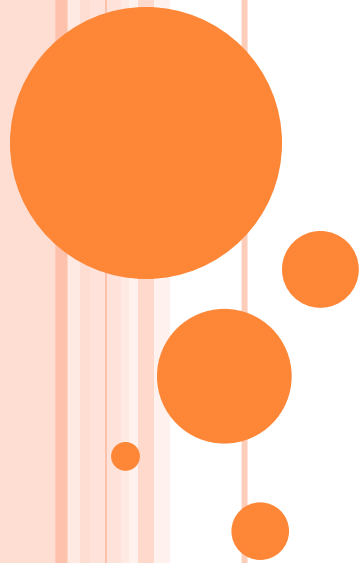


ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ



Функция комплексного переменного $f(z): D \subseteq \overline{C} \rightarrow \overline{C}$;

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y); u, v: R^2 \rightarrow R;$$

Примеры функций :

$$1) w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2i xy; u = x^2 - y^2; v = 2xy;$$

$$2) w = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}; u = \frac{x}{x^2 + y^2}; v = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$3) w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y); u = e^x \cos y; v = e^x \sin y;$$

$$w = e^z: C \rightarrow C \setminus \{0\};$$

$$|w| = |e^z| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y} = \sqrt{e^{2x}} = e^x; \text{Arg}(w) = \arctg \frac{v}{u} = \arctg(\operatorname{tg}(y)) = y;$$

$$4) w = sh(z); w = ch(z); w = th(z) = \frac{sh(z)}{ch(z)}; w = cth(z) = \frac{ch(z)}{sh(z)};$$

$$sh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^x (\cos y + i \sin y) - e^{-x} (\cos y - i \sin y)}{2} = \cos y \frac{e^x - e^{-x}}{2} + i \sin y \frac{e^x + e^{-x}}{2} =$$
$$= shx \cos y + i chx \sin y; u = shx \cos y; v = chx \sin y;$$

$$ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = chx \cos y + i shx \sin y; u = chx \cos y; v = shx \sin y;$$

Примеры :

$$sh(4 - 5i) = sh4 \cos 5 + i ch4 \sin 5; ch(2 - \pi i) = ch2 \cos(-\pi) + i sh2 \sin(-\pi) = -ch2;$$



Тригонометрические функции :

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} = \\ &= \cos x \left(\frac{e^{-y} - e^y}{2i} \right) + i \sin x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2i} \right) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y; u = \sin x \operatorname{ch} y; v = \cos x \operatorname{sh} y;\end{aligned}$$

Формулы, связывающие гиперболические и тригонометрические функции :

$$\operatorname{ch}(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z; \operatorname{sh}(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot i = i \sin z; \cos(iz) = \operatorname{ch} z; \sin(iz) = i \operatorname{sh} z;$$

$$\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y;$$

Примеры :

$$\text{вычислить : } \cos(2 - 3i) = \cos 2 \operatorname{ch} 3 + i \sin 2 \operatorname{sh} 3;$$

$$|\cos(2 - 3i)| = \sqrt{\cos^2 2 \operatorname{ch}^2 3 + \sin^2 2 \operatorname{sh}^2 3}; \arg(\cos(2 - 3i)) = \pi + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{th} 3);$$

Функции $w = e^z$; $\operatorname{ch} z$; $\operatorname{sh} z$ являются функциями периодическими с периодом $2\pi i$:

$$e^{7+2\pi i} = e^7; \operatorname{ch}(1 - 2\pi i) = \operatorname{ch}(1); \operatorname{sh}(-5 + 4\pi i) = \operatorname{sh}(-5) = -\operatorname{sh}(5);$$

Функции $\cos z$; $\sin z$ периодичны с периодом 2π ;



$$W = L_n(z) = L_n(|z| \cdot e^{i \operatorname{Arg}(z)}) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$w = \ln(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad w = \ln(z): \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

Свойства логарифма: $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$; $\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln(z_1) - \ln(z_2)$; $\ln(z^k) = k \cdot \ln(z)$;

$$L_n(z^k) \neq k \cdot L_n(z): L_n(z^k) = \frac{k}{2} \ln(x^2 + y^2) + k i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi n i, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$k L_n(z) = k \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) + 2\pi \cdot k n i, \quad \{kn\} \subseteq \mathbb{Z}$$

Примеры:

$$1) L_n(1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 - \frac{\pi}{3} i + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad L_n(-4) = \ln 4 + \pi i + 2\pi k i; \quad L_n(i) = \frac{\pi}{2} i + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}$$



