f(x) = b$ равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

* В) Уравнение $\log_{a(x)} f(x) = b$ равносильно системе

$$* \begin{cases} a(x)^b = f(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

*
* **2. Метод потенцирования.**

* А) Если $a \neq 1$, $a > 0$, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a u(x)$

* равносильно системе $\begin{cases} f(x) = u(x), \\ u(x) > 0 \text{ (или } f(x) > 0). \end{cases}$

* В) Уравнение $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} u(x)$ равносильно системе

* $\begin{cases} f(x) = u(x), \\ u(x) > 0 \text{ (или } f(x) > 0), \\ a(x) > 0, \quad a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x)-u(x)}{a(x)-1} = 0, \\ u(x) > 0 \text{ (или } f(x) > 0), \\ a(x) > 0. \end{cases}$

* * Решение простейших логарифмических уравнений

* № 1. Решите уравнение $\log_{15}(5x - 25) = 2$.

* *Решение.*

$$\begin{aligned} * \log_{15}(5x - 25) = 2 ; 5x - 25 = 15^2 ; 5x - 25 = 225 ; \\ 5x = 200 ; x = 40 . \end{aligned}$$

* *Ответ.* 4.

* № 2. Решите уравнение $\log_{2,5}(6x + 11) = \log_{2,5}(11x + 6)$.

* *Решение.*

$$\begin{aligned} * \log_{2,5}(6x + 11) = \log_{2,5}(11x + 6) ; 6x + 11 = 11x + 6 ; \\ 5x = 5 ; x = 1 . \end{aligned}$$

* *Ответ.* 1.

* № 3. Решите уравнение $\log_{2x-1}(3x + 16) = 2$.

* *Решение.*

$$*\log_{2x-1}(3x + 16) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 1)^2 = 3x + 16, \\ 2x - 1 \neq 1, \\ 2x - 1 > 0; \end{cases}$$

$$*\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 = 3x + 16, \\ x \neq 1, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 7x - 15 = 0, \\ x \neq 1, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$*\begin{cases} x_1 = -1,25, \quad x_2 = 3, \\ x \neq 1, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 .$$

* *Ответ.* 3.

* № 4. Решите уравнение $\log_{x+1}(x+4) = \log_{x+1}(x^2 + 4x)$.

* *Решение.*

$$* \log_{x+1}(x+4) = \log_{x+1}(x^2 + 4x) \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = x^2 + 4x, \\ x+4 > 0, \\ x+1 \neq 1, x+1 > 0; \end{cases}$$

$$* \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0, \\ x > -1, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4, x_2 = 1, \\ x > -1, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

* *Ответ.* 1.

** Методы решения логарифмических уравнений*

- * 1. Метод потенцирования.*
- * 2. Функционально-графический метод.*
- * 3. Метод разложения на множители.*
- * 4. Метод замены переменной.*
- * 5. Метод логарифмирования.*

** Особенности решения логарифмических уравнений*

- * Применять простейшие свойства логарифмов.*
- * Распределять слагаемые, содержащие неизвестные, при применении простейших свойств логарифмов, таким образом, чтобы не возникали логарифмы отношений.*
- * Применять цепочки логарифмов: цепочка раскрывается на основании определения логарифма.*
- * Применение свойств логарифмической функции.*

* № 1. Решите уравнение

$$\log_5((x-3)(x-5)) + \log_5 \frac{x-5}{x-3} = \log_5(x+25)^2 .$$

* *Решение.*

* *Преобразуем данное уравнение, воспользовавшись свойствами логарифма. Данное уравнение равносильно системе:*

$$* \begin{cases} \log_5 \left((x-3)(x-5) \cdot \frac{x-5}{x-3} \right) = \log_5(x+25)^2, \\ (x-3)(x-5) > 0, \\ x+25 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$* \begin{cases} \log_5(x-5)^2 = \log_5(x+25)^2, \\ x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty), \\ x \neq -25. \end{cases}$$

* Решим первое уравнение системы:

$$\begin{aligned} * (x - 5)^2 &= (x + 25)^2 \Leftrightarrow (x - 5)^2 - (x + 25)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ (x - 5 - x - 25)(x - 5 + x + 25) &= 0 \Leftrightarrow -30 \cdot (2x + 20) = 0 \\ \Leftrightarrow 2x + 20 &= 0 \Leftrightarrow x = -10 . \end{aligned}$$

* Учитывая, что $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$ и $x \neq -25$,
получаем $x = -10$.

* Ответ. -10 .

* № 2. Решите уравнение $\log_2 \log_{0,5} \log_{625}(x^2 + x - 1) = 1$.

* *Решение.*

* $\log_2 \log_{0,5} \log_{625}(x^2 + x - 1) = 1$.

* *Воспользуемся определением логарифма, получаем*
 $\log_{0,5} \log_{625}(x^2 + x - 1) = 2 \Leftrightarrow \log_{625}(x^2 + x - 1) = 0,25 \Leftrightarrow$
 $x^2 + x - 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3, x_2 = 2$.

