Проекция (лат. *projectio* — выбрасывание вперёд) — изображение трёхмерной фигуры на плоскости.

Проекционный метод изображения предметов основан на их зрительном представлении.

Если соединить все точки предмета прямыми линиями *(проекционными лучами)* с постоянной точкой О *(центр проекции),* в которой предполагается глаз наблюдателя, то на пересечении этих лучей с плоскостью получается проекция всех точек предмета.

Соединив эти точки прямыми линиями в том же порядке, как они соединены в предмете, получим на плоскости *перспективное изображение* предмета или *центральную проекцию*.

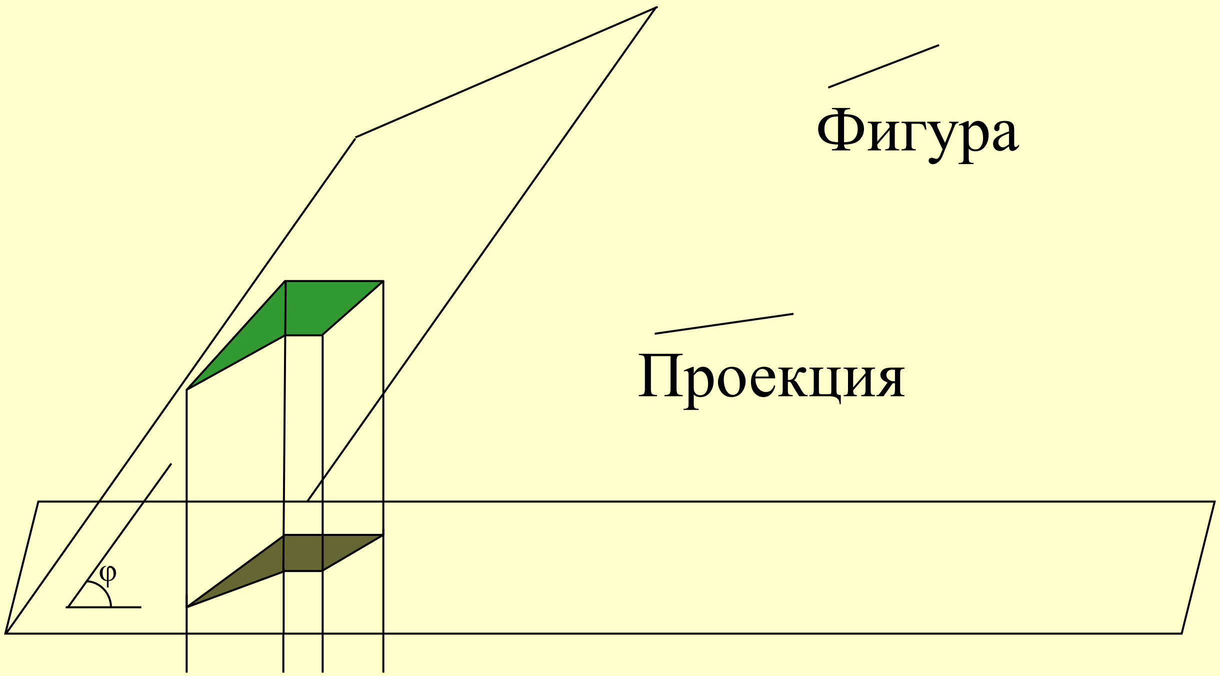
Если центр проекции бесконечно удалён от картинной плоскости говорят о *параллельной проекции*, а если при этом проекционные лучи падают перпендикулярно к плоскости — то об *ортогональной проекции*.

Площадь ортогональной проекции многоугольника

Теорема

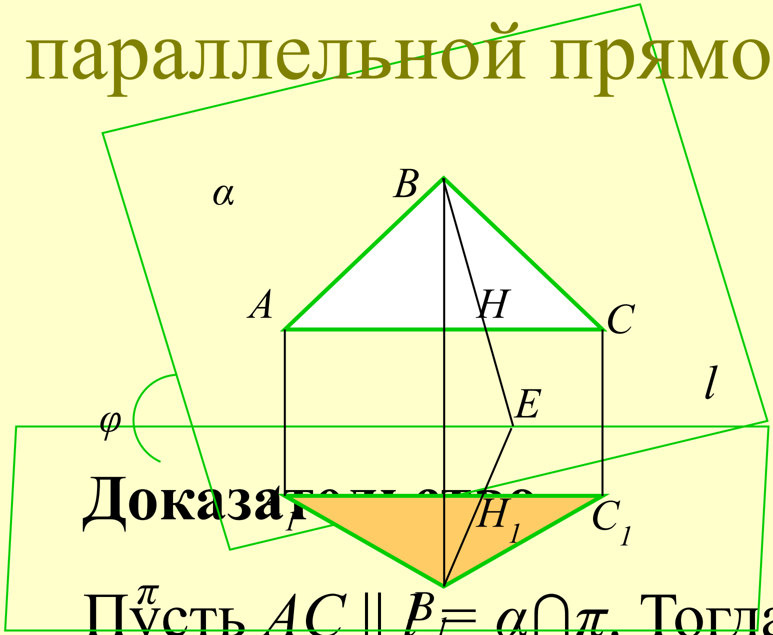
Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций:

$$\boldsymbol{S_{проекции} = S_{фигуры} \cdot \cos \varphi.}$$



Доказательство

I.Площадь проекции треугольника со стороной, параллельной прямой пересечения плоскостей



Дано: $\alpha,\ \pi;\ \angle(\alpha;\ \pi) = \varphi;$

$A,\ B,\ C \in \alpha;$

$\Delta A_1B_1C_1 = Пр_{\pi}(\Delta ABC).$

Доказать: $S_{\Delta A1B1C1} = S_{\Delta ABC}\cdot\cos\varphi.$

Доказательство

Пусть $AC \parallel l = \alpha \cap \pi$. Тогда высота $BH \perp l$, $S_{\Delta ABC} = 0{,}5AC\cdot BH.$

$AC \parallel l \Rightarrow A_1C_1 \parallel l;\ AC = A_1C_1;\ B_1H_1 = = BH\cdot\cos\varphi.$

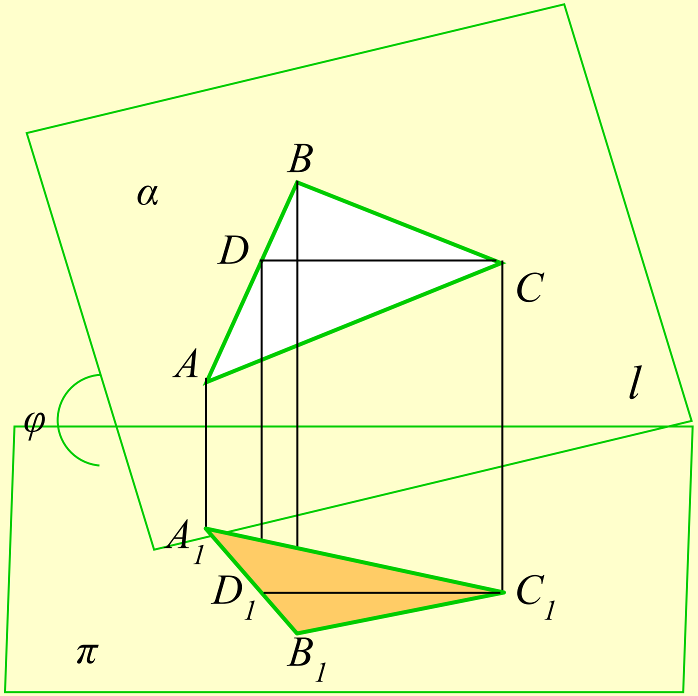
По теореме о трех перпендикулярах прямая B_1H_1 (ортогональная проекция BH) перпендикулярна прямой l, следовательно, отрезок B_1H_1 – высота $\Delta A_1B_1C_1$. Поэтому

$S_{\Delta A1B1C1} = 0{,}5A_1C_1\cdot B_1H_1 = 0{,}5AC\cdot BH\cdot\cos\varphi = S_{\Delta ABC}\cdot\cos\varphi.$

Таким образом,

$$\mathbf{S_{\Delta A1B1C1} = S_{\Delta ABC}\cdot\cos\varphi.}$$

II. Площадь проекции произвольного треугольника



Проведем $CD \parallel l$ $(CD \in AB)$. Тогда $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CDB} + S_{\triangle ADC}$; $S_{\triangle A1B1C1} = S_{\triangle C1D1B1} + {}$ $+ S_{\triangle A1D1C1} = S_{\triangle CDB} \cdot \cos\varphi + S_{\triangle ADC} \cdot \cos\varphi$ (по доказанному), $S_{\triangle A1B1C1} = (S_{\triangle CDB} + S_{\triangle}ADC) \cdot \cos\varphi = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi$,

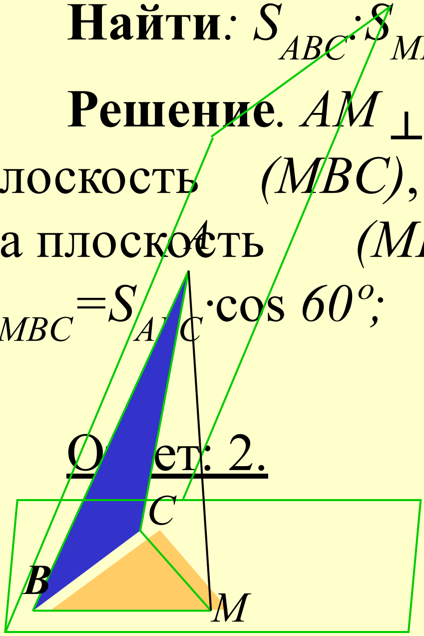
$$\boldsymbol{S_{\triangle A1B1C1} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi.}$$

Задача 4.089. Величина двугранного угла A(BC)M равна 60º. Отрезок AM перпендикулярен плоскости BCM. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника MBC.