2) Решить уравнение : $\sin z = 2 \Rightarrow z = \text{Arc sin}(2) = ?$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Rightarrow e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} - 4i = 0 : t = e^{iz} \Rightarrow t^2 - 4it - 1 = 0 : D = -16 + 4 = -12$$

$$t_{1,2} = \frac{4i \pm 2\sqrt{3}i}{2} = (2 \pm \sqrt{3})i \Rightarrow$$

$$a). e^{iz} = (2 - \sqrt{3})i \Rightarrow iz = \text{Ln}((2 - \sqrt{3})i) = \ln(2 - \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2}i + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$$

$$б). e^{iz} = (1 + \sqrt{3})i \Rightarrow iz = \text{Ln}((1 + \sqrt{3})i) = \ln(1 + \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2}i + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}.$$

3) Вычислить : $i^i = ?$

$$z^a = e^{a \cdot \text{Ln}(z)} \Rightarrow i^i = e^{i \cdot \text{Ln}(i)} = e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2}i + 2\pi ki\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, k \in \mathbb{Z}.$$



С-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

$\frac{dw}{dz}\big _{z=a} = f'(a)$	Производная функции $w = f(z)$ в точке $z = a$	Число $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ ^с если предел существует и равен конечному числу
$w = f(z),$ $z = a \in D$	С-дифференцируемость функции $w = f(z)$ в точке $z = a$	Функция называется С-дифференцируемой в точке $z = a$, если 1) $w = f(z)$ <u>непрерывна</u> в точке $z = a$; 2) функция $w = f(z)$ имеет в точке $z = a$ производную

Для того чтобы функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была С-дифференцируема в точке $z = a \in D$ необходимо и достаточно:

- 1) чтобы функции $u(x, y); v(x, y)$ были R^2 дифференцируемы в этой точке;
- 2) чтобы функции $u(x, y); v(x, y)$ удовлетворяли условиям Коши – Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{z=a} = \frac{\partial v}{\partial y}\big|_{z=a} \\ \frac{\partial u}{\partial y}\big|_{z=a} = -\frac{\partial v}{\partial x}\big|_{z=a} \end{cases}$$



ПРИМЕРЫ C-ДИФФ. И НЕ ДИФФ. ФУНКЦИЙ

□ 1) $f(z)=2x-3iy$; $u(x,y)=2x$; $v(x,y)=-3y$;

$$z_0 = a + ib \in C : f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{2\Delta x - 3i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{\substack{\Delta x=0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{-3i\Delta y}{i\Delta y} = -3 \\ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y=0}} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{пределы различны, значит предела не существует} \Rightarrow$$

нет производной ни в одной точке $C \Rightarrow f(z)$ не является C дифференцируемой.

□ 2) $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$;

$$z_0 = a + ib : f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{a^2 + b^2 + 2a\Delta x + 2b\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 - a^2 - b^2}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{\substack{\Delta x=0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{2b\Delta y + \Delta y^2}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2b + \Delta y}{i} = -2ib \\ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y=0}} \frac{2a\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2a + \Delta x) = 2a \end{cases} \quad - \text{пределы различны, если только } a \neq b \neq 0$$

при $a = b = 0$ пределы равны. $f(z)$ C -дифференцируема в точке $z = 0$; $f'(0) = 0$.



УТВ Формулы для вычисления производной в точке $z = a \in D$:

Если $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z = a \in D$, то производную можно вычислить по формулам

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=a} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z=a} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{z=a} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z=a} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=a} - i \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{z=a} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{z=a} - i \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{z=a}.$$

Доказательство:

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = (\text{предел существует}) =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=a} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z=a} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{z=a} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z=a} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=a} - i \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{z=a} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{z=a} - i \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{z=a}.$$

УТВ Условия Коши – Римана в полярных координатах

($z = re^{i\varphi}$, $w = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$) выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r} \quad (\text{вывод сделать самостоятельно}).$$



ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ КОШИ -РИМАНА

1) $f(z) = 2x - 3iy$: $u = 2x$; $v = -3y \Rightarrow R^2$ дифференцируемы;

Условия Коши – Римана: $\begin{cases} u'_x = 2 \neq v'_y = -3 \\ u'_y = -v'_x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ не является C дифф. ни в одной точке C

2) $f(z) = |z|^2$: $u = x^2 + y^2$; $v = 0 - R^2$ дифференцируемые;

