Определители

Определители: основные понятия

Каждой квадратной матрице $A = \left(a_{ij}\right)_n$ можно поставить в соответствие единственное число, называемое *определителем* или *детерминантом* матрицы, которое обозначается символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

В этом случае перечисляются все элементы матрицы A, для которой он определяется.

Элементы матрицы, строки и столбцы в этом случае называются элементами, строками, столбцами определителя.

В тех случаях когда элементы матрицы A уже указаны выше или её числовые значения не имеют принципиального значения, используется более краткий вариант обозначений:

$$det\ A, \Delta A, |A|$$

Вспомогательные сведения: перестановки

Пусть X – некоторое множество из n элементов.

Определение 1. Множество из n элементов называется *упорядоченным*, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число от 1 до n, номер элемента.

Определение 2. Различные упорядоченные множества одного и того же множества из n элементов называются *перестановками* этого множества.

Теорема 1. Число перестановок множества из n различных элементов равно $n!$

<u>Доказательство</u>. 1) $n = 2$. $X = \{a;b\}$ Перестановки: $(a;b),(b;a)$ $2 = 1 \cdot 2 = 2!$

2) Предположим, что утверждение верно при $n = k$, т.е. множество из κ различных элементов можно перенумеровать (расставить) $\kappa!$ способами.

3) $n = k + 1$ Первый номер можно поставить в соответствие любому из элементов данного множества, т.е. имеется $(\kappa + 1)$ способ.

Для каждого из возможных вариантов выбора остается перенумеровать k оставшихся элементов, а это, согласно выдвинутому на втором шаге предположению, возможно осуществить $\kappa!$ способами.

Таким образом, число различных перестановок множества из $(k+1)$ различных элементов будет равно: $(k+1) \cdot k! = (k+1)!$.

Вспомогательные сведения: транспозиции

Пусть множество X состоит из элементов $\{1, 2, ..., n\}$.

Обозначим символом $j = (j_1, j_2, ..., j_n)$ произвольную перестановку элементов данного множества, здесь j_k, $k = 1, 2, ..., n$ принимает только одно из значений $1, 2, ..., n$.

Перестановку вида $(1, 2, ..., n)$, где элементы множества X расположены в порядке возрастания, будем называть *основной*.

.

Определение 2. Операция, при которой два элемента перестановки (не обязательно стоящие рядом) меняются местами, называется *транспозицией*.

Пусть $t(j)$- *число* транспозиций, необходимых для получения перестановки $j = (j_1, j_2, ..., j_n)$ из основной.

Общая формула для вычисления определителей n-го порядка

Определение 3. Определителем или детерминантом матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_n$ называется число, определяемое по правилу

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j)} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}}$$

Это сумма по всем перестановкам множества из элементов $\{1,2,\ldots,n\}$, которая содержит $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение сомножителей, содержащих ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы, взятых со знаком плюс или минус в зависимости от четности числа транспозиций, необходимых для получения соответствующей перестановки из основной.

Формулы для вычисления определителей первого и второго порядков

$$\boxed{|a_{11}| = a_{11}}$$

т.е. *величина определителя первого порядка равна элементу, из которого он состоит.*

Например, $|5| = 5$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

.

Определитель второго порядка равен разности значений произведений элементов главной и побочной диагоналей.