Дано: $A(BC)M = 60^o$; $AM \perp (BCM)$.

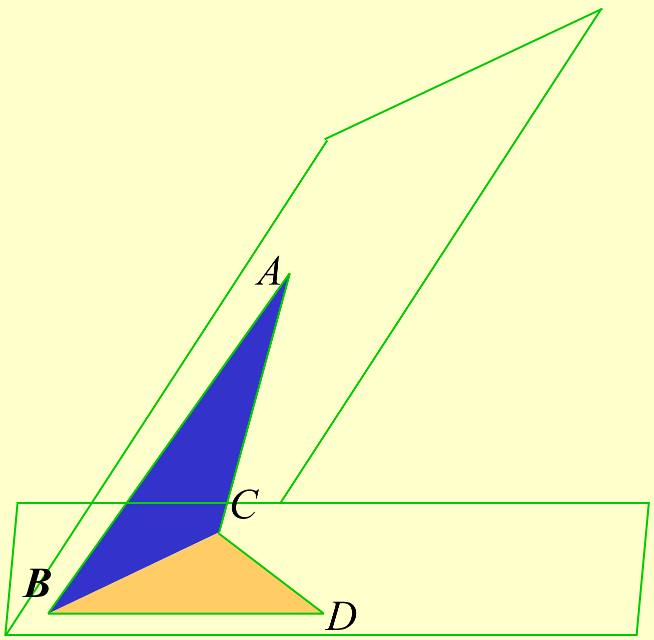
Найти: $S_{ABC}:S_{MBC}$.

Решение. $AM \perp (BCM)$, значит, M – ортогональная проекция A на плоскость (MBC), следовательно, $\triangle MBC$ – ортогональная проекция $\triangle ABC$ на плоскость (MBC). По теореме о площади ортогональной проекции $S_{MBC}=S_{ABC}\cdot\cos 60^o$; $S_{ABC}:S_{MBC} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}\cdot\cos 60^\circ} = 2$.



Ответ: 2.

Задача 4.090. Квадрат *ABCD* перегнули по его диагонали *BC* так, что образовался острый двугранный угол α. Найдите отношение площади ортогональной проекции треугольника *ABC* на плоскость *BDC* к площади треугольника *BDC*.



Дано: $\triangle BAC$; $\triangle BDC$; $AB = BC = CD = AD$; $\angle BAC = \angle BDC = 90°$; $\angle A(BC)D = \alpha$.

Найти: $S_{пр.ABC} : S_{BDC}$.

Решение.

По теореме о площади ортогональной проекции

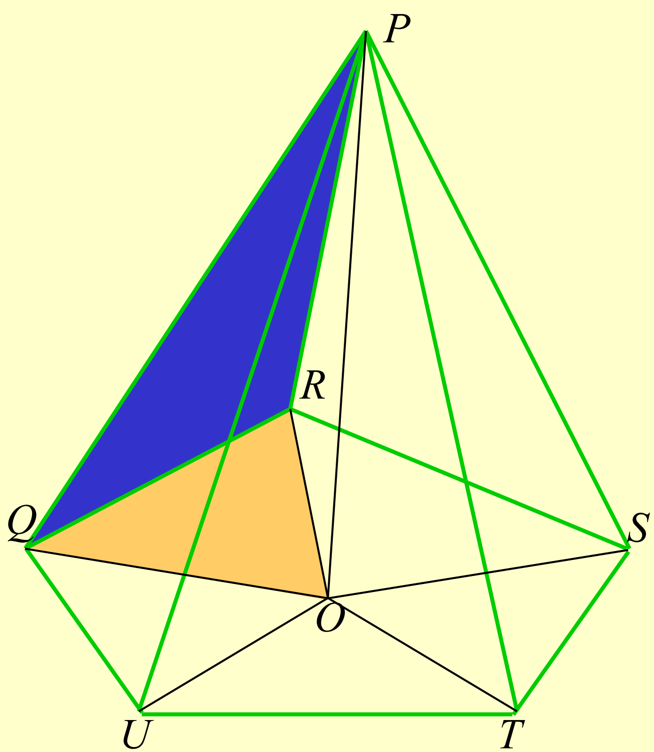
$S_{пр.ABC} = S_{ABC} \cdot \cos \alpha$.

$\triangle ABC = \triangle BDC$ (по 3 сторонам).

$S_{пр.ABC} : S_{BDC} = (S_{ABC} \cdot \cos \alpha) / S_{ABC} = \cos \alpha$.

Ответ: cos α.

Задача 4.094. Сумма площадей всех боковых граней правильной пятиугольной пирамиды в шесть раз больше площади ее основания. Найдите двугранный угол при ребре основания пирамиды.



Дано: *PQRSTU* – правильная пирамида;

$S_{PQR} + S_{PRS} + S_{PST} + S_{PTU} + S_{PUQ} = 6S_{QRSTU}$.

Найти: $\varphi = \angle P(UT)R$.

Решение.

Пусть $PO \perp (QUT)$.

По определению боковые грани равны, $S_{PQR} = S_{PRS} = \ldots$; $S_{OQR} = S_{ORS} = \ldots$.

$S_{QRSTU} = 5S_{OQR} = 5S_{PQR} \cdot \cos\varphi$ (т. к. $\triangle OQR$ – ортогональная проекция $\triangle PQR$);

$5S_{PQR} = 6 \cdot 5S_{PQR} \cdot \cos\varphi$;

$\cos\varphi = {}^1/_6$;

$\varphi = \arccos {}^1/_6$.

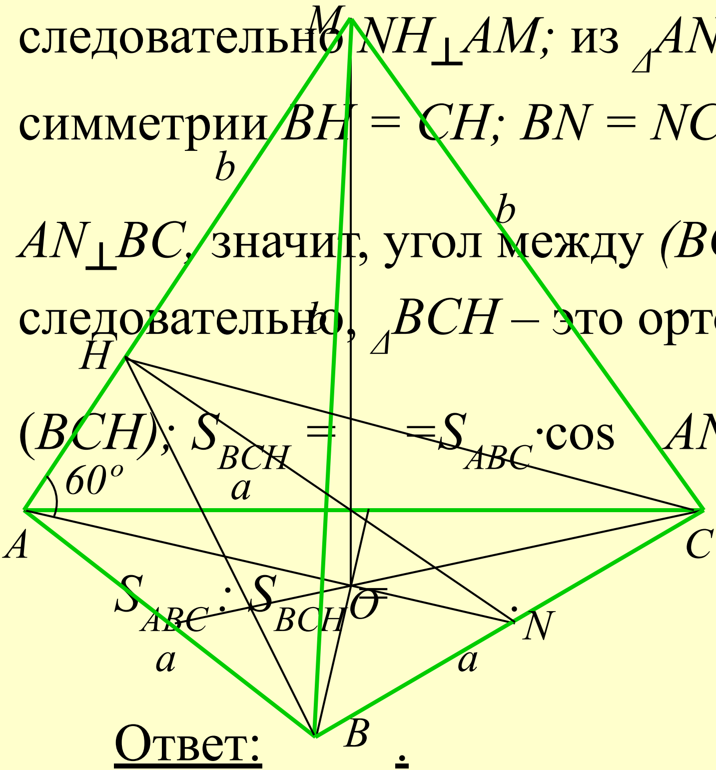
Ответ: $\arccos {}^1/_6$.

Задача 4.095. В правильной треугольной пирамиде *MABC* все боковые ребра образуют с плоскостью основания углы, равные 60º. Найдите отношение площади основания пирамиды к площади сечения, проведенного через вершины *B* и *C* перпендикулярно ребру *MA*.

Дано: *MABC* – правильная треугольная пирамида; $\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO = 60^o$; сечение $BCH \perp AM$ ($H \in AM$).