условия Коши – Римана: $\begin{cases} u'_x = 2x = v'_y = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ u'_y = 2y = -v'_x = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow f(z) \text{ } C \text{ дифф. в т. } z = 0$

$f'(0) = ?$

Формулы для вычисления производной:

$$\exists f'(z_0) = ? \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = (\Delta y = 0, \text{ т.к. предел существует}) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'_x(x_0; y_0) + i v'_x(x_0; y_0) = (\text{условия Коши – Римана}) =$$

$$= v'_y(x_0; y_0) + i v'_x(x_0; y_0) = v'_y(x_0; y_0) - i u'_y(x_0; y_0) = u'_x(x_0; y_0) - i u'_y(x_0; y_0);$$

$$f'(0) = v'_y + i v'_x \big|_{(0;0)} = 0 + i0 = 0$$



3) $f(z) = y^2 - 2ix^2$; $u = y^2$; $v = -2x^2 - R^2$ дифференцируемы;

Условия Коши – Римана:

$$\begin{cases} u'_x = 0 & v'_y = 0 \Rightarrow u'_x = v'_y \quad \forall (x, y) \\ u'_y = 2y; & -v'_x = -(-4x) = 4x \Rightarrow 2y = 4x \Rightarrow y = 2x \end{cases} \Rightarrow \text{Функция } f(z) \text{ } C\text{-дифф. на } \{z : y = 2x\}$$

$$z_0 = 1 + 2i \in \{z : y = 2x\} \Rightarrow f'(1 + 2i) = u'_x + i v'_x \Big|_{z=z_0} = 0 + i(-4x) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = -4i;$$



ПРИМЕРЫ ФУНКЦИЙ:

□ 4) $f(z)=e^z$;

$$u(x; y) = e^x \cos y; \quad v(x; y) = e^x \sin y; \quad R^2 \text{ дифференцируемые}$$

Условия Коши – Римана :

$$\begin{cases} u'_x = v'_y = e^x \cos y \\ u'_y = -v'_x = -e^x \sin y \end{cases} \quad \forall (x; y) \in C \Rightarrow f(z) \text{ } C - \text{дифференцируема } \forall z \in C$$

$$f'(z) = u'_x + i v'_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

Теорема.

Все элементарные функции комплексного переменного имеют те же производные, что и для функций действительного переменного.

$$(\cos z)' = -\sin z; \quad (\ln z)' = \frac{1}{z}; \quad (z^n)' = n z^{n-1}; \dots$$



ГОЛОМОРФНЫЕ ИЛИ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$w = f(z),$ $z = a \in D$	C-дифференцируемость функции $w = f(z)$ в точке $z = a$	Функция называется C-дифференцируемой в точке $z = a$, если 1) $w = f(z)$ <u>непрерывна</u> в точке $z = a$; 2) функция $w = f(z)$ имеет в точке $z = a$ производную
$w = f(z),$ $z = a \in D$	<u>Голоморфность</u> функции $w = f(z)$ в точке $z = a$	Функция $w = f(z)$ называется голоморфной в точке, если функция дифференцируема как в точке $z = a$, так и в некоторой её окрестности: $\exists u_a = \{z : z - a < \varepsilon\} : f(z)$ дифференцируема $\forall z \in u_a$
$w = f(z),$ $z \in D,$ D – область в <u>C</u>	<u>Голоморфность</u> функции $w = f(z)$ в области D	Функция является голоморфной в области D, если она является голоморфной в каждой точке области D



$F(z)$	$\mathbb{R}^2$ дифф	$\mathbb{C}$ -дифф.	Область аналитичности
$2x-3iy$	$\forall (x;y)$	$\emptyset$	$\emptyset$
$ z ^2$	$\forall (x;y)$	$\{0\}$	$\emptyset$
y^2-2ix^2	$\forall (x;y)$	$\{z:y=2x\}$	$\emptyset$
e^z	$\forall (x;y)$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$

Введем обозначение:

$H(D)$ - множество функций, аналитичных
(голоморфных: holomorphic) в области D



СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ(ГОЛОМОРФНЫХ) ФУНКЦИЙ

1) Пусть $f(z) \in H(D)$, тогда $u(x, y); v(x, y)$ являются

сопряженной парой гармонических функций, т.е.