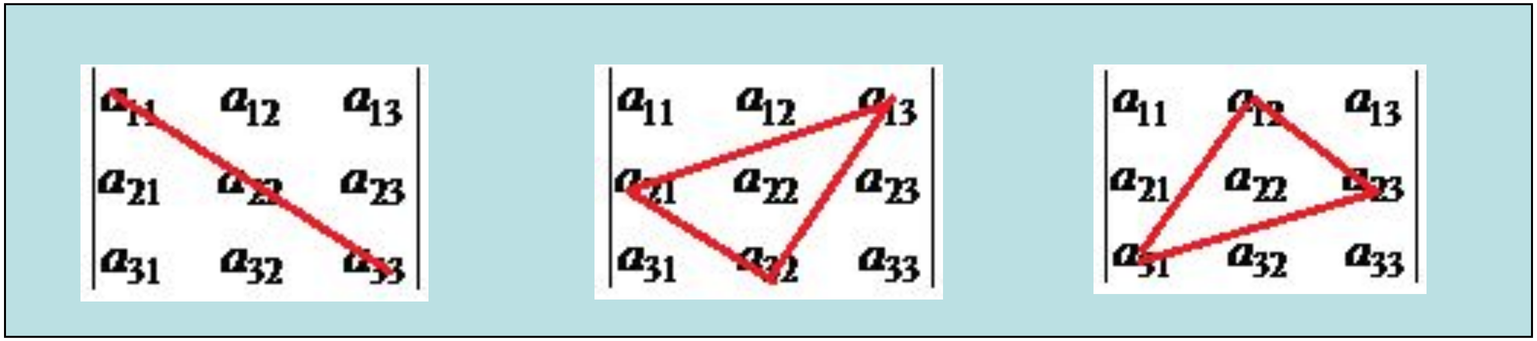
Пример 1.

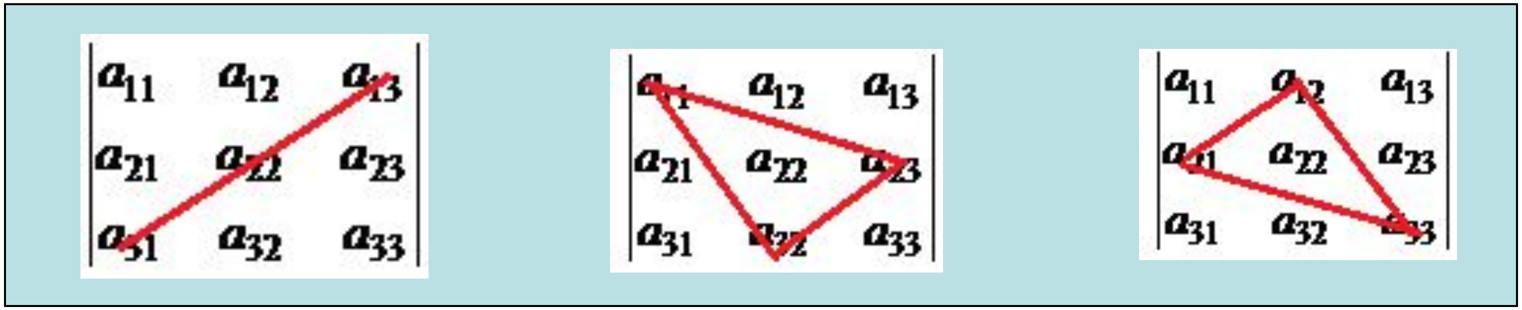
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) - 4 \cdot 5 = -14 - 20 = -34$$

Формулы для вычисления определителей третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$





Пример вычисления определителя третьего порядка по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 0 + 2\cdot(-7)\cdot(-3) + 6\cdot 8\cdot 3 - 3\cdot 4\cdot(-3) - (-7)\cdot 8\cdot 1 - 2\cdot 6\cdot 0 =$$

$$= 0 + 42 + 144 + 36 + 56 - 0 = 278.$$

Замечание. Формула для определителей четвертого порядка содержит уже 24 слагаемых ($4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$) и на практике, как правило, не используется. Вычисление определителей порядка $n \geq 4$ осуществляется другими методами, которые следуют из свойств определителей.

Свойства определителей

Теорема 2. При транспонировании величина определителя не изменяется, т.е. $det\, A = det\, A^T$.