Найти: $S_{ABC} : S_{BCH}$.

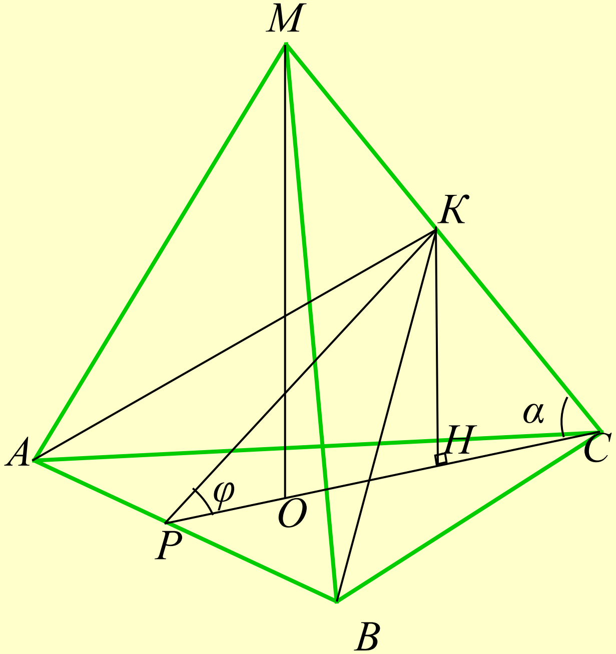
Решение. Пусть $AB = BC = AC = a$; $AM = BM = CM = b$. $(BCH) \perp AM$, следовательно $NH \perp AM$; из $\triangle ANH$ $\angle ANH = 180^o - 60^o - 90^o = 30^o$. Вследствие симметрии $BH = CH$; $BN = NC$ (т. к. *AN* – медиана), т. е. *HN* – высота, $HN \perp BC$; $AN \perp BC$, значит, угол между *(BCH)* и *(ABC)* равен $\angle ANH = 30^o$. $AH \perp (BCH)$, следовательно, $\triangle BCH$ – это ортогональная проекция $\triangle ABC$ на плоскость (BCH); $S_{BCH} = S_{ABC} \cdot \cos \angle ANH = \frac{\sqrt{3}}{2} S_{ABC}$.



$S_{ABC} : S_{BCH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 4.096.а) В правильной треугольной пирамиде MABC проведено сечение через середину ребра MC и вершины A и B. Площадь этого сечения составляет $^8/_9$ площади основания пирамиды. Определите: угол наклона плоскости сечения к плоскости основания пирамиды.



Дано: *MABC* – правильная пирамида; *O* – центр основания *ABC*; *K* - середина *MC*; *P* – середина *AB; (ABK)* – сечение. В правильной треугольной пирамиде *MABC* проведено сечение через середину ребра *MC* и вершины *A* и *B*. $S_{\Delta ABK} = {}^8/_9\, S_{\Delta ABC}$.

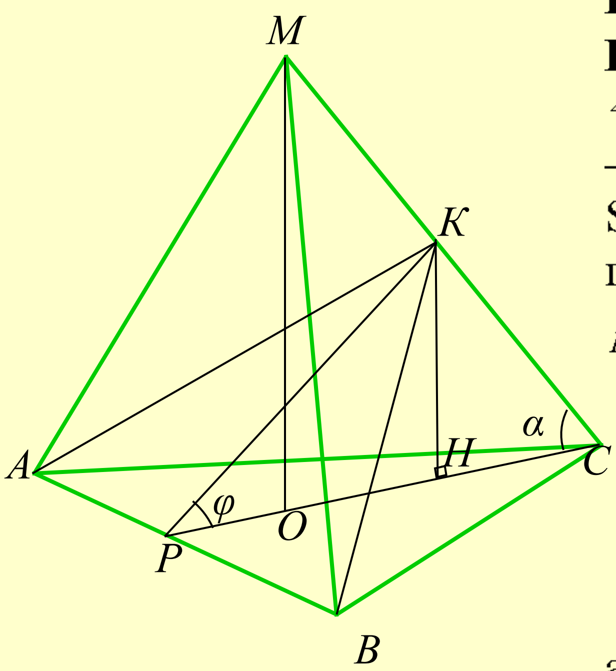
Найти: $\angle(ABC; ABR)$

Решение.

MO – высота пирамиды, тогда CPK = φ = $\angle(ABC; ABR)$. При этом. SΔABK = 8/9 SΔABC.⇒ KP = 8/9PC.

Если AB = a, то $CP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $KP = \frac{8a\sqrt{3}}{9\cdot 2} = \frac{4a\sqrt{3}}{9}$. Так как K - середина MC и KH||OM, то HC = OH = OP= = $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, значит, PH = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда $\cos\varphi = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{4a\sqrt{3}}{9}} = \frac{3}{4}$, откуда $\varphi = \arccos\frac{3}{4}$.Ответ: $\varphi = \arccos\frac{3}{4}$.

Задача 4.096.в) В правильной треугольной пирамиде MABC проведено сечение через середину ребра MC и вершины A и B. Площадь этого сечения составляет $^8/_9$ площади основания пирамиды. Определите: угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её снования .



Дано: $MABC$ – правильная пирамида; O – центр основания ABC; K - середина MC; P – середина AB; (ABK) – сечение.
В правильной треугольной пирамиде $MABC$ проведено сечение через середину ребра MC и вершины A и B. $S_{\Delta ABK} = {}^8/_9\, S_{\Delta ABC}$.

Найти: $\angle(ABC;MC)$

Решение.

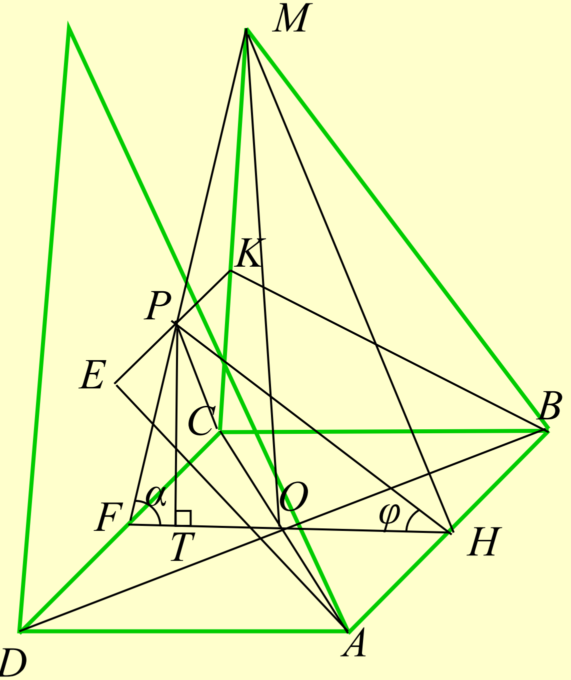
$\angle MCP = \alpha = \angle(ABC;MC)$, так как MO – перпендикуляр, прямая CP – проекция прямой MC на плоскость (ABC). Sсеч = 8/9 SABC, Sсеч = (aPK)/2, а площадь SABC находим по формуле площади равностороннего треугольника. Откуда находим,

$$KP = \frac{8a\sqrt{3}}{9\cdot 2} = \frac{4a\sqrt{3}}{9}$$

Из ΔCKH tg $\alpha = \frac{KH}{CH} = \frac{PK\cdot\sin\varphi}{CH} = \frac{\frac{4a\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$, откуда α = arctg $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Ответ: α = arctg $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Задача 4.097. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ через ребро AB и середину ребра MC проведено сечение, площадь которого в 1,125 раза больше площади основания. Найдите величину угла между плоскостью сечения и плоскостью основания, а также угол при ребре основания данной пирамиды.



Дано: $MABCD$ – правильная пирамида, K – середина MC, (ABK) – сечение, $S_{сеч} = 1,125S_{ABCD}$; MO – высота.

Найти: $\angle K(AB)C$, $\angle M(AC)A$.

Решение.