функции $u(x, y); v(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши –

Римана в области D и $\Delta u = 0 \wedge \Delta v = 0 \quad \forall (x, y) \in D$.

$$f(z) \in H(D) \Rightarrow f(z) \text{ дифференцируема в } D \Rightarrow \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \text{ в } D \Rightarrow$$

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} u'_x + \frac{\partial}{\partial y} u'_y = v''_{xy} - v''_{yx} = 0 \text{ в } D;$$

$$\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = -u''_{xy} + u''_{yx} = 0 \text{ в } D.$$



Пример: $w = \ln z$;

$$u(x, y) = 0,5 \ln(x^2 + y^2); \quad v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$\Delta u = 0?$$

$$u'_x = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad u'_y = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$u''_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad u''_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \Delta u = 0$$



ПРИМЕРЫ

1) Существуют ли гармонические функции вида $u(x, y) = \varphi(xy)$?

$$t = xy \Rightarrow u'_x = \varphi'_t \cdot t'_x = \varphi' \cdot y; \quad u'_y = \varphi' \cdot x;$$

$$u''_{xx} = \varphi'' \cdot y^2; \quad u''_{yy} = \varphi'' \cdot x^2 \Rightarrow \Delta u = \varphi'' \cdot y^2 + \varphi'' \cdot x^2 = \varphi''(y^2 + x^2) = 0$$

$$\varphi'' = 0 \Rightarrow \varphi(t) = C_1 t + C_2 = C_1 xy + C_2$$

$$u(x, y) = C_1 xy + C_2;$$

2) Являются ли функции $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 4$ и $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - 7$

сопряжённой парой гармонических функций?

Решение: проверим условия Коши – Римана для этих функций:
$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

$$u'_x = 3x^2 - 3y^3; \quad v'_y = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow u'_x = v'_y \quad \forall x, y;$$

$$u'_y = -6xy; \quad -v'_x = -6xy \Rightarrow u'_y = -v'_x \quad \forall x, y;$$

Таким образом $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – сопряжённая пара гармонических функций.

$$f(z) = u + iv = z^3 + 4 - 7i$$



СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

2. Функцию $w = f(z)$ можно восстановить по известной действительной или мнимой части с точностью до константы.

Если $\Delta u = 0$ в D ($\Delta v = 0$ в D), то $\exists$ сопряженная ей функция $v(x, y)$:
 u, v являются сопряженной парой гармонических функций и удовлетворяют в области D условиям Коши – Римана :

$$\Delta u = 0 \text{ в } D \Rightarrow \exists v: \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \text{ в } D; \quad f(z) = u + iv;$$



Пусть $u(x, y)$ гармоническая функция в D :

$\Delta u = 0 \quad \forall (x, y) \in D \Rightarrow \exists v(x, y): u, v$ – сопряженная пара гармонических функций и $\exists f(z) = u + iv$.

$$u'_x = v'_y \Rightarrow v(x, y) = \int u'_x dy + C, \text{ причем } C = C(x):$$

$$u'_y = -v'_x \Rightarrow u'_y = -\frac{\partial}{\partial x} \int u'_x dy + C'_x = -\int u''_{xx} dy + C'_x \Rightarrow$$

$$u''_{yy} = -\frac{\partial}{\partial y} \int u''_{xx} dy + \frac{\partial}{\partial y} C'_x = -u''_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} C'_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} C'_x = u''_{xx} + u''_{yy} = \Delta u = 0 \Rightarrow C = C(x).$$

$$v(x, y) = \int u'_x dy + C(x).$$



1) Восстановить функцию по её известной действительной части:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + y + \ln(x^2 + y^2)$$

$$v(x, y) = ? \quad f(z) = ?$$

$$1) v(x, y) = ?$$

$$\Delta u = \left(2x + \frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_x + \left(-2y + 1 + \frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_y = 2 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \Rightarrow \exists v(x, y): \begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

$$u'_x = v'_y \Rightarrow v'_y(x, y) = 2x + \frac{2x}{x^2 + y^2} \Rightarrow v(x, y) = \int \left(2x + \frac{2x}{x^2 + y^2} \right) dy + C(x) = 2xy + 2 \int \frac{\frac{1}{x} dy}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} + C(x)$$

$$v(x, y) = 2xy + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C(x)$$

$$u'_y = -v'_x: -2y + 1 + \frac{2y}{x^2 + y^2} = - \left(2y + 2 \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) + C'(x) \right) \Rightarrow 1 + \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - C'(x)$$

$$C'(x) = -1 \Rightarrow C(x) = -x + c \Rightarrow v(x, y) = 2xy + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - x + c;$$

$$2) f(z) = u + iv = ?$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + y + \ln(x^2 + y^2) + i \left(2xy + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - x + c \right) =$$

$$= (x^2 - y^2 + 2ixy) + 2 \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) - ix + y + ci = z^2 + 2 \ln z - i(x + iy) + ci = z^2 - iz + 2 \ln z + ci;$$