Доказательство. Проведите самостоятельно, опираясь на формулу

Теорема 3. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

Доказательство.

$$a_{i1} = 0,\ a_{i2} = 0, \ldots, a_{in} = 0, \quad \boxed{a_{ij_i} = 0,} \quad j_i = 1, 2, \ldots, n; \quad det\, A = 0$$

Следствие 1. Если один из столбцов определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

Теорема 4. При перестановке двух строк определитель меняет свой знак.

Доказательство. Проведите самостоятельно.

Следствие 2. При перестановке двух столбцов определитель меняет свой знак.

Свойства определителей

Теорема 5. Определитель, содержащий две одинаковые строки равен нулю.

Доказательство.

Пусть у матрицы A строки с номерами i и κ состоят из одинаковых элементов.

Пусть A' - матрица, получающаяся из матрицы A перестановкой этих двух строк.

$$\boxed{\det A = -\det A',} \quad \boxed{\det A = \det A',} \quad \det A = -\det A, \quad 2\det A = 0, \quad \det A = 0$$

Следствие 3. Определитель, содержащий два одинаковых столбца, равен нулю.

Теорема 6. Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число α, то сам определитель умножится на число α.

Доказательство. $A' = \left(a'_{ij}\right)_n, \quad a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq k, \\ \alpha \cdot a_{ij}, & i = k, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n$

$$\det A' = \sum_{(j)} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{k-1\, j_{k-1}} \cdot \alpha a_{kj_k} \cdot a_{k+1\, j_{k+1}} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= \alpha \sum_{(j)} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{k-1\, j_{k-1}} \cdot a_{kj_k} \cdot a_{k+1\, j_{k+1}} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} = \alpha \cdot \det A.$$

Следствие 4. Если все элементы некоторого столбца определителя умножить на некоторое число α, то сам определитель умножится на число α.

Свойства определителей

Замечание. Из теоремы 5 и следствия 4 вытекает следующее ***правило:*** *общий множитель элементов некоторой строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя.*

Теорема 7. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

<u>***Доказательство***</u>. $A=\left(a_{ij}\right)_n,\quad \boxed{a_{kj}=\alpha\cdot a_{mj},}\qquad j=1,2,\dots,n.$

α - некоторое постоянное число

$$\boxed{\det A=\alpha\cdot\det A',}\qquad A'=\left(a'_{ij}\right)_n,\quad a'_{ij}=\begin{cases}a_{ij}, i\neq k,\\ a_{kj}=a_{mj};\end{cases}\quad j=1,2,\dots,n;\qquad \boxed{\det A'=0}$$

$$\det A=\alpha\cdot 0=0$$

Следствие 5. Определитель, содержащий два пропорциональных столбца, равен нулю.

Свойства определителей

Теорема 8. Если все элементы некоторой i-ой строки определителя n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых:

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}, \qquad j = 1, 2, \dots, n;$$

то данный определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-ой строки, такие же, как и в заданном определителе, а i-ая строка в одном определителе состоит из элементов b_{ij}, а в другом – из элементов c_{ij}, $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{ij}+c_{ij} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательство.

$$\sum_{(j)} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots a_{i-1\,j_{i-1}} \cdot \left(b_{ij_i} + c_{ij_i}\right) \cdot a_{i+1\,j_{i+1}} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{(j)} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots a_{i-1\,j_{i-1}} \cdot b_{ij_i} \cdot a_{i+1\,j_{i+1}} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} +$$

$$+ \sum_{(j)} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots a_{i-1\,j_{i-1}} \cdot c_{ij_i} \cdot a_{i+1\,j_{i+1}} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$$

Свойства определителей

Следствие 6. Если все элементы некоторого j-го столбца определителя n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

то данный определитель равен сумме двух определителей, у которых все столбцы, кроме j-го столбца, такие же, как и в заданном определителе, а j-ый столбец в одном определителе состоит из элементов $в_{ij}$, а в другом – из элементов $c_{ij}, i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j}+c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij}+c_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

Теорема 9. Определитель не изменяется, если к элементам одной из его строк прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Доказательство.