Пусть $AB = a$, H – середина AB, F – середина CD. $AB \| EK$ по теореме о пересечении двух плоскостей третьей, $AE = BK$ вследствие симметрии $\Rightarrow$ сечение $ABEK$ – равнобедренная трапеция с основаниями $AB = a$ и $KE = 0,5AB = 0,5a$ (так как $KE \| AB$ и K – середина CM, то есть KE – средняя линия ΔMD

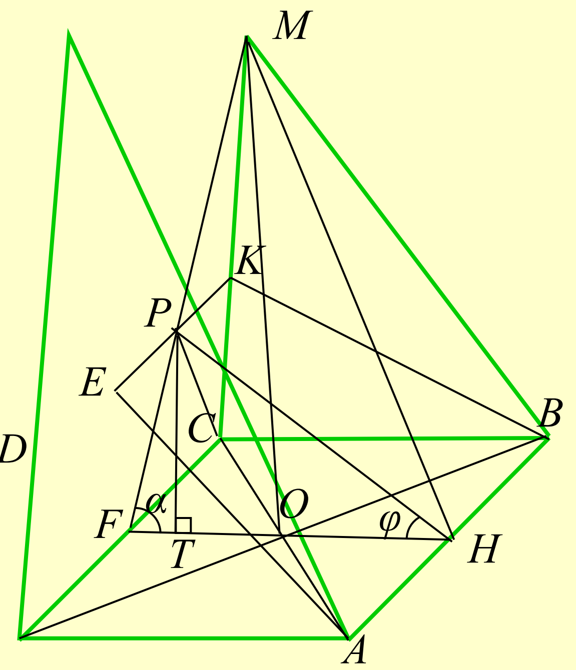
Тогда $S_{сеч} = S_{ABKE} = \dfrac{AB+KE}{2} \cdot PH = \dfrac{a+\frac{a}{2}}{2} \cdot PH = \dfrac{3a}{4} \cdot PH$ (P – сере

KE).

Имеем: $S_{ABKE} = \dfrac{9}{8} S_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{3a}{4} PH = \dfrac{9}{8} a^2 \Rightarrow PH = \dfrac{3a}{2}$.

Так как P – середина MF и $PT \| OM$, то $HT = \dfrac{3}{4}a$, $FT = \dfrac{a}{4}$,

Задача 4.097. В правильной четырехугольной пирамиде *MABCD* через ребро *AB* и середину ребра *MC* проведено сечение, площадь которого в 1,125 раза больше площади основания. Найдите величину угла между плоскостью сечения и плоскостью основания, а также угол при ребре основания данной пирамиды.



Дано: *MABCD* – правильная пирамида, *K* – середина *MC*, *(ABK)* – сечение, $S_{сеч} = 1{,}125 S_{ABCD}$; *MO* – высота.

Найти: $\angle K(AB)C$, $\angle M(AC)A$.

При этом $\angle PHT = \varphi$ – линейный угол двугранного угла, образованного секущей плоскостью и плоскостью основания пирамиды, $\angle PFT = \alpha$ – линейный угол двугранного угла при ребре основания пирамиды.

Решение (продолжение). Из прямоугольного ΔPHT

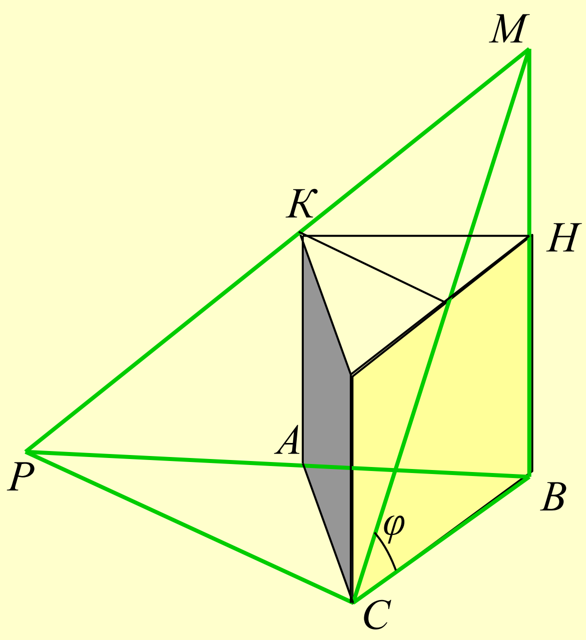
находим: $\cos\varphi = \dfrac{HT}{HP} = \dfrac{\frac{3}{4}a}{\frac{3}{2}a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$.

Из прямоугольного ΔPFT находим: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{PT}{FP} = \dfrac{PH \cdot \sin 60°}{FP} =$

$= \dfrac{\frac{3}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{4}} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = arctg(3\sqrt{3})$.

Ответ: $\varphi = 60°$; $\alpha = arctg(3\sqrt{3})$.

Задача 4.098. К плоскости треугольника *ABC* по одну от нее проведены перпендикуляры *AK* и *BM*. Найдите угол между плоскостями *ABC* и *CKM*, если $AB = AC = BC = AK = 0{,}5BM$



Дано: ΔABC, $AK\perp(ABC)$, $BM\perp(ABC)$. $AB = AC = BC = AK = 0{,}5BM$.

Найти: $\angle(ABC;CKM)$.

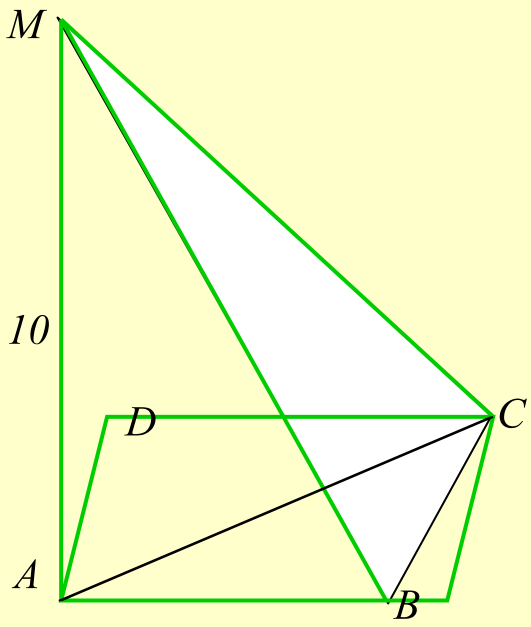
Решение. Пусть $P = MK\cap AB = MK\cap ABC$. Так как $AK\|BM$ и $BM = 2AK$, то $AP = AB = AC$. Это означает, что ΔAPC – равнобедренный. Так как $\angle CAP=120°$, то $\angle ACP=30°$. Значит, $\angle BCP=90°$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $MC\perp CP$, поэтому $\angle BCM=\varphi$ - линейный угол двугранного угла $M(CP)B$.

Пусть $AB = a$. Тогда $BM = 2a$. $MC = a\sqrt{5}$, значит,

$$\cos\varphi=\frac{BC}{MC}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$ откуда $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$

Задача 4.100. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр AM, равный 10. Угол между плоскостями ABC и MBC равен 45º. Найдите площадь треугольника MBC.



Дано: $ABCD$ – квадрат; $AM \perp (ABC)$; $AM = 10$;
$\angle (ABC; MBC) = 45^o$.

Найти: S_{MBC}.

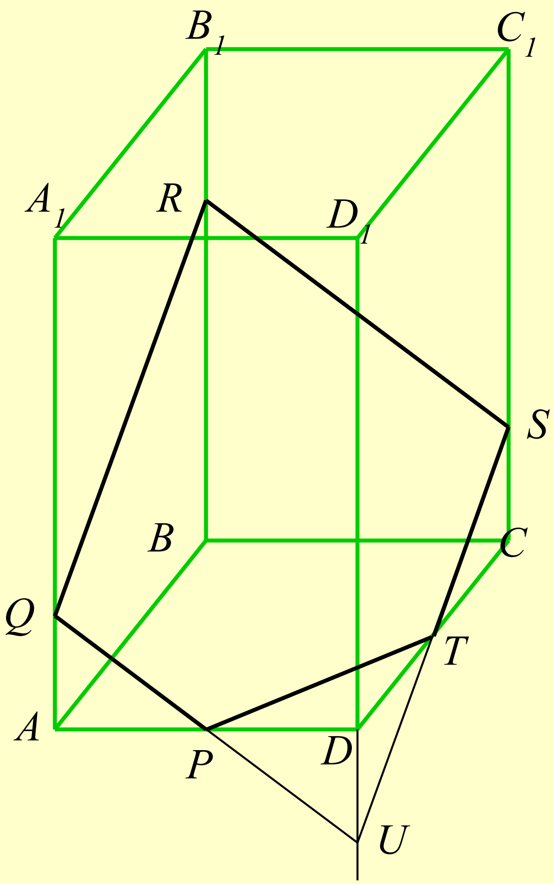
Решение. $\angle(ABC; MBC) = \angle MBA = 45^o$., $AB = 10$

$S_{ABC} = 0{,}5AB \cdot BC = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 10 = 50$

MA – перпендикуляр к плоскости (ABC), значит, ΔABC – ортогональная проекция ΔMBC на плоскость (ABC), $S_{ABC} = S_{MBC} \cdot \cos \angle (ABC; MBC)$; $S_{MBC} = S_{ABC} : \cos \angle (ABC; MBC) = 50\sqrt{2}$

Ответ: $50\sqrt{2}$.

Задача 4.101. В основании прямого параллелепипеда квадрат со стороной *a*. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра параллелепипеда и наклоненная к плоскости основания под углом φ. Найдите площадь сечения.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед; $ABCD$ – квадрат; $AB = a$. Сечение $PQRST$ (рис.); $\angle(PQR; ABC) = \varphi$; P –середина AD; T – середина DC.

