Урок 2

Тема урока : Первообразная. Правило нахождения первообразной. Неопределенный интеграл.

Цель урока. *Познакомить учащихся с понятиями первообразной и неопределенного интеграла. Ввести основные понятия темы и дать их основные свойства.*
Прививать интерес к предмету, используя исторический материал. Связь дифференцирования и интегрирования и их применение к решению прикладных задач, были разработаны в основном в трудах И.Ньютона и Г.Лейбница в конце 18 века. Их исследования послужили толчком для последующего интенсивного развития математического анализа. Большую роль в развитии интегрального исчисления сыграли работы Л.Эйлера, И.Бернулли, Ж. Лагранжа, позднее О.Коши и Г.Римана (1826-1866).

Изучение нового материала

Изучение нового материала.

Решить задачи.

1. Найти функцию, производная которой $y' = 5x^4$

Решение: *Используя правило дифференцирования, можно догадаться, что такой функцией является* x^5.

2. Найти функцию, производная которой $y' = \cos x$

Решение: $y = \sin x$.

3. Найти функцию, дифференциал которой $dy = 3x^2 dx$

Решение: $y = x^3$.

Функцию, восстанавливаемую по заданной производной или дифференциалу, называют первообразной.

Определение. *Дифференцируемая функция* $F(x)$ ***называется первообразной для функции*** $f(x)$ ***на заданном промежутке, если для всех*** x ***из этого промежутка справедливо равенство*** $F'(x) = f(x)$.

Из этого определения вытекает, что всякая функция по отношению к своей производной является первообразной.

Примеры.

1.Найти первообразную функции: $f(x)=10x^9$

$F(x)=x^{10}$, действительно, $F'(x)=10x^9$

2.Найти первообразную функции:

$a)\ f(x)=x^3$

Степень x^3 получается при дифференцировании x^4.

$F(x)=\frac{1}{4}x^4$

$б)\ f(x)=x^6$ $F(x)=\frac{1}{7}x^7$

3. Показать, что функция $F(x)=\frac{1}{3}\cos 3x$ является первообразной функции $(-\sin 3x)$.

Так как $\left(\frac{1}{3}cos3x\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot(-\sin 3x)=-\sin 3x,$

то $\frac{1}{3}cos3x$ - первообразная функции $(\text{-}\sin 3x)$

Дифференцирование функции – однозначная операция, то есть если функция имеет производную , то только одну. Это утверждение непосредственно следует из определений предела и производной: если функция имеет предел, то только один.

Однозначна ли обратная операция- отыскания первообразной?

Найдем функцию производная которой равна x^2.

Такой функцией является $\frac{1}{3}x^3$.

Мы нашли первообразную. Может есть еще функции, производные которых равны x^2 ? Да есть.

$\frac{1}{3}x^3+1$ $\quad$ $\frac{1}{3}x^3-19$ $\quad$ $\frac{1}{3}x^3+C$

Операция нахождения первообразных неоднозначна.

Теорема. *Если* $F(x)$ *является первообразной функции* $f(x)$ *на некотором промежутке, то множество всех первообразных этой функции имеет вид* $F(x)+C,$ *где С- любое действительное число.*

Пусть $F'(x) = f(x)$. Тогда $(F(x)+C)' = F'(x)+C' =$
$= F'(x) = f(x)$.

Геометрически выражение $F(x)+C$ представляет собой семейство кривых, получаемых из любой из них параллельным переносом вдоль оси ОУ.

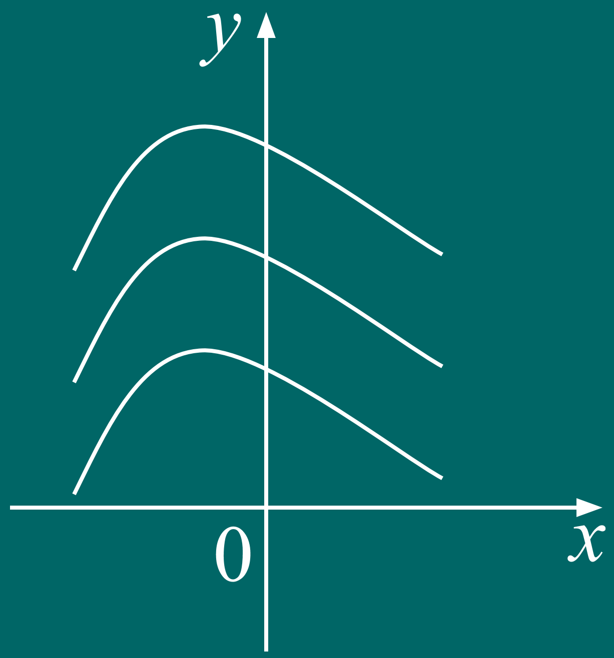
Примеры. *Найти первообразные для функции:*

