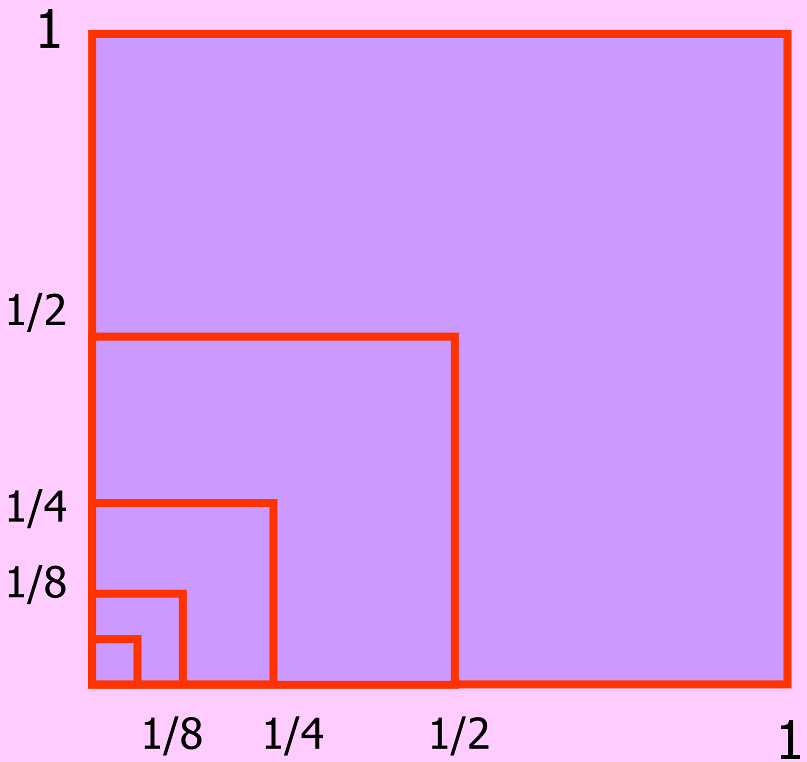
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Бесконечно убывающие геометрические прогрессии



Стороны квадратов:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{2^3};\ldots;\ \frac{1}{2^{n-1}};\ldots \qquad q=\frac{1}{2}<1$$

$$n\to\infty;\ a\to 0$$

$$n=15,\quad \frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{14}}=\frac{1}{16384};$$

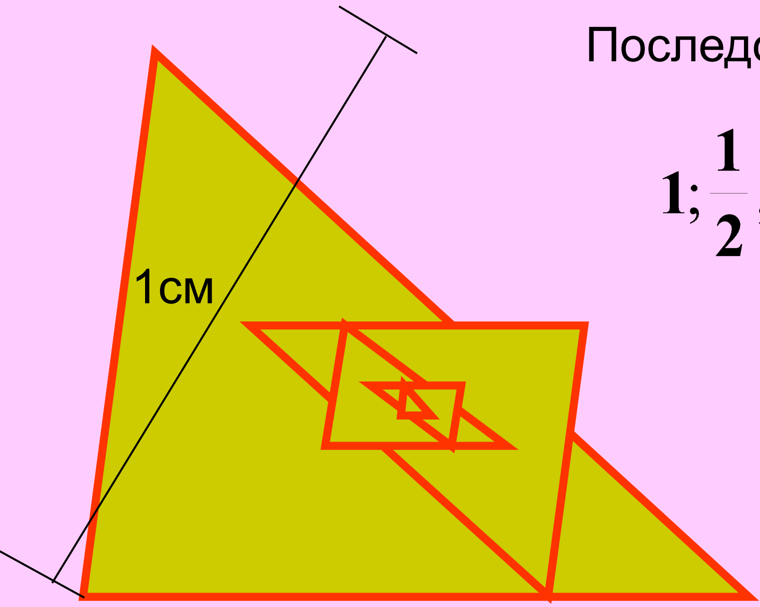
$$n=20,\quad \frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{19}}=\frac{1}{524288};$$

$$n=21,\quad \frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{20}}=\frac{1}{1048576}.$$

Площади квадратов:

$$1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4^2};\ \frac{1}{4^3};\ldots;\ \frac{1}{4^{n-1}};\ldots \qquad q=\frac{1}{4}<1 \qquad n\to\infty;\ S\to 0$$

