Курс высшей математики

Часть 4

http://umc.ustu.ru

УГТУ-УПИ
2005г.

Лекция 6

Сложные события.

1. Независимые события .
2. Формула полной вероятности.
3. Формула Байеса .
4. Повторение независимых испытаний. Формула Бернулли.

1. <u>Независимые события .</u>

События А и В называются ***независимыми***, если вероятность наступления одного из них не зависит от наступления другого, то есть

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B)$$

По формуле умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Следовательно, для независимых событий получаем

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$$

- вероятность совмещения двух ***независимых*** событий равна произведению вероятностей этих событий.

Вероятность совмещения нескольких ***независимых*** событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

В практических задачах для определения зависимых и независимых событий применяют **гипотезу о физической независимости событий:**

- ***независимыми считаются события, не связанные причинно***.

Пример.

Три стрелка: $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}9$

-вероятность поражения цели при одном выстреле каждым стрелком.

Все стреляют по одному разу.

$\boldsymbol{A} = \{$***Хотя бы одно попадание***$\}$.

$\boldsymbol{P(A) = ?}$

Решение.

$\overline{\boldsymbol{A}} = \{$***нет ни одного*** попадания$\}$.

$\overline{\boldsymbol{A}}_i = \{$***i-ый*** стрелок не попал$\}$.

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\boldsymbol{A}}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_3}$$

$\left\{\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3\right\}$ - события независимые.

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) =$$

$$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - p_1 = 0{,}3;$$

$$P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - p_2 = 0{,}2;$$

$$P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - p_3 = 0{,}1;$$

$$= 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}006;$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}994;$$

2. **Формула полной вероятности.**

Пусть Ω - множество всех элементарных исходов, $H_1, H_2, \dots, H_n$ – наблюдаемые события.

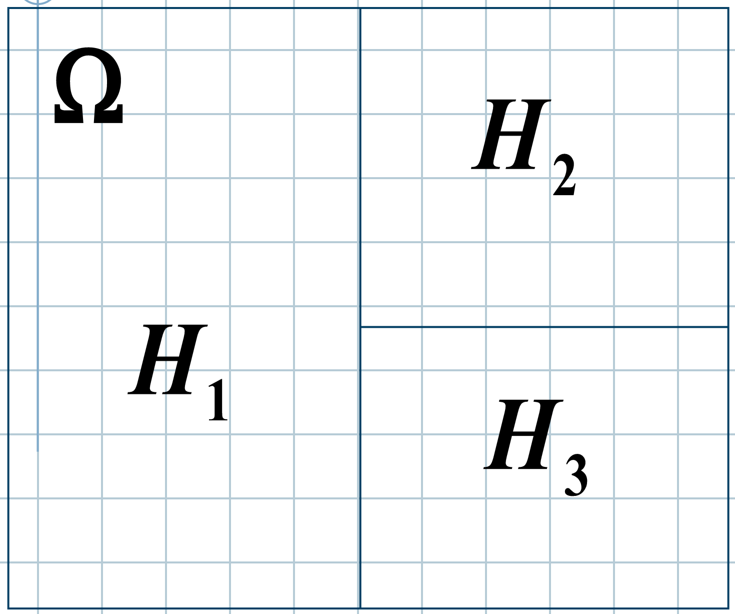
Эти события $\mathbf{H_i}$ образуют ***полную группу событий*** (разбиение множества Ω) данного опыта, если

1. $H_i \cdot H_j = 0$, $i \neq j$ (*попарно не совместны*)

2. $H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n = \Omega$

События $\mathbf{H_i}$ полной группы, называются ***гипотезами.***

Пример.



$\{H_1, H_2, H_3\}$ – *полная группа событий,*

H_1, H_2, H_3 – *гипотезы.*

Т Если $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ полная группа событий,

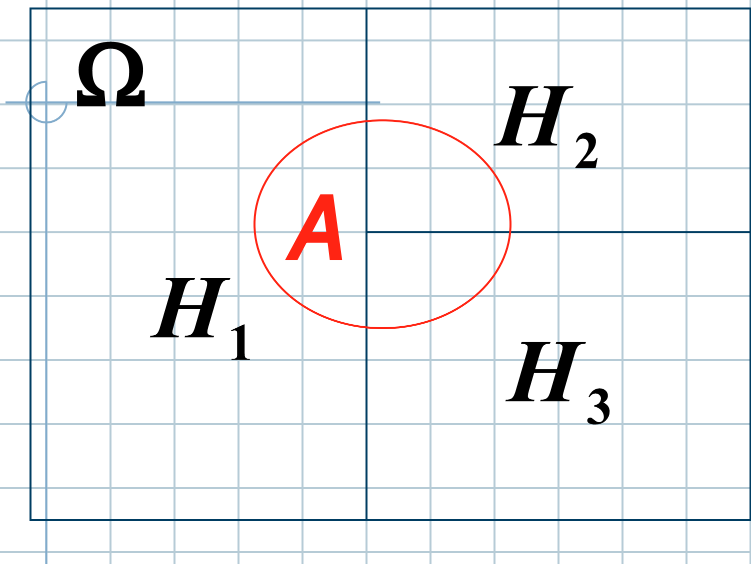
причём $P(H_i) \neq 0$,

то для любого наблюдаемого события **А** справедлива

формула (***формула полной вероятности***) :