$a)\ f(x)=5\sin x+x^2$

$F(x)=-5\cos x+\frac{1}{3}x^3+C$

$б)\ f(x)=3e^x+2\cos x$

$F(x)=3e^x+2\sin x+C$



Задача. *Для функции* $f(x) = 2x + 3$ *найти первообразную, график которой проходит через* $M(1;2)$.

Решение. $F(x) = x^2 + 3x + C$

$2 = 1 + 3 + C, \qquad C = -2, \qquad F(x) = x^2 + 3x - 2$

Задача. *Для функции* $f(x) = \sin 2x$ *найти первооб-разную, график которой проходит через* $M(\frac{\pi}{2};5)$.

Решение. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

$$5 = -\frac{1}{2}\cos(2\cdot\frac{\pi}{2}) + C, \qquad 5 = -\frac{1}{2}\cos\pi + C,$$

$$5 = \frac{1}{2} + C, \qquad C = \frac{9}{2}, \qquad F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{9}{2}.$$

Определение. *Совокупность всех первообразных* $F(x)+C$ *функции* $f(x)$ *на рассматриваемом промежутке называется* ***неопределенным интегралом*** *и обозначается символом*

$\int f(x)dx$, где $f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

x - переменная интегрирования.

$\int f(x)dx = F(x)+C$, *где* C *– любое действительное число.*

Слово интеграл происходит от латинского integer, что означает «восстановленный».

Чтобы проверить, правильно ли найден неопределенный интеграл, необходимо продифференцировать полученную функцию; если при этом получается подынтегральное выражение, то интеграл найден верно.

Пример. $1. \int 5x^4 dx$

Решение. Требуется найти такую функцию, производная которой равна $5x^4$. $(x^5)' = 5x^4$

$$\int 5x^4 dx = x^5 + C$$

$$2. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \text{ так как } (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$3. \int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C, \text{ так как } \left(\frac{4^x}{\ln 4}\right)' = \frac{1}{\ln 4} \cdot (4^x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln 4} \cdot 4^x \cdot \ln 4 = 4^x$$

Основные свойства неопределенного интеграла.

1.Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, то есть

$$\left(\int x^7 dx\right)' = x^7 \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак интеграла, то есть

$$\int 5x dx = 5\int x dx \qquad \int mf(x)dx = m\int f(x)dx$$

3.Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, то есть

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' =$$

$$= f(x) \pm g(x)$$

4.Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

$$d\int \cos 2xdx = \cos 2xdx, \qquad d\int 3tdt = 3tdt$$

5.Неопределенный интеграл дифференциала (производной) некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной С, то есть

$$\int dF(x) = F(x) + C \qquad \text{или} \qquad \int F'(x)dx = F(x) + C$$

$$\int d(x^3) = x^3 + C, \qquad \int d(\cos x) = \cos x + C.$$

Пример. *Вычислить*

$$\int (5\cos x + 3e^x)dx = 5\int \cos x dx + 3\int e^x dx =$$

$$5\sin x + C_1 + 3e^x + C_2 = 5\sin x + 3e^x + C.$$

Задача. *Скорость тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону* $v = 3t^2 + 2t$. *Найти закон движения тела.*

Известно, что скорость прямолинейного движения тела равна производной пути по времени, то есть

$$v = s' = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 2t \quad \Rightarrow \quad ds = (3t^2 + 2t)dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int ds = \int (3t^2 + 2t)dt, \quad s = t^3 + t^2 + C$$

Самостоятельное применение знаний, умений и навыков.

1 вариант		*2 вариант*
Найти одну первообразную для функции:		
1) $f(x) = 8x^3 - 3x^2$		1) $f(x) = 4x^3 - 6x^2$
$x^4 - 2x^3$	$2x^4 - x^3$	$\frac{4}{3}x^4 - \frac{3}{2}x^3$
2) $f(x) = 3\cos x + 2\sin x$		2) $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$
$3\sin x - 2\cos x$	$-3\sin x + \cos x$	$-3\cos x + 2\sin x$

Домашнее задание

- *[1] с287-292 п.54-55(или конспект выучить), №983-986,988-989*