Оценка точности при коррелатном способе уравнивания

Основа – поиск ковариационной матрицы

1. Непосредственно (почти всегда невозможно)
2. Через матрицу обратных весов, или посвязи

2 способ:

- Выразить оцениваемые величины линейно через элементы с известной обратной матрицей весов
- Использовать фундаментальную теорему переноса погрешностей для получения обратной матрицы весов
- Вычислить погрешность ед. веса и ковариационную матрицу

По связи это сразу можно для ковариационной матриц

Оценка точности при коррелатном способе уравнивания

Формулы коррелатного способа:

$y = Y + \Delta$

$v = P^{-1}B^{T}k = -P^{-1}B^{T}\,Qw$

$y_{yp} = y + v = y - P^{-1}B^{T}\,Qw$

Известно что $v = -\Delta$ и тогда

$$B(-\Delta) + w = 0$$

$$B\Delta = w$$

Все к линейному виду через истинные погрешности Δ с учетом того, что $Q_{\Delta} = P^{-1}$

Оценка точности при коррелатном способе уравнивания

Выражаем учитывая $B\Delta = w$:

$$y = Y + \Delta = Y + E\Delta = Y + T_1\Delta$$

$$v = P^{-1}B^{\mathrm{T}}k = -P^{-1}B^{\mathrm{T}}R^{-1}w = (-P^{-1}B^{\mathrm{T}}R^{-1}B)\Delta = T_2\Delta$$

$$y_{yp} = y + v = y - P^{-1}B^{\mathrm{T}}R^{-1}w = Y + \Delta + (-P^{-1}B^{\mathrm{T}}R^{-1}B)\Delta$$

$$= Y + (E - P^{-1}B^{\mathrm{T}}R^{-1}B)\Delta = T_3\Delta$$

Фундаментальная теорема переноса ошибок через обратную матрицу весов

$$Q = TQ_{\Delta}T^{\mathrm{T}} = T\,P^{-1}T^{\mathrm{T}}$$ (из 1, 2 и 3 уравнения)

T – вектор частных производных от линейных по погрешностям уравнений (коэффициенты):

Оценка точности при коррелатном способе уравнивания

Матрица T будет

$$T = \begin{pmatrix} E \\ -P^{-1}B^{T}R^{-1}B \\ E - P^{-1}B^{T}R^{-1}B \\ \\ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y \\ v \\ y_{yp} \\ \\ \end{cases}$$

Перемножение

$$Q = T\,P^{-1}T^{\mathrm{T}}$$

дает все обратные матрицы для вектор-функции (y, v, y_{yp}).

Оценка точности при коррелатном способе уравнивания

Например для блока 2 для поправок *v*:

$$v = P^{-1}B^{\mathrm{T}}k = -P^{-1}B^{\mathrm{T}}\,R^{-1}w \;= (-P^{-1}B^{\mathrm{T}}R^{-1}B)\Delta \;= T_2\Delta$$

$$Q \;= T\,P^{-1}T^{\mathrm{T}} \Rightarrow Q_v \;= T_2\,P^{-1}T_2^{\;\mathrm{T}} =$$

$$= (-P^{-1}B^{\mathrm{T}}R^{-1}B)\;P^{-1}\;(-P^{-1}B^{\mathrm{T}}R^{-1}B)^{\mathrm{T}} =$$

$$= P^{-1}B^{\mathrm{T}}\,(R^{-1}B\;P^{-1}\;B^{\mathrm{T}}\,)\;R^{-1}\;B\;P^{-1} \;=$$

$$= P^{-1}B^{\mathrm{T}}\,R^{-1}B\;P^{-1} = Q_v$$

Оценка точности при коррелатном способ уравнивания

Сводка результатов:

$$Q$$

$$y \qquad P^{-1}$$

$$v \qquad P^{-1}B^{T}R^{-1}B\,P^{-1}$$

$$y_{ур} \qquad P^{-1} - P^{-1}B^{T}R^{-1}B\,P^{-1}$$

Погрешность после уравнивания равна погрешности до уравнивания минус за процедуру уравнивания – повышение точности.

