

Случайные величины

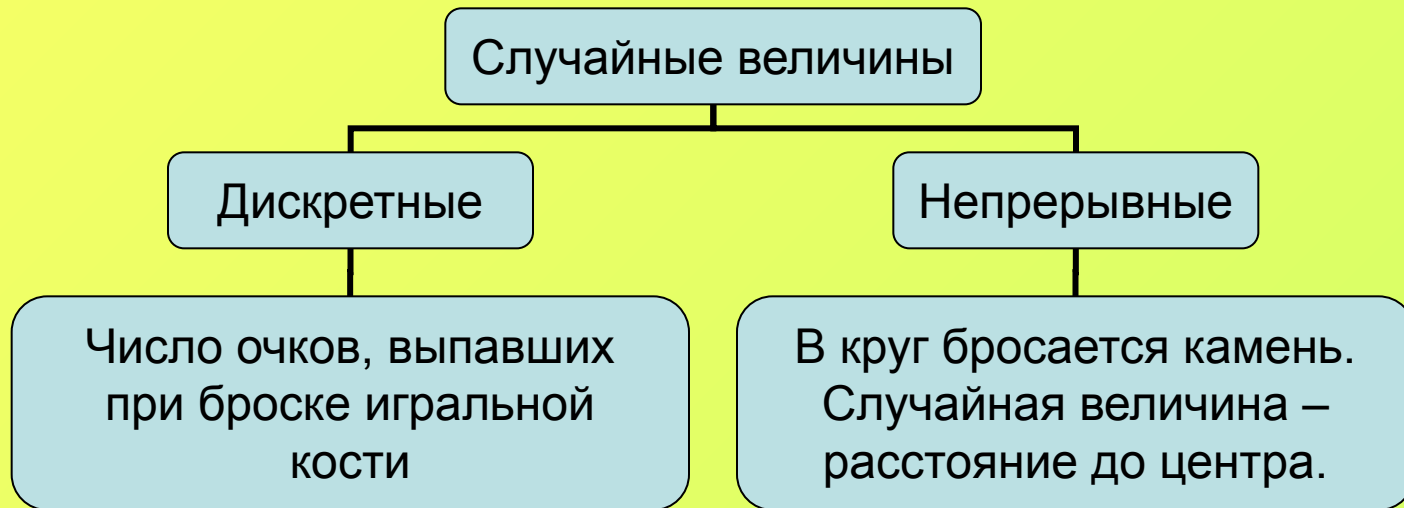
Понятие о случайной величине

Пусть имеется величина x , которая может принимать то или иное значение, причем это значение может быть различным при неизменных условиях постановки опыта. Такая величина носит название случайной величины.

Примеры случайных величин

1. Число очков, выпавших при бросании кубика.
2. Спортсмен бросает копье. Случайная величина – дальность броска при одной попытке.

Классификация



Случайную величину можно создать и искусственно

Приведем примеры перехода от событий к случайным величинам.

Пусть из урны наудачу выбирается шары, причем известно, что в урне имеются шары красного, синего и зеленого цветов. Вводим случайную величину x , принимающую значения:

$x = 1$, если вынутый шар оказался зеленым

$x = 2$, если вынутый шар оказался красным

$x = 3$, если вынутый шар оказался синим.

Таким образом мы совершили переход от событий к случайной величине.

Дискретные случайные величины

Пусть дана случайная величина x и множество значений этой величины $\{x_k\}$. Пусть известны вероятности событий $p(x_k)$ -вероятности, что случайная величина x примет значение x_k . Тогда говорят, что задано дискретное распределение случайной величины

Отметим важнейшие особенности случайных величин. Распределения случайных величин могут быть конечными и бесконечными. Примером конечного распределения может служить распределение случайной величины x - числа попаданий в цель при трех выстрелах. Очевидно, что x принимает значения из множества $\{0, 1, 2, 3\}$. Данное распределение конечное. Примером бесконечного распределения может служить распределение случайной величины x - числа выбрасывания двух кубиков до тех пор, пока не выпадет 12 очков. Очевидно, что теоретически величина x может принимать сколь угодно большие значения. Данное распределение бесконечное.

Конечное распределение

Если мы имеем конечное распределение случайной величины x , принимающей n значений, то:

$$\sum_{k=1}^n p(x_k) = 1$$

Бесконечное распределение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k) = 1$$

Пример

В урне находится 6 белых и 4 черных шара. Из нее без возвращения вынимают 3 шара. Случайная величина x – число белых шаров среди вытащенных.