□ 2) Восстановить функцию $f(z)$ по известной мнимой части и условию $f(-i)=2i$;

$$v(x, y) = 2xy + y^2 - x^2 + chx \cdot \cos(y+1)$$

$$1) u(x, y) = ? \quad \Delta v = 0;$$

$$u'_x = v'_y = 2x + 2y - chx \sin(y+1) \Rightarrow u = \int (2x + 2y - chx \sin(y+1)) dx =$$

$$= x^2 + 2xy - shx \sin(y+1) + C(y)$$

$$u'_y = -v'_x = -(2y - 2x + shx \cos(y+1)); \quad u'_y = 2x - shx \cos(y+1) + C'(y)$$

$$2x - shx \cos(y+1) + C'(y) = -2y + 2x - shx \cos(y+1) \Rightarrow C'(y) = -2y$$

$$C(y) = -y^2 + c$$

$$u(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - shx \sin(y+1) + c$$

$$2) f(z) = ?$$

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + 2xy - shx \sin(y+1) + c + i(2xy + y^2 - x^2 + chx \cos(y+1)) =$$

$$= (x^2 - y^2 + 2ixy) + (2xy + i(y^2 - x^2)) + (-shx \sin(y+1) + ichx \cos(y+1)) + c =$$

$$= z^2 - i(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(chx \cos(y+1) + ish x \sin(y+1)) + c =$$

$$= z^2 - iz^2 + i(\cos ix \cos(y+1) + \sin ix \sin(y+1)) + c = (1-i)z^2 + i \cos(ix - (y+1)) + c =$$

$$= (1-i)z^2 + i \cos(i(x + i(y+1))) + c = (1-i)z^2 + i \cos(i(z+i)) + c = [\cos it = cht] =$$

$$= (1-i)z^2 + ich(z+i) + c \Rightarrow f(-i) = -(1-i) + ich(-i+i) + c = -1 + i + i + c = 2i \Rightarrow c = 1$$

$$f(z) = (1-i)z^2 + ich(z+i) + 1$$

- 3) Можно ли восстановить функцию $f(z) \in H(C)$, если
- 3.1.
- 3.2. $u = \varphi(x^2 + y^2)$
- Ответ: да, если эти функции гармонические:
- $\Delta u = 0 \rightarrow u(x, y) = ?$
- $\Delta v = 0 \rightarrow v(x, y) = C_1 xy + C_2$; да, восстановить можно;



ТЕОРЕМЫ О ГОЛОМОРФНОСТИ

3. Если $f(z), g(z) \in H(D)$, тогда

3.1. $\forall c \in \mathbb{C} : cf(z) \in H(D).$

3.2. $f(z) + g(z) \in H(D).$

3.3. $(f(z) \cdot g(z)) \in H(D).$

3.4. $\left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) \in H(D), \quad g(z) \neq 0.$

3.5. $f(z) \in H(D), g(w) \in H(\tilde{D}) \Rightarrow (g \circ f)(z) \in H(D).$

Теорема. Все элементарные функции являются аналитическими в своей области определения.



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ С-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Пусть $f(z) \in H(D)$, $z = a \in D$ и $f'(a) \neq 0$. Тогда

1. $k = |f'(a)|$ – коэффициент растяжения в точке $z = a$
при отображении $f(z)$:

все кривые $\gamma \subset D$, проходящие через точку $z = a$, при
отображении $f(z)$ растягиваются (сжимаются) в k
раз.

