

Вычисление натурального логарифма

Начнем с известного представления рядом Тейлора функции натурального логарифма в окрестности 1.

$$\text{Ln}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

Недостатки этого представления: 1) диапазон чисел узкий; 2) для значений x , близких по модулю к 1, сходимость ряда становится медленной.

Получим другое представление для натурального логарифма.

$$\text{Ln}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

Найдем разность этих представлений

$$\text{Ln} \frac{1-x}{1+x} = -2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

Обозначим $\frac{1-x}{1+x} = z$, откуда $x = (1-z) / (1+z)$.

В результате получим

$$\ln(z) = -2 \left(\frac{1-z}{1+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^5 + \dots \right), \quad \text{при } 0 < z < \infty$$

Диапазон чисел расширили.

Пусть x – положительное число, логарифм которого надо вычислить.

Представим его в виде произведения $x = 2^m \cdot q$, где $0.5 \leq q < 1$, и далее

обозначим $\frac{1-q}{1+q} = \xi$ где $0 < \xi \leq \frac{1-1/2}{1+1/2} = \frac{1}{3}$

Теперь логарифм числа x можно представить в виде

$$\ln(x) = \ln(2^m q) = m \ln(2) + \ln(q) = m \ln(2) - 2 \left(\xi + \frac{\xi^3}{3} + \dots + \frac{\xi^{2n-1}}{2n-1} \right) - R_n$$

Остаточный член, по определению, имеет вид (замена знаменателей во всех слагаемых на $2n+1$)

$$R_n = 2 \left(\frac{\xi^{2n+1}}{2n+1} + \frac{\xi^{2n+3}}{2n+3} + \dots \right) < 2 \frac{\xi^{2n+1}}{2n+1} (1 + \xi^2 + \xi^4 + \dots)$$

В правой части неравенства, в круглых скобках - бесконечная геометрическая прогрессия, со знаменателем меньше 1. Сумма такой прогрессии легко находится, и равна

$$\frac{1}{1 - \xi^2}$$

Получаем неравенство для остаточного члена

$$R_n < \frac{2}{1 - \xi^2} \frac{\xi^{2n+1}}{2n+1}$$

Если учесть, что $0 < \xi \leq \frac{1}{3}$
тогда можно записать

$$\frac{2}{1 - \xi^2} < \frac{9}{4}$$

Следовательно получаем неравенство:

$$0 < R_n < \frac{9}{4} \frac{\xi^{2n+1}}{2n+1}$$

Или более грубо:

$$0 < R_n < \frac{1}{4(2n+1)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$$

Сам вычислительный процесс можно организовать следующим образом.

Обозначим $U_k = \frac{\xi^{2k-1}}{2k-1}$, $k=1, 2, \dots$

тогда можно получить $Ln(x) = mLn(2) - 2(U_1 + U_2 + \dots + U_n) - R_n$

Считая, что $Ln(2) = 0.69314708$ вычисление логарифма любого положительного числа не представляет труда.

Окончание процесса суммирования производим тогда, когда $U_n < 4\varepsilon_R$
где ε_R **остаточная погрешность.**

В самом деле, в этом случае имеем

$$R_n < \frac{9}{4} \xi^2 \frac{\xi^{2n-1}}{2n-1} \leq \frac{1}{4} U_n < \varepsilon_R$$

Вычисление значений тригонометрических функций

Функция SIN(x)

Используя формулы приведения, значение аргумента x можно привести к интервалу $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

Для значений аргумента $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

Для значений аргумента $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$ можно получить

$$\sin(x) = \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (2)$$

$$z = \frac{\pi}{2} - x, \quad 0 < z \leq \frac{\pi}{4}$$

Сумму ряда удобно вычислять путем

$$\sin(x) = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + R_n$$

где слагаемые U_k можно последовательно находить по рекуррентным формулам

$$U_1 = x$$

$$U_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)} U_k, \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

Ряд (1) знакочередующийся, с монотонно убывающими по модулю членами. Тогда остаточный член можно записать

$$|R_n| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = |U_{n+1}|$$

$$\text{sign}(R_n) = \text{sign}(U_{n+1})$$

Поэтому процесс суммирования можно прекратить, как только обнаружится, что погрешность. $|U_n| \leq \varepsilon_R$, заданная остаточная ε_R

Вычисление значений тригонометрических функций

Функция COS(x)

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Сумму ряда удобно вычислять путем

$$\cos(x) = v_1 + v_2 + \dots + v_n + R_n$$

где слагаемые v_n можно последовательно находить по рекуррентным формулам

$$v_1 = 1, \quad v_{k+1} = -\frac{x^2}{(2k-1)2k} v_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Ряд знакочередующийся, с монотонно убывающими по модулю членами.

Тогда остаточный член можно записать

$$|R_n| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} = |v_{n+1}|, \quad \operatorname{sgn}(R_n) = \operatorname{sgn}(v_{n+1})$$

Поэтому процесс суммирования можно прекратить, как только

обнаружится, что погрешность $|v_n| \leq \varepsilon_R$, где ε_R заданная остаточная

Итеративные методы вычисления значений функций

Задана функция $y = f(x)$ надо вычислить значение функции в точке $x = \xi$, то есть $y_\xi = f(\xi)$.

Запишем функцию в неявном виде $F(x, y) = 0$.

Предположим, что $F(x, y)$ - непрерывна и имеет непрерывную частную производную $F'_y(x, y)$.

Тогда $F(\xi, y_\xi) = 0$

Итеративные методы вычисления значений функций

$$F(x, y) = 0$$

По теореме Лагранжа о непрерывных функциях:

$$F(x, y_0) - F(x, y) = F(x, y_0) - 0 = (y_0 - y) \cdot F'_y(x, \bar{y})$$

где \bar{y} промежуточное значение между y_0 и y .

Тогда

$$y = y_0 - \frac{F(x, y_0)}{F'_y(x, \bar{y})}$$

Полагая $\bar{y} \approx y_0$, получим:

$$y_1 = y_0 - \frac{F(x, y_0)}{F'_y(x, y_0)}$$

Повторяя этот алгоритм, получим итеративный процесс:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'_y(x, y_n)}$$

Итеративные методы вычисления значений функций. Геометрическая интерпретация

Условия сходимости:

$$F'_y(x, y) \quad F''_y(x, y)$$

Сохраняют постоянные знаки

Остановка

итеративного процесса:

$$|y_{n-1} - y_n| < \varepsilon$$