Бесконечно убывающие геометрические прогрессии



Последовательность длин сторон треугольников:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \ldots; \frac{1}{2^{n-1}}; \ldots \qquad q = \frac{1}{2} < 1$$

$$n \to \infty; a \to 0$$

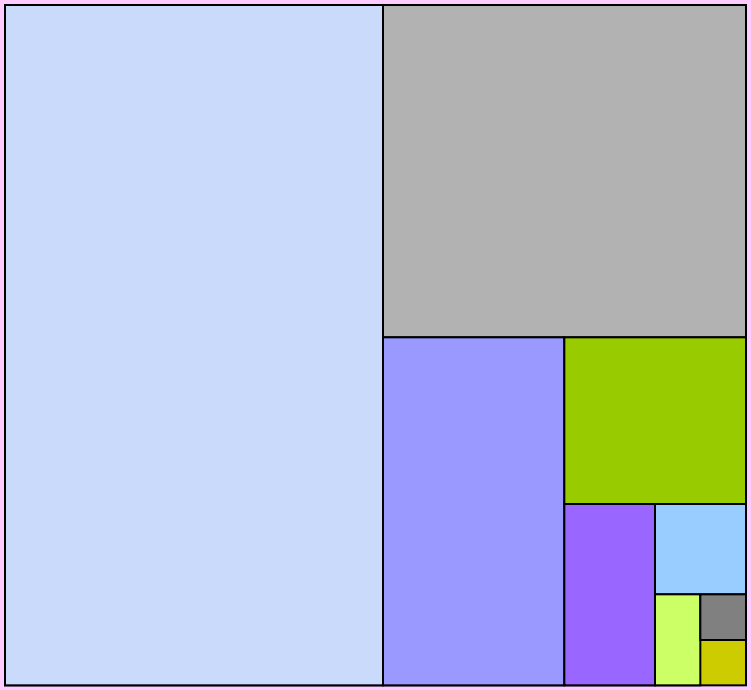
$$q = -\frac{1}{3}; \qquad 1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; -\frac{1}{3^3}; \ldots; \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}; \ldots$$

$$b_1 = 1, b_2 = -\frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{9}, b_4 = -\frac{1}{27}$$

$$|q| < 1$$

Опр. Геометрическая прогрессия называется ***бесконечно убывающей***, если модуль её знаменателя меньше единицы.

Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии при |q|<1.



$$\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\frac{1}{32};\ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=1$$

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

$$S_n=\frac{1}{2}\bullet\frac{1-(0,5)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$$

$n\to\infty,\frac{1}{2^n}\to 0$, то $(1-\frac{1}{2^n})\to 1$, т.е. $S_n\to 1.$

Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии при |q|<1.

Опр. ***Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии*** называют число, к которому стремится сумма её первых ***n*** членов при ***n*** → ∞

$$S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}. \qquad S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}\bullet q^n.$$

$|q|<1$, то $q^n \to 0$, при $n \to \infty$. Поэтому $\frac{b_1}{1-q}\bullet q^n \to 0$

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}} \qquad |q|<1$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Опр. Геометрическая прогрессия называется ***бесконечно убывающей***, если модуль её знаменателя меньше единицы.

$$|q| < 1$$

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1 - q}}$$

1). Является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей, если: $b_7 = -30$; $b_6 = 15$?

2). Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

-25; -5; -1;…

3). Записать бесконечную десятичную периодическую дробь 0,(9) в виде обыкновенной дроби.

самопроверка

1). Является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей, если: $b_7 = -30$; $b_6 = 15$?

$$q = \frac{b_7}{b_6} = -\frac{30}{15} = -2; \quad \left| -2 \right| > 1,$$

Г.П. не является бесконечно убывающей

2). Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: -25; -5; -1;…

$$S = \frac{b_1}{1-q}; b_1 = -25; q = \frac{1}{5}; S = \frac{-25}{1-\frac{1}{5}} = -\frac{125}{4} = -31\frac{1}{4}$$

3). Записать бесконечную десятичную периодическую дробь 0,(9) в виде обыкновенной дроби.

$$0,(9) = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots$$

$$q = \frac{1}{10}; \quad S = \frac{b_1}{1-q}; \quad S = \frac{0,9}{1-0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1. \qquad 0,(9) = 1$$