Пример:

найти коэффициент растяжения при отображении

$$f(z) = \frac{z+i}{z-1}, \text{ в точке } a = 1+i$$



$$f(z) = \frac{z+i}{z-1}, \quad a = 1+i$$

$$f'(z) = \frac{z-1-(z+i)}{(z-1)^2} = \frac{-1-i}{(z-1)^2}; \quad f'(a) = \frac{-1-i}{(1+i-1)^2} = 1+i$$

$$k = |f'(1+i)| = |1+i| = \sqrt{2}$$

все кривые, проходящие через точку $a = 1+i$ растягиваются в $\sqrt{2}$ раза;

$$f(z) = e^{z+i}; \quad a = -1+6i$$

$$f'(z) = e^{z+i} \Rightarrow f'(-1+6i) = e^{-1+6i+i} = e^{-1+7i} \Rightarrow$$

$$k = |f'(-1+6i)| = |e^{-1+7i}| = |e^{-1}(\cos 7 + i \sin 7)| = e^{-1} < 1$$

все кривые, проходящие через точку $a = -1+6i$ сжимаются в e^{-1} раз;

$$f(z) = 2 \ln z; \quad a = 1+i;$$

$$f'(z) = \frac{2}{z} \Rightarrow f'(a) = \frac{2}{1+i} \Rightarrow k = \left| \frac{2}{1+i} \right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1$$

все кривые, проходящие через точку $a = 1+i$ растягиваются в $\sqrt{2}$ раз.



2. $\alpha = \arg(f'(a))$ – угол поворота в точке $z = a$ при отображении $f(z)$:

все кривые $\gamma \subset D$, проходящие через точку $z = a$, при отображении $f(z)$ поворачиваются на угол α по часовой стрелке, если $\alpha < 0$ и против часовой стрелки, если $\alpha > 0$ на величину $|\arg(f'(a))|$.

Пример :

найти угол поворота при отображении

$$f(z) = \frac{z+i}{z-1}, \text{ в точке } a = 1+i$$



$$1) f(z) = \frac{z+i}{z-1}, \quad a = 1+i;$$

$$f'(z) = \frac{-1-i}{(z-1)^2} \Rightarrow f'(a) = 1+i \Rightarrow \arg f'(a) = \arg(1+i) = \pi/4$$

все кривые, проходящие через точку $z = a$ поворачиваются на угол 45° против часовой стрелки;

$$2) f(z) = e^{z+i}; \quad a = -1+6i;$$

$$f'(z) = e^{z+i} \Rightarrow f'(a) = e^{-1+7i} = e^{-1}(\cos 7 + i \cdot \sin 7) \Rightarrow \arg f'(a) = 7 - 2\pi$$

все кривые, проходящие через точку $z = a$ при отображении $f(z)$ поворачиваются на угол $7 - 2\pi$ против часовой стрелки;

$$3) f(z) = 2 \ln z, \quad a = 1+i;$$

$$f'(z) = \frac{2}{z} \Rightarrow f'(a) = \frac{2}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = 1-i \Rightarrow \arg f'(a) = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4};$$

все кривые, проходящие через точку $z = a$ при отображении $f(z)$ поворачиваются на угол 45° по часовой стрелке.

□ **Определение.**

- Отображение, сохраняющее углы между кривыми в точке $z=a$ при отображении $f(z)$, называется **конформным**.

□ **Теорема.**

- Если $f(z) \in H(D)$; $z=a \in D$ и $f'(a) \neq 0$, тогда отображение $w=f(z)$ конформно в точке $z=a$.

- **Вывод:** все аналитические функции являются конформными отображениями.



ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Теорема единственности аналитической функции

Пусть $f(z), g(z) \in H(D)$ и $f(z) = g(z) \quad \forall z \in M \subset D$, причем M имеет хотя бы одну предельную точку $z = a \in D$, тогда $f(z) \equiv g(z) \quad \forall z \in D$.

Следствие

Пусть $f(z) \in H(D)$ и $f(z) = c \quad \forall z \in \gamma$, где кривая $\gamma \subset D$, тогда $f(z) = c \quad \forall z \in D$.



Используя данное следствие из теоремы единственности, можно доказать известные тождества для элементарных функций, которые остаются верными и при переходе к комплексным значениям переменной.

Например, докажем, что $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.



Доказательство. Рассмотрим функцию

$f(z) = \sin 2z - 2 \sin z \cos z$. Функция $f(z) \in H(C)$ как комбинация целых функций.

При $z = \underline{x} \in \mathbb{R}$ ($z \in O\mathbb{R}$) имеем

$$f(x) = \sin 2x - 2 \sin x \cos x = 0 \quad (\text{в силу следствия})$$

$$\Rightarrow f(z) = 0 \quad \forall z \in C.$$



Теорема

Пусть $f(z)$ дифференцируема в точке $z = a$ и $f'(a) \neq 0$.

Тогда якобиан преобразования $w = f(z)$ равен $|f'(a)|^2$.