Очевидно, что x может принимать значения 0, 1, 2 и 3, т.е. мы имеем дело с конечным распределением.

Найдем вероятности $p(x)$.

P(x):

$$p(0) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

$$p(1) = 3 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{30}$$

$$p(2) = 3 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{15}{30}$$

$$p(3) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{30}$$

Запишем полученные результаты
в таблицу:

X	0	1	2	3
p(x)	1/30	9/30	15/30	5/30

Мы получили **ряд распределения**
случайной величины x .

Распределение случайной величины

Пусть случайная величина принимает числовые значения x_k с вероятностями p_k соответственно, причем $\sum_k p_k = 1$. Тогда зависимость $p_k(x_k)$ называется законом распределения случайной величины x .

Математическое ожидание случайной величины.

Пусть имеется случайная величина x и мы сделали N испытаний, получив N значений этой величины. Тогда рассмотрим величину $\langle x \rangle = \sum x_k / N$ при большом значении N . Мы обнаружим, что эта величина при больших N стремится к некоторому значению, которое называется **математическим ожиданием случайной величины N** .

$$M(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum x_k}{N}$$

Для известного закона
распределения

$$M(x) = \sum x_k \cdot p_k$$

Для нашего примера.

$$M(x) = \sum_{x=0}^3 x \cdot p(x) = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{9}{30} + 2 \cdot \frac{15}{30} + 3 \cdot \frac{5}{30} = \frac{54}{30} = 1.8$$

Физический смысл
математического ожидания надо
рассматривать для каждого
случая отдельно.

В нашем случае $M(x)=1.8$ означает, что
если при повторении эксперимента n
раз мы суммарно вытащили k ,белых
шаров, то при $n \rightarrow \infty$ $k/n \rightarrow 1.8$

Пример

В казино установлена следующая игра: на автомате выбрасываются 3 числа от 1 до 5. Цена игры 50 руб. Если выпадает 777, то игрок получает 1000 руб, любые другие три цифры – 250 руб. две по 5 – 100 руб, две любые другие цифры – 50 руб.

Оценить месячный доход с автомата, если за месяц на нем играется около 10 000 игр.

Найдем вероятности каждого выигрыша

1000 руб: $p=1/125$

500 руб: $p=4/125$

50 руб: $p=(4 \cdot 3)/125=12/125$

20 руб: $p=(4 \cdot 4 \cdot 3)/125=48/125$

Имеем ряд распределения:

X	1000	250	100	50
P	1/125	4/125	12/125	48/125

Вычислим математическое ожидание

$$M(x) = 1000 \cdot \frac{1}{125} + 250 \cdot \frac{4}{125} + 100 \cdot \frac{12}{125} + 50 \cdot \frac{48}{125} =$$
$$= 8 + 8 + 9.6 + 19.2 = 44.8$$

Тогда за 10 000 игр ожидается выигрыш 448 000 руб, а получено с игроков 500 000 руб. Доход составит 52 000 руб.

Функция случайной величины.

Пусть задана случайная величина x , ее ряд распределения и функция $y=y(x)$.

Тогда:

$$M(y) = \sum y(x_k) p(x_k)$$

Пример:

$$y(x) = x^3$$

$$M(y) = \sum x_k^3 \cdot p(x_k)$$

Дисперсия случайной величины

$$D(x) = \frac{\sum (x - M(x))^2}{N}$$

Можно получить

$$\begin{aligned} D(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum (x - M(x))^2}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum x^2}{n} - 2M(x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum x}{n} + M^2(x) \cdot \frac{\sum 1}{n} = \\ &= M(x^2) - 2M(x) \cdot M(x) + M^2(x) = \\ &= M(x^2) - M^2(x) \end{aligned}$$

В нашем примере

$$\begin{aligned} M(x^2) &= \sum_{x=0}^3 x^2 \cdot p(x) = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{9}{30} + 4 \cdot \frac{15}{30} + 9 \cdot \frac{5}{30} = \\ &= \frac{9 + 60 + 45}{30} = 3.8 \end{aligned}$$

$$D(x) = 3.8 - 1.8^2 = 0.56$$

Биномиальный закон распределения

Пусть имеется некоторое событие, которое выполняется с вероятностью p не выполняется с вероятностью $q=1-p$. Пусть производится N независимых испытаний. Обозначим за $p(n)$ – вероятность того, данное событие произойдет в n случаях.

$$p(n) = C_N^n p^n \cdot q^{N-n}$$