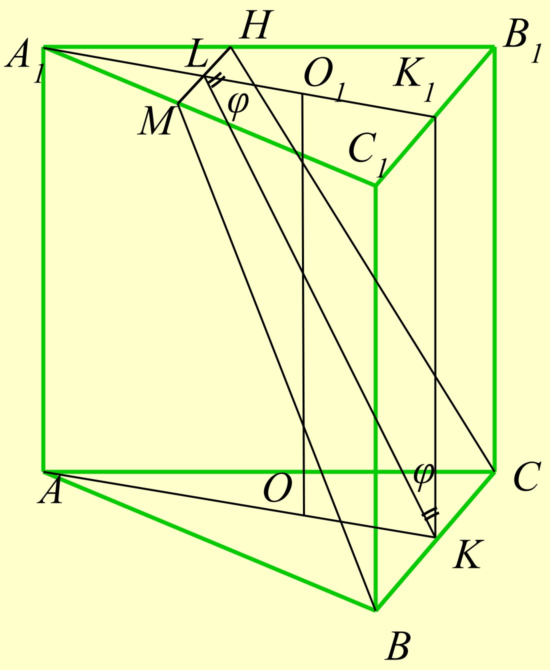
Найти: S_{PQRST}.

Решение. РАВСТ – ортогональная проекция сечения $PQRST$, следовательно,

$S_{PABCT} = S_{сеч} \cos\varphi$, $S_{PABCT} = 7/8\ a^2$, $S_{сеч} \cos\varphi = 7/8\ a^2$, $S_{сеч} = \dfrac{7a^2}{8\cos\varphi}$

Ответ: $\dfrac{7a^2}{8\cos\varphi}$.

Задача 4.105. В правильной треугольной призме, каждое ребро которой равно 9 дм, постройте сечение, проходящее через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований призмы. Найдите: а) угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы; б) площадь сечения.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - правильная треугольная призма, ребро 9 дм, O – центроид ABC, O_1 – центроид A_1B_1C, E – середина OO_1

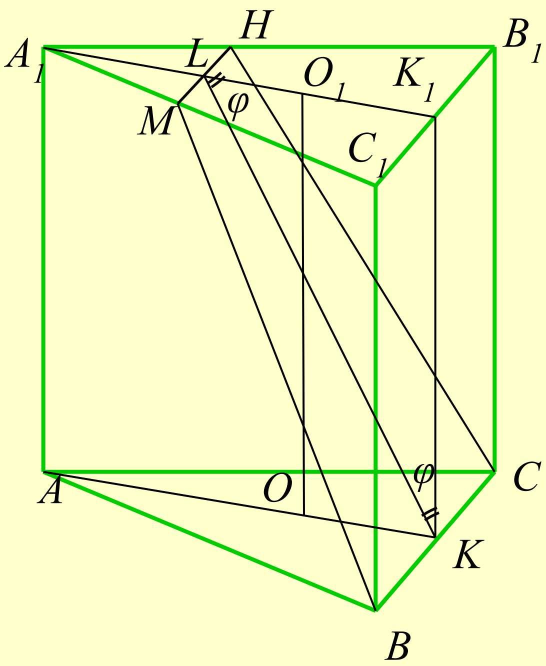
Найти: $\angle E(BC)A$; S_α.

Решение.

K – середина BC и K_1 – середина B_1C_1. Пересечением плоскости BCE с гранью $A_1B_1C_1$ является отрезок MH, который параллелен отрезку B_1C_1 и $B_1C_1 = 3MH$, откуда следует, что $S_{A_1MH} = \frac{1}{9} S_{A_1B_1C_1} \Rightarrow$

$$S_{B_1MHC_1} = \frac{8}{9} S_{A_1B_1C_1} = \frac{8}{9} \cdot \frac{81\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}.$$

Задача 4.105. В правильной треугольной призме, каждое ребро которой равно 9 дм, постройте сечение, проходящее через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований призмы. Найдите: а) угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы; б) площадь сечения.



Так как $A_1K_1 \perp B_1C1$, $B_1C1 \parallel MH$, то $A_1K_1 \perp MH$, значит, $KL \perp MH$ (где $L = MH \cap A_1K_1$). Тогда по теореме о трех перпендикулярах $KL \perp BC$, поэтому $\angle AKL = \varphi$ – линейный угол двугранного угла между секущей плоскостью и плоскостью основания призмы. Это означает, что

$$S_{BMHC} = \frac{S_{B_1MHC_1}}{\cos\varphi}.$$

Найдем φ

Так как $OK = \frac{1}{3}AK = \frac{9\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $OE = 4{,}5$, то

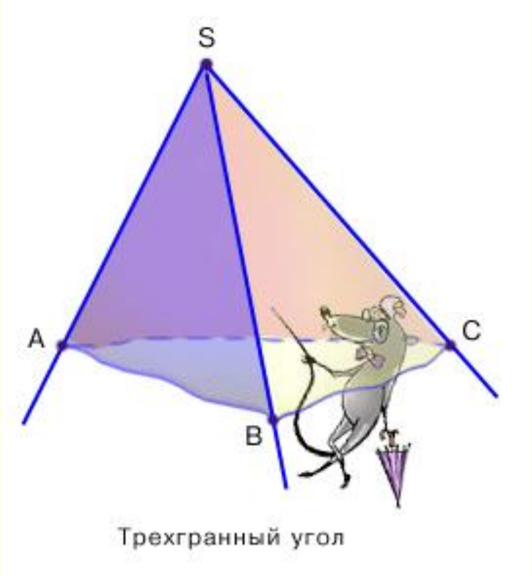
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{OE}{OK} = \frac{4{,}5}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3},$$ значит, $\varphi = 60°$. Тогда

$$S_{сеч} = S_{BMHC} = \frac{18\sqrt{3}}{\cos 60°} = 36\sqrt{3}$$

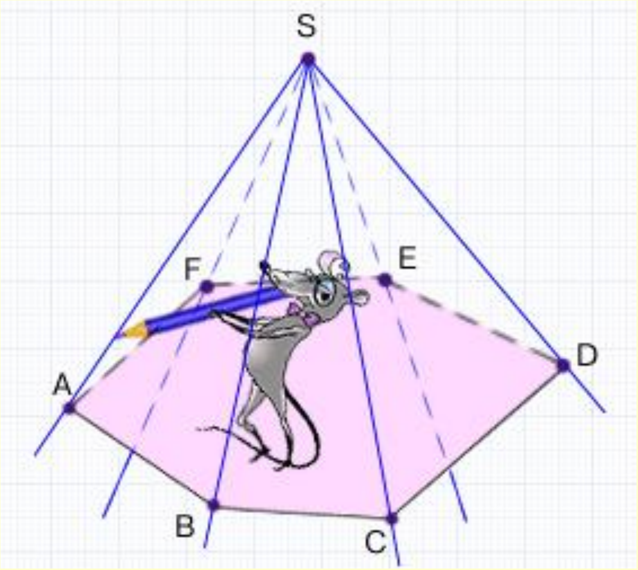
Ответ: $\varphi = 60$; $S_{сеч} = 36\sqrt{3}$

Трёхгранные и многогранные углы:

Трёхгранным углом называется фигура образованная тремя плоскостями, ограниченными тремя лучами, исходящими из одной точки и не лежащей в одной плоскости.



Рассмотрим какой-нибудь плоский многоугольник и точку лежащую вне плоскости этого многоугольника. Проведём из этой точки лучи, проходящие через вершины многоугольника. Мы получим фигуру, которая называется многогранным углом.



Трёхгранный угол — это часть пространства, ограниченная тремя **плоскими углами** с общей вершиной и попарно общими сторонами, не лежащими в одной плоскости. Общая вершина О этих углов называется вершиной трёхгранного угла. Стороны углов называются рёбрами, плоские углы при вершине трёхгранного угла называются его гранями. Каждая из трёх пар граней трёхгранного угла образует двугранный угол

Определение.

***Трехгранные углы называются равными если равны все их соответствующие плоские и двугранные углы*.**

Признаки равенства трехгранных углов.