Пусть к элементам m- ой строки матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_n$ прибавляются элементы k-ой строки этой матрицы ($k \neq m$), умноженные на коэффициент α.

Получим новую матрицу $A'=\left(a_{ij}'\right)$, у которой $a_{ij}'=\begin{cases} a_{ij}, & i \neq m, \\ a_{mj}+\alpha a_{kj}, & i=m; \end{cases}$ $i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,n$.

$$\det A' = \det A + \det A'' = \det A, \qquad \det A'' = 0$$

Следствие 7. Определитель не изменяется, если к элементам одного из его столбцов прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на одно и то же число.

Свойства определителей

Замечание. Очевидно, что можно не только складывать элементы, но и вычитать, так как вычитание – прибавление элементов умноженных на (-1).

Пример 3.

$$\begin{vmatrix} 14674 & 14784 \\ 19568 & 19678 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14674 & 14784-14674 \\ 19568 & 19678-19568 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14674 & 110 \\ 19568 & 110 \end{vmatrix} = 110\cdot\begin{vmatrix} 14674 & 1 \\ 19568 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=110\cdot\begin{vmatrix} 14674 & 1 \\ 19568-14674 & 1-1 \end{vmatrix} = 110\cdot\begin{vmatrix} 14674 & 1 \\ 4894 & 0 \end{vmatrix} = 110\cdot\left(14674\cdot 0-4894\cdot 1\right)=538340.$$

Свойства определителей

Пример 4. Докажите тождество: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1-1 & b-a & b^2-a^2 \\ 1-1 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1-1 & (c+a)-(b+a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\cdot(1\cdot 1\cdot(c-b)+0+0-0-0-0) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b).$$

Дополнительный минор и алгебраическое дополнение

Определение 4. *Дополнительным минором* к элементу a_{ij} определителя n-го порядка (1), называется определитель порядка $(n-1)$, получаемый из исходного, вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Обозначение: M_{ij}.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 11 \\ 4 & 9 & 12 \\ 7 & 10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$a_{12} = 8, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 7 & 15 \end{vmatrix} = 4 \cdot 15 - 7 \cdot 12 = 60 - 84 = -24$$

$$a_{22} = 9, \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 7 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot 15 - 7 \cdot 11 = 30 - 77 = -47$$

Определение 5. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} определителя n-го порядка (1), называется число, определяемое по правилу: $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Обозначение: A_{ij}.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot M_{12} = -1 \cdot (-24) = 24,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22} = -47$$

Свойства алгебраических дополнений

Теорема 10. Сумма произведений элементов любой строки определителя на алгебраические дополнения к ним равна величине определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

<u>Доказательство</u>. Проведите самостоятельно.

Следствие 8. Сумма произведений элементов любого столбца определителя на алгебраические дополнения к ним равна величине определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}, \qquad j = 1,2,\ldots,n.$$

<u>Доказательство</u>. Проведите самостоятельно.

Вычисление определителей методом разложения по элементам строки или столбца

Пример 5.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} + a_{14}\cdot A_{14} =$$

$$= 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -9 & 2 & 7 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 5 & -9 & 7 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 15 + 5\cdot(-21) + 78 - 2\cdot 6 = 30 - 105 + 78 - 12 = -9$$

2 способ.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-6) + 12 - 12 - 3 - 0 = -9$$

Правила вычисления определителей треугольного вида

Следствие 9.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{n-1n-1} \cdot a_{nn}$$

(величина определителя треугольного вида равна произведению элементов, стоящих на главной диагонали).

Доказательство. Данное утверждение легко доказать, опираясь на метод математической индукции.

1 шаг. Проверим основание для проведения индукции.