* *Выполним проверку, подставляя найденные значения переменной в квадратный трёхчлен $x^2 + x - 1$, получаем $(-3)^2 + (-3) - 1 = 5 > 0$, $2^2 + 2 - 1 = 5 > 0$, следовательно, значения $x = -3$; $x = 2$ являются корнями данного уравнения.*

* *Ответ.* $-3; 2$.

*№ 3. Решите уравнение

$$\log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_2(x - 1) \cdot \log_2(x - 3) = 1.$$

*Решение.

*Находим область определения уравнения:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x - 1 > 0, \\ x - 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 3) > 0, \\ x > 1, \\ x > 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty), \\ x > 3; \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

*Преобразовываем данное уравнение

$$\begin{aligned} \log_2((x - 1)(x - 3)) - \log_2(x - 1) \cdot \log_2(x - 3) &= 1 \Leftrightarrow \\ \log_2(x - 1) + \log_2(x - 3) - \log_2(x - 1) \cdot \log_2(x - 3) &= 1 \Leftrightarrow \\ \log_2(x - 1)(1 - \log_2(x - 3)) + \log_2(x - 3) - 1 &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$* \log_2(x-1)(1 - \log_2(x-3)) - (1 - \log_2(x-3)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$* (1 - \log_2(x-3)) \cdot (\log_2(x-1) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$* \begin{cases} 1 - \log_2(x-3) = 0, \\ \log_2(x-1) - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-3) = 1, \\ \log_2(x-1) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 2, \\ x-1 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$* \begin{cases} x = 5, \\ x = 3. \end{cases}$$

* Учитывая область определения уравнения, получаем $x = 5$.

* Ответ. 5.

* № 4. Решите уравнение $\frac{-3 \log_9 x}{1 - \log_3 x} = \log_{\frac{1}{3}}(27x^2)$.

* *Решение.*

* *Область определения уравнения:*

* $x > 0$.

* *Преобразуем данное уравнение:*

$$* \frac{-3 \log_9 x}{1 - \log_3 x} = \log_{\frac{1}{3}}(27x^2) \Leftrightarrow \frac{-3 \log_{3^2} x}{1 - \log_3 x} = \log_{3^{-1}}(27x^2) \Leftrightarrow$$

$$* \frac{-1,5 \log_3 x}{1 - \log_3 x} = -\log_3(27x^2) \Leftrightarrow \frac{1,5 \log_3 x}{1 - \log_3 x} = \log_3(27x^2) \Leftrightarrow$$

$$* \frac{1,5 \log_3 x}{1 - \log_3 x} = \log_3 27 + \log_3(x^2) \Leftrightarrow \frac{1,5 \log_3 x}{1 - \log_3 x} = 3 + 2 \log_3 x.$$

* *Решаем методом замены переменной.*

* *Пусть $\log_3 x = a$, тогда уравнение принимает вид:*

$$* \frac{1,5a}{1-a} = 3 + 2a .$$

* Учитывая, что $1 - a \neq 0$, $a \neq 1$, получаем уравнение

$$* 1,5a = (3 + 2a)(1 - a) \Leftrightarrow 3a = 2(3 + 2a)(1 - a) \Leftrightarrow$$

$$* 3a = 6 - 2a - 4a^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 5a - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2, \\ a = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

* Обратная замена:

$$* \begin{cases} \log_3 x = -2, \\ \log_3 x = \frac{3}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{-2}, \\ x = 3^{\frac{3}{4}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9}, \\ x = \sqrt[4]{27}. \end{cases}$$

* Ответ. $\frac{1}{9}$, $\sqrt[4]{27}$.

* № 5. Решите уравнение $5^{x^2-3} \cdot 6^x = 180$.

* *Решение.*

* *Можно угадать корень данного уравнения: $x = 2$.*

* *Проверяем: $5^{2^2-3} \cdot 6^2 = 180$; $5 \cdot 36 = 180$; $180 = 180$.*

* *Верное равенство, следовательно, $x = 2$ является корнем данного уравнения.*

* *А теперь:*

* **СЛОЖНО – ЛОГАРИФМИРУЙ!**

* *Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 5.*

* *Получаем равносильное уравнение:*

$$\begin{aligned} * \log_5(5^{x^2-3} \cdot 6^x) &= \log_5 180 \Leftrightarrow \\ (x^2 - 3) \log_5 5 + x \log_5 6 &= \log_5 36 + \log_5 5 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * x^2 - 3 + x \log_5 6 &= 2 \log_5 6 + 1 \Leftrightarrow \\ x^2 + x \log_5 6 - 4 - 2 \log_5 6 &= 0. \end{aligned}$$

- * Получили квадратное уравнение, у которого известен один корень.
- * По теореме Виета находим сумму корней:
- * $2 + x = -\log_5 6$, следовательно, находим второй корень:
- * $x = -2 - \log_5 6$.
- * Ответ. $-2 - \log_5 6; 2$.