Трехгранные углы равны, если у них соответственно равны:

1) ***два плоских угла и двугранный угол между ними;***
2) ***два двугранных угла и плоский угол между ними;***
3) ***три плоских угла;***
4) ***три двугранных угла.***

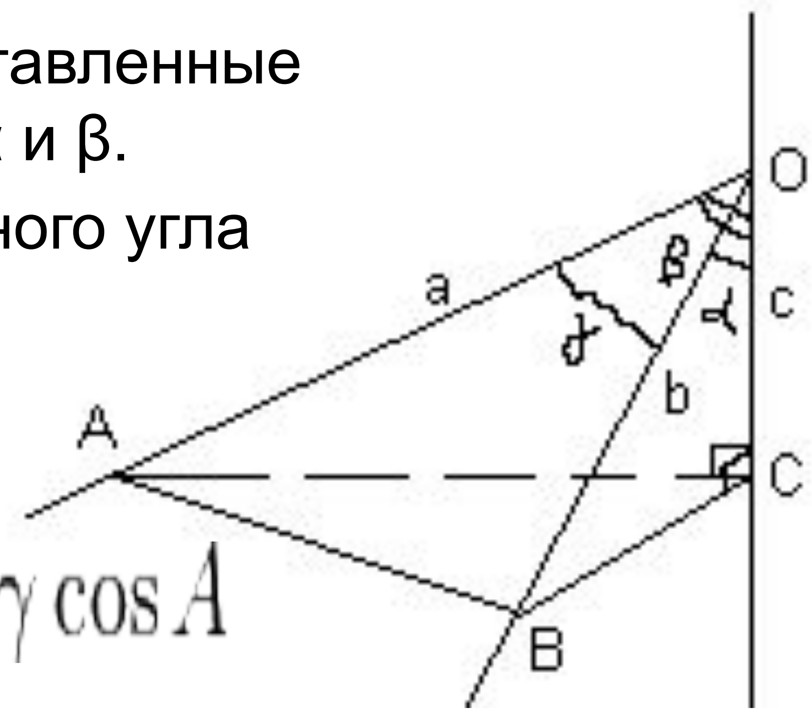
Основные свойства трехгранного угла

1. Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

$\alpha + \beta > \gamma$; $\alpha + \gamma > \beta$; $\beta + \gamma > \alpha$

α, β, γ — плоские углы,
A, B, C — двугранные углы, составленные плоскостями углов β и γ, α и γ, α и β.

2. Сумма плоских углов трёхгранного угла меньше 360 градусов



3. Первая теорема косинусов для трёхгранного угла

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

4. Вторая теорема косинусов для трёхгранного угла

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha,$$

.
Аналог теоремы косинусов

Дан трехгранный угол Oabc.

I. Пусть $\alpha < 90°$; $\beta < 90°$; тогда рассмотрим $(ABC) \perp c$

По теореме косинусов из ΔCAB:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos \hat{c}$$

Аналогично, из ΔOAB:

$$|AB|^2 = |AO|^2 + |BO|^2 - 2|AO| \cdot |BO| \cdot \cos\gamma.$$

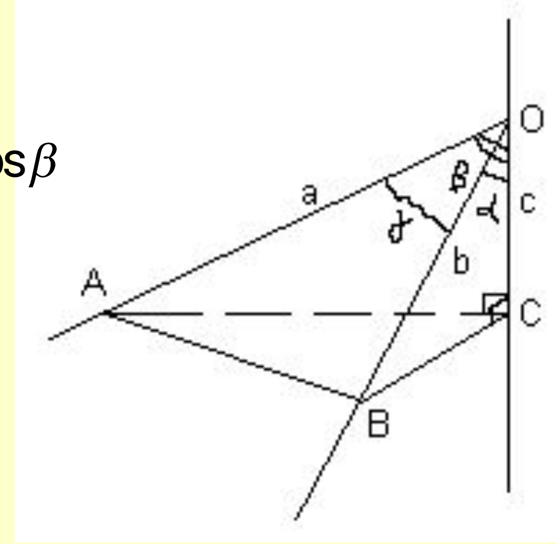
Вычтем из второго равенства первое и учтем, что

$$|AO|^2 - |AC|^2 = |CO|^2 = |BO|^2 - |BC|^2:$$

$$2|CO|^2 - 2|AO| \cdot |BO| \cdot \cos\gamma + 2|AC| \cdot |BC| \cos \hat{c} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos\gamma = \frac{|CO|^2}{|AO| \cdot |BO|} + \frac{|AC| \cdot |BC|}{|AO| \cdot |BO|} \cos \hat{c}$$

Заменим: $\frac{|CO|}{|BO|} = \cos\alpha$ $\frac{|BC|}{|BO|} = \sin\alpha$ $\frac{|AC|}{|AO|} = \sin\beta$ $\frac{|CO|}{|AO|} = \cos\beta$



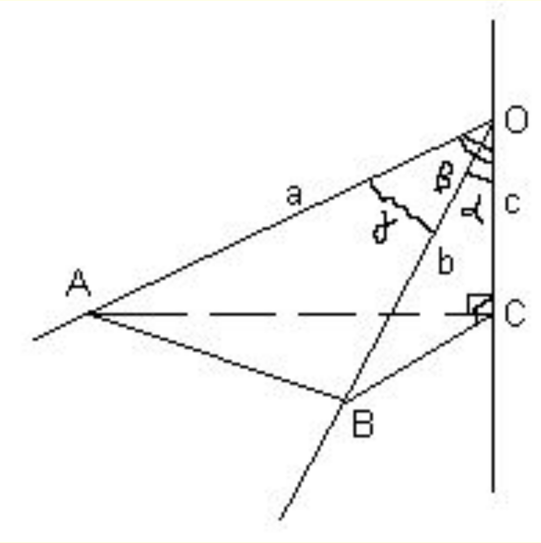
тогда $\boldsymbol{\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos}$

.

II. Пусть α > 90°; β > 90°,
тогда рассмотрим луч c’, дополнительный к c,
и соответствующий трехгранный угол Oabc’,
в котором плоские углы π – α и π – β – острые,
а плоский угол γ и двугранный угол $\hat{c}$ – те же самые.

По **I.**: $\cos\gamma = \cos(\pi - \alpha)\cdot\cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - \alpha)\cdot\sin(\pi - \beta)\cdot\cos\hat{c}$

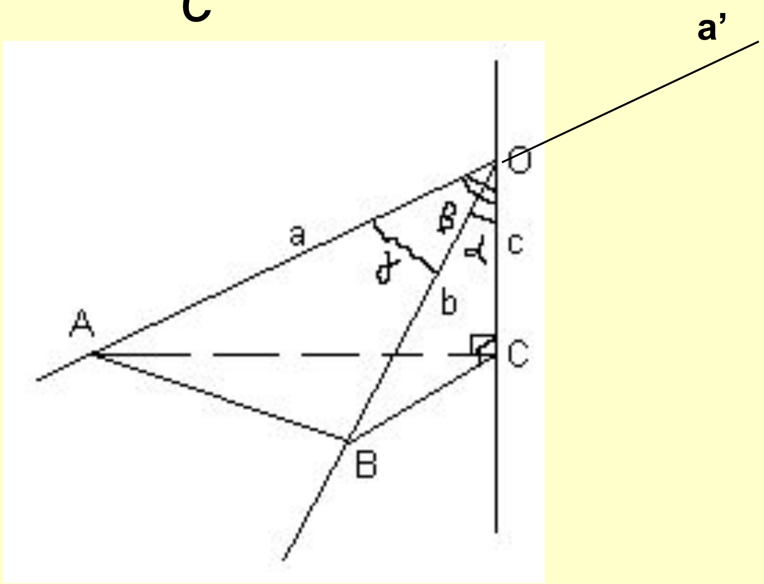
⇔ $\cos\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\hat{c}$



III. Пусть $\alpha < 90°$; $\beta > 90°$,
тогда рассмотрим луч а’,
дополнительный к а,
и соответствующий трехгранный угол Oa’bc, в котором
плоские углы α и $\pi - \beta$ – острые,
третий плоский угол – $(\pi - \gamma)$,
а противолежащий ему двугранный угол – $(\pi - \hat{c})$

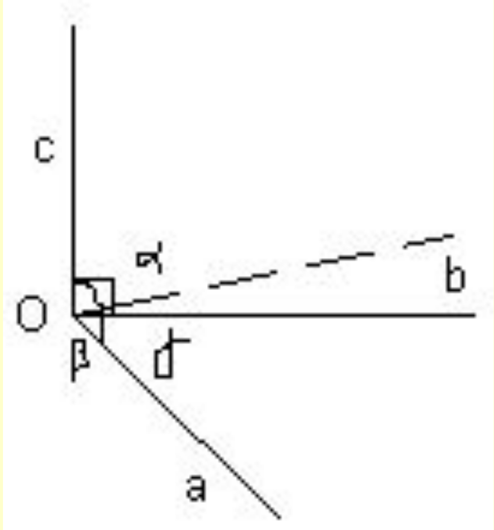
По **I.:** $\cos(\pi - \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin\alpha \cdot \sin(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \hat{c})$

$\Leftrightarrow$ ***$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\hat{c}$***



IV. Пусть $\alpha = 90°$; $\beta = 90°$, тогда $\gamma = \hat{c}$

и равенство, очевидно, выполняется.
Если же только один из этих углов,
например, $\beta = 90°$,
то доказанная формула имеет вид:



$\cos\gamma = \sin\alpha \cdot \cos\hat{c} \Leftrightarrow \cos\gamma = \cos(90° - \alpha) \cdot \cos\hat{c}$

<u>Следствие</u>. ***Если $\hat{c}$ = 90°, то $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$ –***
аналог теоремы Пифагора*!*

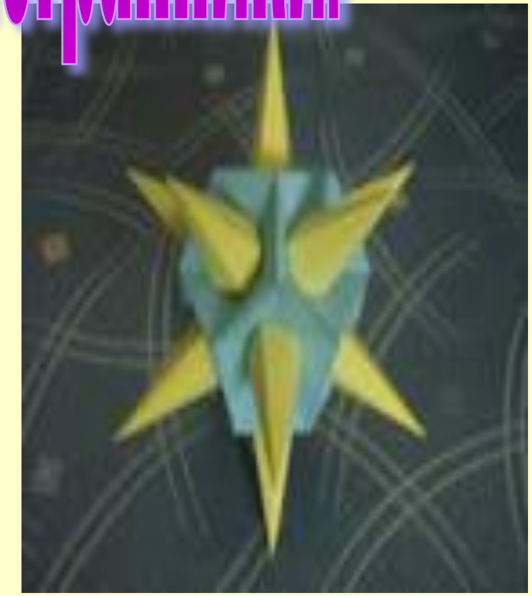
,

5. Теорема синусов

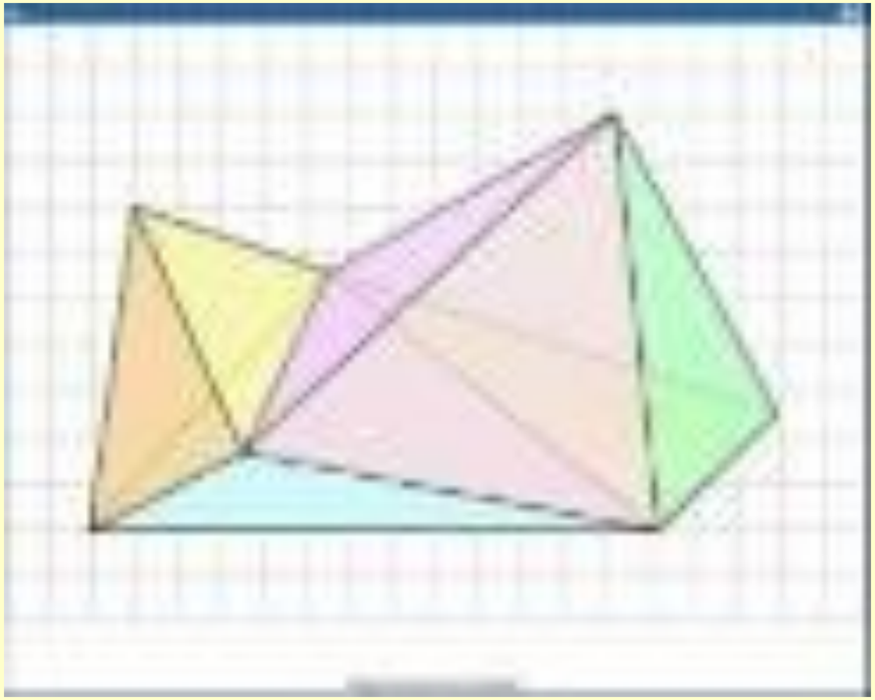
$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$$

Многогранный угол, внутренняя область которого расположена по одну сторону от плоскости каждой из его граней, называется **выпуклым многогранным углом**. В противном случае многогранный угол называется **невыпуклым**.

Многогранники. Правильные многогранники.



- Многогранник- это тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.



Элементы многогранника

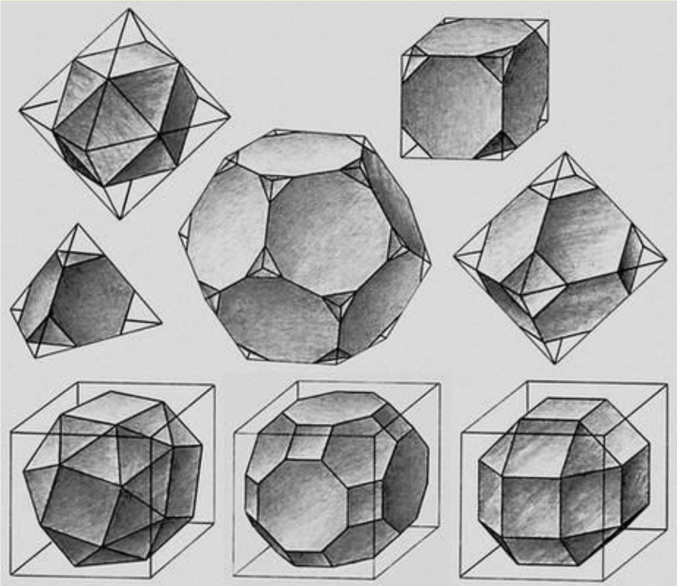
- **Грани многогранника - это многоугольники, которые его образуют.**
- **Ребра многогранника - это стороны многоугольников.**
- **Вершины многогранника - это вершины многоугольника.**
- **Диагональ многогранника - это отрезок, соединяющий 2 вершины, не принадлежащие одной грани.**

Многогранники

выпуклый

невыпуклый

- Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону плоскости каждого многоугольника на его поверхности.



Правильные многогранники

- Если грани многогранника являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер, то выпуклый многогранник называется правильным.

Названия многогранников

пришли из Древней Греции*,*

в них указывается число граней*:*

*«***эдра***»* **– грань***;*

*«***тетра***»* **–** *4;*

*«***гекса***»* **–** *6;*

*«***окта***»* **–** *8;*

*«***икоса***»* **–** *20;*

*«***додека***»* **–** *12.*

Правильный тетраэдр

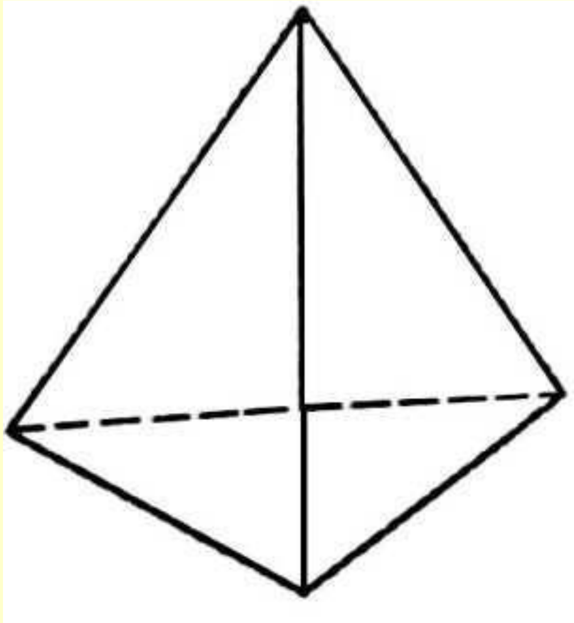


Рис. 1

Составлен из четырёх равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трёх треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 180º.

Правильный октаэдр

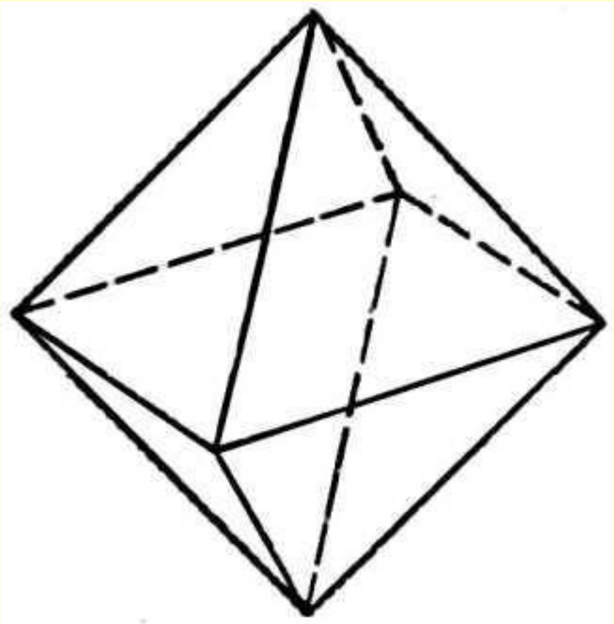


Рис. 2

Составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырёх треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине 240º.