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)}$$

Доказательство.



$$A = A \cdot \Omega\ ;$$

$$A = A \cdot \sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} A \cdot H_i\ ;$$

$$H_i \cdot H_j = \varnothing \ \Rightarrow \ AH_i \cdot AH_j = \varnothing$$

$\sum_{i=1}^{n} A \cdot H_i$ – сумма ***несовместных событий !***

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A\cdot H_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A\cdot H_i)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i);$$

Пример.

В ящике **M** шаров, из них **m** – белых, остальные – чёрные.

Извлекается ***один*** шар и откладывается.

Затем извлекается ***второй*** шар.

A = { ***второй*** шар - белый}. $\quad \boldsymbol{P(A)-?}$

Решение.

$$\Omega = H_1 + H_2;$$

$H_1 = \{$ *1^й^* шар - белый$\}$.

$H_2 = \{$ *1^й^* шар - чёрный$\}$.

$$P(H_1) = \frac{m}{M};$$

$$P(H_2) = \frac{M-m}{M};$$

$$P(A/H_1) = \frac{m-1}{M-1};$$

$$P(A/H_2) = \frac{m}{M-1};$$

$$\boxed{P(H_1) + P(H_2) = 1}$$

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=$$

$$=\frac{m}{M}\cdot\frac{m-1}{M-1}+\frac{M-m}{M}\cdot\frac{m}{M-1}=\frac{m}{M};$$

3. **Формула Байеса .**

Пусть проводится некоторый опыт, об условиях проведения которого можно высказать **n** возможных и несовместных гипотез, имеющих вероятности

$$P(H_1),\ P(H_2),\ \ldots,\ P(H_n)$$

Пусть в результате опыта также может произойти событие **A**, причём вероятность того, что оно произойдёт при реализации гипотезы H_i равна

$$P(A/H_i).$$

Как изменятся вероятности гипотез, если стало известно, что событие **A** произошло ?

Иначе говоря, спрашивается, чему равны вероятности

$$\mathbf{P(H_i / A)} \; .$$

Т

Формула Байеса.

Если до опыта вероятности гипотез были

$P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$

и в результате опыта произошло событие **А**, то, с учётом этого события, "новые", то есть условные вероятности гипотез, вычисляются по формуле **Байеса**:

$$\boxed{P(H_k/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{P(A)}}$$

В этой формуле в знаменателе стоит полная вероятность события $\boldsymbol{A}$:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)$$

Доказательство.

$$P(AH_k)=P(H_k)P(A/H_k)=P(A)P(H_k/A)$$

$$\boxed{P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}}$$

Пример.

Имеются 1000 изделий, из которых 200 изготовлены на 1-м заводе, 460 на втором и 340 на третьем.

Вероятность изготовления нестандартного изделия на первом заводе 0,03 ,на втором – 0,02 ,на третьем – 0,01

Случайно взятое изделие оказалось нестандартным.

Какова вероятность того, что оно сделано на 1 заводе.

Решение.

A= {взятое изделие оказалось нестандартным}.

H_1 = {оно сделано на 1-м заводе}. $P(H_1) = \frac{200}{1000} = 0{,}2;$

H_2 = {оно слелано на 2-м заводе}. $P(H_2) = \frac{460}{1000} = 0{,}46;$

$H_3 = \{оно\ сделано\ на\ 3-м\ заводе\}$ $P(H_3) = \frac{340}{1000} = 0{,}34;$

$$\boldsymbol{P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)}}$$

$$P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + P(H_3)P(A / H_3);$$

$$P(A / H_1) = 0{,}03 \qquad P(A / H_2) = 0{,}02 \qquad P(A / H_3) = 0{,}01$$

$$P(H_1 / A) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}03}{0{,}2 \cdot 0{,}03 + 0{,}46 \cdot 0{,}02 + 0{,}34 \cdot 0{,}01} \approx 0{,}322$$

$(\textit{было}\ P(H_1) = 0{,}2)$

4. **Повторение независимых испытаний. Формула Бернулли.**

Пусть вероятность наступления события **A** при одном испытании равна **$P(A) = p$.**

(Соответственно, вероятность не наступления события **A** будет **$q = 1-p$**).

Опыт повторяется **n-** раз.

Какова вероятность того, что событие **A** произойдёт **m-** раз при **n-** испытаниях?

(Эту вероятность обозначают как **$P_n(m)$**).

Теорема.

Вероятность того, что при **n**- независимых испытаниях событие **A** произойдёт **m**- раз определяется формулой (формула Бернулли):

$$\boxed{P(B) \equiv P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}}$$

Доказательство.