Доказательство

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = |f'(a)|^2.$$



Следствие 1. Пусть $f(z) \in H(D)$ и $f'(z) \neq 0$ в области $D \Rightarrow$ площадь образа области D равна

$$S(\tilde{D}) = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy.$$

Доказательство

$$f(z) \in H(D) \Rightarrow (f(D) = \tilde{D}) \Rightarrow s(\tilde{D}) = \iint_{\tilde{D}} du dv = \iint_D |J| dx dy =$$

$$= \iint_D |f'(z)|^2 dx dy.$$



Следствие 2. Пусть $f(z) \in H(D)$ и $f'(z) \neq 0$ в области D

$\Rightarrow$ длина образа кривой $\Gamma \subset D$ равна $\int_{\Gamma} |f'(z)| |dz|$.

Доказательство:

$f(z) \in H(D)$, $\Gamma \in D \Rightarrow (\Gamma_1 = f(\Gamma)) \Rightarrow$ длина кривой Γ_1 :

$l(\Gamma_1)$ вычисляется по формуле $l(\Gamma_1) = \int_{\Gamma_1} |d\omega| = \int_{\Gamma} |f'(z)| |dz|$.



ПРИМЕРЫ

Найти длину L спирали, на которую с помощью функции $w = f(z) = e^z$ отображается отрезок $\{y = x, 0 \leq x \leq 2\pi\}$.

Решение:

$l = \{y = x; 0 \leq x \leq 2\pi\}$; $f(z) = e^z$; L – длина спирали

$$L = \int_l |f'(z)| |dz| = \int_l |e^z| |dz| = \int_0^{2\pi} e^x \cdot \sqrt{2} dx = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1),$$

$$|e^z| = e^x; y = x \Rightarrow z = x + iy = x + ix = (1 + i)x \Rightarrow$$

$$|dz| = |d((1 + i)x)| = |(1 + i)dx| = \sqrt{2}dx, x \in [0; 2\pi]$$



2) Найти длину образа кривой $l: z = 1 + it, t \in [-1; 0]$ при отображении

$$w = f(z) = \frac{z+i}{z+1};$$

$$w' = f'(z) = \frac{1-i}{(z+1)^2} \Rightarrow |f'(z)| = \frac{\sqrt{2}}{|z+1|^2} = (z = 1+it) = \frac{\sqrt{2}}{|2+it|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+t^2}};$$

$$|dz| = |d(1+it)| = |idt| = dt$$

$$L = \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+t^2}} dt = \sqrt{2} \ln |t + \sqrt{4+t^2}| \Big|_{-1}^0 = \sqrt{2} (\ln 2 - \ln(\sqrt{5}-1))$$



Найти площадь образа области D при отображении

$$w = f(z) = z^2, \quad D: 1 \leq |z| \leq 2, -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$f'(z) = 2z; \quad D: 1 \leq |z| \leq 2; -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4};$$

$$D^* = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy; \quad |z| = r; \arg(z) = t; |f'(z)| = 2|z| = 2r$$

$$D^* = \iint_D 4r^2 r dr dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt \int_1^2 4r^3 dr = \frac{15}{2} \pi;$$



2) Найти площадь образа области D : квадрат с вершинами в точках $0; i; 1+i; 1$,

при отображении $w = f(z) = \frac{z+i}{z+1}$; $x \in [0; 1]$; $y \in [0; 1]$

$$w' = f'(z) = \frac{1-i}{(z+1)^2} \Rightarrow |f'(z)| = \frac{\sqrt{2}}{|z+1|^2} = \frac{\sqrt{2}}{(x+1)^2 + y^2};$$

$$D^* = \iint_D \frac{\sqrt{2} dx dy}{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{2} \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} \arctg \frac{y}{x+1} \right) \Big|_0^1 dy = \sqrt{2} \int_0^1 \left(0,5 \arctg \frac{y}{2} - \arctg y \right) dy$$

$$\int \arctg x dx = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{1 + x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$D^* = \sqrt{2} \left(\left(\frac{y}{2} \arctg \frac{y}{2} \Big|_0^1 - \ln \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} \Big|_0^1 \right) - \left(y \arctg y \Big|_0^1 - \ln \sqrt{y^2 + 1} \Big|_0^1 \right) \right) = \sqrt{2} \left(\left(\frac{1}{2} \arctg 0,5 - \ln \frac{\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \right) \right)$$