Правильный икосаэдр

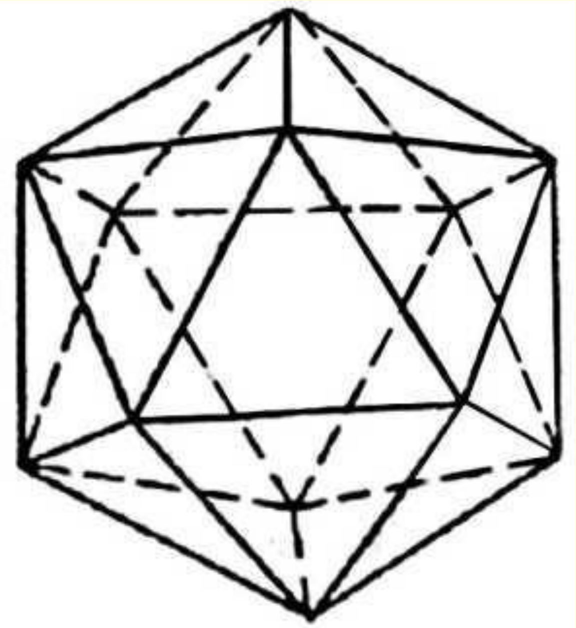


Рис. 3

Составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной пяти треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна *300º.*

Куб (гексаэдр)

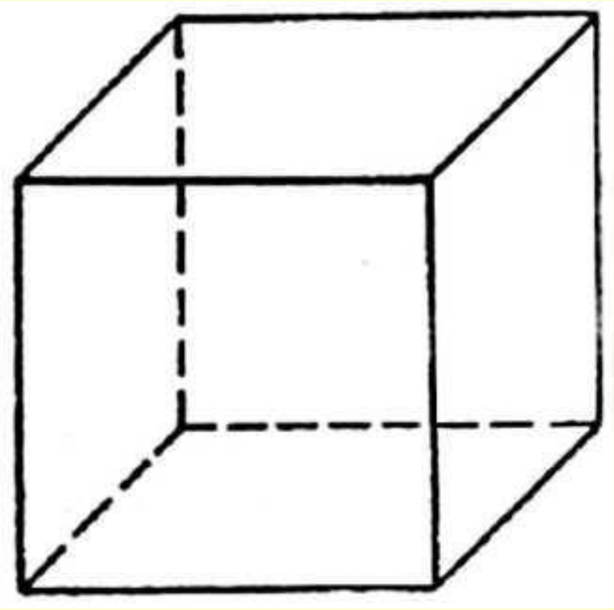


Рис. *4*

Составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трёх квадратов. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна *270º.*

Правильный додекаэдр

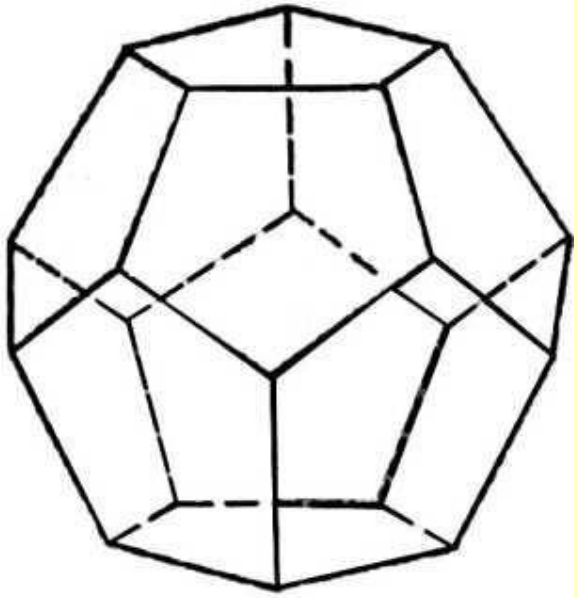


Рис. 5

Составлен из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трёх правильных пятиугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 324º.

Таблица № 1

Правильный многогранник	Число		
	граней	вершин	рёбер
Тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Додекаэдр	12	20	30
Икосаэдр	20	12	30

Формула Эйлера

Сумма числа граней и вершин любого многогранника

равна числу рёбер, увеличенному на 2.

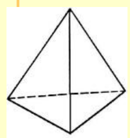
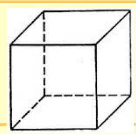
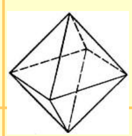
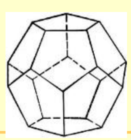
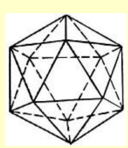
$$Г + В = Р + 2$$

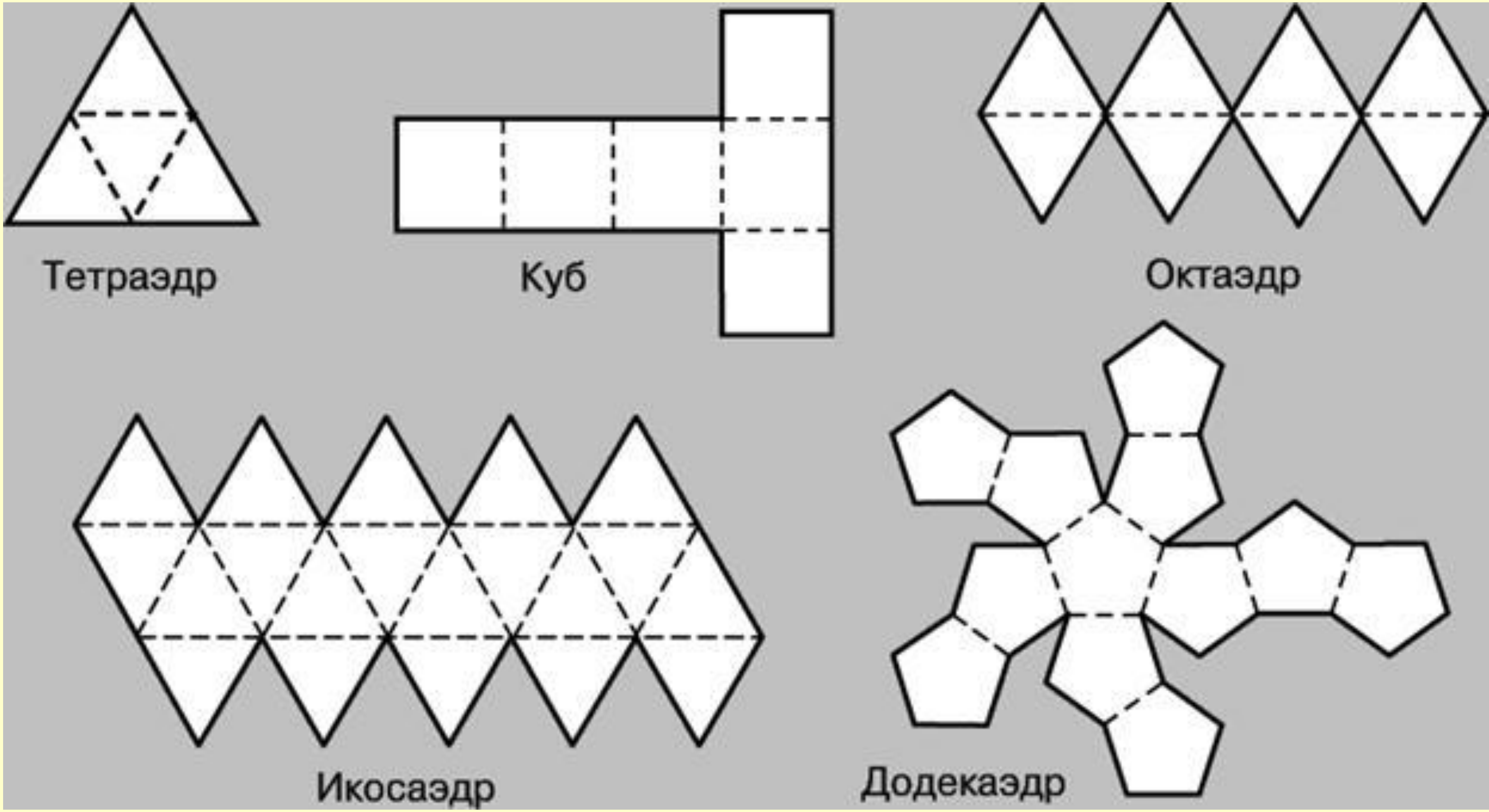
Число граней плюс число вершин минус число рёбер

в любом многограннике равно 2.

$$Г + В - Р = 2$$

Таблица № *2*

Правильный многогранник		Число		
		граней и вершин (Г + В)	рёбер (Р)	
Тетраэдр		4 + 4 = 8	6	«тетра» – *4;*
Куб		6 + 8 = 14	12	«гекса» – *6;*
Октаэдр		8 + 6 = 14	12	«окта» – *8*
Додекаэдр		12 + 20 = 32	30	додека» – *12.*
Икосаэдр		20 + 12 = 32	30	«икоса» – *20*



Тетраэдр
Куб
Октаэдр
Икосаэдр
Додекаэдр