Наступления ***(A)*** и не наступления $(\overline{A})$ события ***A*** в серии из n- испытаний могут чередоваться различным образом.

Например, $A\ \overline{A}\ \overline{A}\ A$ - в четырёх испытаниях событие **A** наступило в первом и четвёртом испытании.

Всякую комбинацию из n- испытаний, в которую событие $\boldsymbol{A}$ входит m- раз,а событие $\overline{A}$ входит, следовательно, (n-m) раз, назовём благоприятной.

Найдём вероятности таких благоприятных комбинаций :

Например, $B_1 = \underbrace{\underbrace{AAA\ldots A}_{m}\underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\ldots\overline{A}\,\overline{A}}_{n-m}}_{n}$ - событие А произошло в первых m- испытаниях.

Эта комбинация соответствует событию

В={***Событие А произошло в m испытаниях***}.

Возможна другая комбинация для события **В**:

$B_2 = \underbrace{\underbrace{AAA\ldots A}_{m-1}\underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-m}A}_{n}$ - событие А произошло в первых (m-1) испытаниях и в последнем.

Общее количество *исходов* **N**,образующих множество **B**, равно числу способов выбрать **m** чисел из **n**, т.е. равно числу ***сочетаний*** из **n** по **m :**

$$N = C_n^m$$

Таким образом,

$$B = B_1 + B_2 + \ldots + B_N\,, \qquad N = C_n^m$$

Вычислим вероятность события **B**.

$$P(B) = P(B_1 + B_2 + \ldots + B_N) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_N)$$

$$C_n^m$$

Вычислим вероятность одной комбинации (например B_1):

$$P(B_1) = P(\underbrace{\underbrace{AAA\ldots A}_{m}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}\bar{A}}_{n-m}}_{n}) = \boldsymbol{P(A)^m\,P(\bar{A})^{n-m}} =$$

$$\boldsymbol{= p^m \cdot q^{n-m}};$$

Таким образом, $P(B) = C_n^m p^m q^{n-m}$;

Окончательно,

$$\boxed{\boldsymbol{P(B) \equiv P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}}}$$

-***Формула Бернулли*** для вычисления вероятности события:

в последовательности из $\boldsymbol{n}$ испытаний $\boldsymbol{m}$ раз произошло событие $\boldsymbol{A}$.

Обозначим μ_n - число появления события A в n независимых испытаниях.

$$P_n(m_1 \le \mu_n \le m_2) = ?$$

$A_n(m)$ – Событие A произошло m раз в n испытаниях

$$\{m_1 \le \mu_n \le m_2\} = A_n(m_1) + A_n(m_1+1) + \ldots + A_n(m_2)$$

$$\boxed{P_n(m_1 \le \mu_n \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}}$$

- вероятность того, что в n испытаниях событие A произошло от m_1 до m_2 раз.

Пример.

Что вероятнее: выиграть у равного по силам партнера игру из 4^х или из 8 партий?

Решение.

Обозначим

$\boldsymbol{\mu_4}$ – количество выигрышей в игре из 4^х партий

$\boldsymbol{\mu_8}$ – количество выигрышей в игре из 8 партий

$$\boldsymbol{P(3 \le \mu_4 \le 4) =} C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16} = 0{,}3125$$

$$P(5 \le \mu_8 \le 8) = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{93}{256} = 0{,}3633$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(5 \le \mu_8 \le 8) > P(3 \le \mu_4 \le 4)}}$$

Определение.

Величина $\boldsymbol{m_0}$ называется ***наивероятнейшим числом*** появления события $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{n}$ независимых испытаниях, если вероятность $\mathbf{P_n(m)}$ достигает наибольшего значения при $\boldsymbol{m = m_0}$.

$$P_n(m_0 - 1) \le P_n(m_0) \ge P_n(m_0 + 1)$$

$$\boxed{p(n+1) - 1 \le m_0 \le p(n+1)}$$

Длина отрезка $[p(n+1)-1, p(n+1)]$ *равна* 1

Вывод:

Наивероятнейших чисел не может быть больше двух.

Два будет в случае попадания концов отрезка на целые числа. В этом случае имеем два наивероятнейших числа:

$$\mathbf{m_0 = p(n+1) - 1} \quad \text{и} \quad \mathbf{m_0 = p(n+1)}\ .$$

Пример.

Игра из 4^х^ партий. $m_0 - ?$

Решение.

$$\frac{1}{2}\cdot(4+1)-1 \le m_0 \le \frac{1}{2}\cdot(4+1);$$

$$\boxed{m_0 = 2}$$

$$1{,}5 \le m_0 \le 2{,}5$$

Пример.

Игра из 3[х] партий.

Решение.

$$\frac{1}{2}\cdot(3+1)-1\le m_0\le\frac{1}{2}\cdot(3+1);\qquad 1\le m_0\le 2$$

$$\boxed{m_0=1\ \textit{или}\ 2\ \textit{с равной вероятностью.}}$$