$n = 1$: $\quad |a_{11}| = a_{11}$, $\qquad n = 2$: $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{12} = a_{11} \cdot a_{22}$

<u>*2 шаг.*</u> Предположим, что формула верна при $n = k$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{k-1,k-1} \cdot a_{kk}$$

<u>*3шаг.*</u> Докажем, что формула остается в этом случае справедливой и для $n = k + 1$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,k} & a_{2,k+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,k} & a_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} = a_{k+1,k+1} \cdot (-1)^{2k+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,k} - 1 & a_{k-1,k} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k,k} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{k+1,k+1} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{k-1,k-1} \cdot a_{k,k} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{k-1,k-1} \cdot a_{k,k} \cdot a_{k+1,k+1}$$

т.е. формула сохраняет свой вид. Утверждение доказано.

Следствие 10. Величина определителя единичной матрицы любого порядка равна 1.

Вычисление определителей методом приведения к треугольному виду

Пример 6

$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&3&1&1\\3&1&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&3&1&1\\3-1\cdot 3&1-3\cdot 3&1-1\cdot 3&1-1\cdot 3\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix}1&3&1&1\\0&-8&-2&-2\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&3&1&1\\0&-8&-2&-2\\0&-2&2&0\\1&1&1&3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&3&1&1\\0&-8&-2&-2\\0&-2&2&0\\0&-2&0&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&3&1\\0&-2&-8&-2\\0&2&-2&0\\0&0&-2&2\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}1&1&3&1\\0&-2&-8&-2\\0&0&-10&-2\\0&0&-2&2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&1&1&3\\0&-2&-2&-8\\0&0&-2&-10\\0&0&2&-2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&1&1&3\\0&-2&-2&-8\\0&0&-2&-10\\0&0&0&-12\end{vmatrix} =$$

$$= -(1\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-12)) = 48$$

Свойства алгебраических дополнений

Теорема 11. Сумма произведений элементов некоторой строки определителя на соответствующие алгебраические дополнения к элементам другой строки определителя равна нулю, т.е.

$$a_{i1}\cdot A_{k1}+a_{i2}\cdot A_{k2}+\ldots+a_{in}\cdot A_{kn}=0,\quad i\neq k,\ i=1,2,\ldots,n,\ k=1,2,\ldots,n.$$

<u>***Доказательство.***</u>

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},\qquad \tilde{\Delta}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\boxed{a_{kj}=a_{ij},\ j=1,2,\ldots,n.}$$

$$\boxed{\tilde{\Delta}=0}$$

$$\tilde{\Delta}=a_{k1}\tilde{A}_{k1}+a_{k2}\tilde{A}_{k2}+\ldots+a_{kn}\tilde{A}_{kn}\qquad =a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}$$

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=0$$

Свойства алгебраических дополнений

Следствие 11. Сумма произведений элементов некоторого столбца определителя на соответствующие алгебраические дополнения к элементам другого столбца определителя равна нулю, т.е.

$$a_{1j} \cdot A_{1k} + a_{2j} \cdot A_{2k} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nk} = 0, \quad j \neq k,\ j = 1,2,\ldots,n,\ k = 1,2,\ldots,n.$$

Доказательство. Проведите самостоятельно.

Определение 6. Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется *невырожденной*. В противном случае, т.е. если определитель матрицы равен нулю, она называется *вырожденной*.

Определитель произведения матриц

Теорема 12. Для любых квадратных матриц A и B одинакового порядка определитель произведения матриц равен произведению их определителей:

$$det(A \cdot B) = det\, A \cdot det\, B$$

Доказательство.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + b_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11}\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \right) + b_{21}\left(\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}b_{12} \\ a_{22} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12}b_{22} \\ a_{22} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \right) =$$

$$= b_{11}\left(0 + b_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) + b_{21}\left(b_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + 0 \right) =$$

$$= b_{11} \cdot b_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21} \cdot b_{12} \cdot \left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot (b_{11} \cdot b_{22} - b_{21} \cdot b_{22}) =$$

$$= det\, A \cdot det\, B.$$