Действия с комплексными числами

Повторение

- Комплексное число – это упорядоченная пара действительных чисел

$$\mathrm{z} = (x; y)$$

Алгебраическая форма записи комплексного числа

$$x + iy$$

Где i $-$ мнимая единица, т. е. комплексное число с координатами

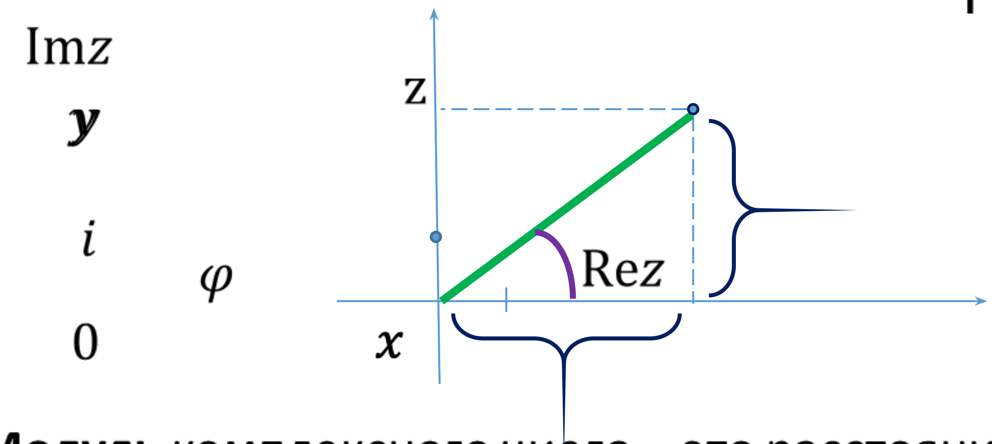
$$i = (0; 1);$$

x - ***действительная часть*** комплексного числа, или $\mathrm{Re}z$;

y - ***мнимая часть*** комплексного числа, или $\mathrm{Im}z$;

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

$$|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



Модуль комплексного числа – это расстояние от точки, обозначающей число, до точки 0:

$$|z| = |0z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Аргумент комплексного числа φ – это угол между направлением на точку, обозначающую число и положительным направлением оси OX:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \text{если } (x;y) \in I\,, IV \text{ четверти;} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, \text{если } (x;y) \in II \text{ четверти;} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, \text{если } (x;y) \in III \text{ четверти;} \end{cases}$$

Умножение и деление в тригонометрической форме

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\,;$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))\,;$$

Формула Муавра

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Извлечение корня из комплексного числа

Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1;$$

Показательная форма записи комплексного числа

Если в тригонометрической форме записи $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

обозначить $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, то получим

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

Показательная форма записи комплексного числа

Решение уравнений в поле комплексных чисел

1) $z^2 - 2iz - 5 = 0$ ОТВЕТ: $i \pm 2$

2) $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$ ОТВЕТ: $z_{1,2} = \pm i,\ z_{3,4} = \pm\sqrt{3}i$

1) $z^2 - 2iz - 5 = 0$

$D = (-2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = -4 + 20 = 16; \quad \sqrt{D} = 4$

$z_{1,2} = \frac{2i \pm 4}{2}; \quad z_1 = \frac{2i + 4}{2} = \frac{\cancel{2}(i+2)}{\cancel{2}} = i + 2$

$z_2 = \frac{2i - 4}{2} = \frac{\cancel{2}(i-2)}{\cancel{2}} = i - 2$

ОТВЕТ: $i \pm 2$

Как сделать проверку?

2) $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$

РЕШЕНИЕ: Заданное уравнение является БИКВАДРАТНЫМ, выполним замену

$$z^2 = t \;\Rightarrow\; z^4 = t^2;$$

после замены переменной получим квадратное уравнение:

$$t^2 + 4t + 3 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = 2,$$

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

Если в тригонометрической форме записи $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\frac{-4+2}{2} = -1 \qquad t_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$$

$$z^2 = -1 \Rightarrow z_{3,4} = \pm i$$

$$z = |z| e^{i\varphi} \quad \pm\sqrt{3}i$$

ОТВЕТ: $z_{1,2} = \pm i;\; z_{3,4} = \pm\sqrt{3}i$

Как сделать проверку?

Задачи

1) Даны числа $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ и $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$ Представить их в показательной форме записи и выполнить действия:

$t^2 + 4t + 3 = 0$

а) $z_1 \cdot z_2$ б)

2) Решить уравнение $(z + 1)^4 - 16 = 0$

2) Даны числа $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ и $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$ Представить их в показательной форме записи и выполнить действия:

а) $z_1 \cdot z_2$ $\qquad \dfrac{(z_1)^2}{z_2}$ б)

$$2\sqrt{3} - 2i = \left| \begin{matrix} x = 2\sqrt{3} & |z| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = 4 \\ y = -2 & \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\pi}{6} \end{matrix} \right| = 4e^{-i\frac{\pi}{6}};$$

$$3 - 3\sqrt{3}i = \left| \begin{matrix} x = 3 & |z| = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6 \\ y = -3\sqrt{3} & \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{-3\sqrt{3}}{3} = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\dfrac{\pi}{3} \end{matrix} \right| = 6e^{-i\frac{\pi}{3}};$$

а) $z_1 \cdot z_2 = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \cdot 6e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4 \cdot 6e^{-i\frac{\pi}{6} - i\frac{\pi}{3}} = 24e^{-i\frac{3\pi}{6}} =$ $\qquad 24e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\dfrac{(z_1)^2}{z_2} =$ б) $\qquad \dfrac{\left(4e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^2}{6e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{16e^{-i\frac{2\pi}{6}}}{6e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{16e^{-i\frac{\pi}{3}}}{6e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{8}{3}$

ОТВЕТ : $\dfrac{8}{3}$ б)

а) $-24\,i$

РЕШЕНИЕ:

3) $(z+1)^4 - 16 = 0;$

$(z+1)^4 = 16$ обозначим $z+1 = t \Rightarrow z = t-1$

$t^4 = 16 \Leftrightarrow t = \sqrt[4]{16}$

представим 16 в тригонометрической форме :

$$16 = \left| \begin{matrix} x = 16 & |z| = \sqrt{16^2 + 0^2} = 16 \\ y = 0 & \varphi = 0 \end{matrix} \right| = 16 \cdot (\cos 0 + i \sin 0);$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16} \cdot \left(\cos\frac{0+2\pi k}{4} + i\sin\frac{0+2\pi k}{4} \right), \qquad k = 0, 1, 2, 3;$$

$k = 0; t_1 = 2 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 2(1 + i \cdot 0) = 2; z_1 = 2 - 1 = 1;$

$| z |$ $2(0 + i \cdot 1) = 2i; z_2 = 2i - 1;$

$k = 2; t_3 = 2 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2; z_3 = -2 - 1 = -3;$

$$k = 3; t_4 = 2 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} \right) = 2\big(0 + i \cdot (-1)\big) = -2i; z_4 = -2i - 1;$$

ОТВЕТ: $1; -3; -1 \pm 2i;$

Дома выполнить проверку решенных уравнений