Оценка точности при коррелатном способ уравнивания

Получение масштабного фактора апостериори (погрешности единицы веса):

$$\sigma^2 = \frac{v^T P v}{n-k} = \frac{\hat{O}}{r}$$

1. Непосредственно $\Phi = v^{\mathrm{T}} P v$

2. $\Phi = \kappa^{\mathrm{T}} R \kappa =$

$= w^{\mathrm{T}} Q w =$

$= - \kappa^{\mathrm{T}} w =$

$= \kappa^{\mathrm{T}} B v \ldots$

оценки на основе

$$K_{ii} = \sigma_0^2 \cdot Q_{ii} = \sigma_{ii}^2$$

используют $\hat{\sigma}_0$ или σ_0

Оценка точности при коррелатном способ уравнивания

Оценка точности на основе обратной матрицы весов для **любой** функции *F*:

Нелинейную функцию *F* в ряд Тейлора (до л.ч.)

$$F = F(y) + f \cdot v =$$

$$= F(Y + \Delta) - f \cdot P^{-1} B^{\mathrm{T}} R^{-1} w$$

$$f = \frac{\partial F}{\partial Y}$$

Выражаем линейно через ***Δ***

$$F = F(Y + \Delta) - f \cdot P^{-1} B^{\mathrm{T}} R^{-1} B \Delta =$$

$$= (f - f \cdot P^{-1} B^{\mathrm{T}} R^{-1} B) \Delta = T_4$$

$$w = B\Delta$$

Оценка точности при коррелатном способ уравнивания

Используем фундаментальную теорему для *F*

$$Q_F = T_4 P^{-1} T_4^{\mathrm{T}} =$$

$$= (f - f \cdot P^{-1} B^{\mathrm{T}} R^{-1} B)\, P^{-1} (f - f \cdot P^{-1} B^{\mathrm{T}} R^{-1} B)^{\mathrm{T}} =$$

$$= (f \cdot P^{-1} f^{\mathrm{T}}) - (f \cdot P^{-1} B^{\mathrm{T}}) R^{-1} (B P^{-1} f^{\mathrm{T}}) = R_{ff} - R_f^{\mathrm{T}} R^{-1} R_f =$$

(*до уравнивания*) (*корректировка*)

$$= f \cdot (P^{-1} - P^{-1} B^{\mathrm{T}} R^{-1} B P^{-1}) \cdot f^{\mathrm{T}} = f \cdot Q_{yyp} \cdot f^{T}$$

часто проще $Q_{yyp} = P^{-1} - P^{-1} M P^{-1}$

Примеры: для измерений $F = E$,

для элементов положения *F* по сети

Оценка точности при коррелатном способ уравнивания

Получение масштабного фактора апостериори (погрешности единицы веса):

1. Непосредственно $\Phi = v^{\mathrm{T}} P v$

2. $\Phi = \kappa^{\mathrm{T}} R \kappa =$

$= w^{\mathrm{T}} Q w =$

$= - \kappa^{\mathrm{T}} w =$

$= \kappa^{\mathrm{T}} B v \ \ldots$

оценки на основе

используют $\hat{\sigma}_0$ или σ_0

Оценка точности при коррелатном способ уравнивания

Получение масштабного фактора апостериори (погрешности единицы веса):

$$R' = B' \cdot P^{-1} B'^{T} = \begin{pmatrix} R & R_f \\ R_f^T & R_{ff} \end{pmatrix}$$

1. Непосредственно $\Phi = v^{\mathrm{T}} P v$

2. $\Phi = \kappa^{\mathrm{T}} R \kappa =$

$= w^{\mathrm{T}} Q w =$

$= -\kappa^{\mathrm{T}} w =$

$= \kappa^{\mathrm{T}} B v$ ...

оценки на основе

используют $\hat{\sigma}_0$ или σ_0

Оценка точности при коррелатном способ уравнивания

Некоторые связи способов:

Основные формулы

коррелатный	параметрический
$Bv + w = 0$	
$v = P^{-1}B^{T} k = -P^{-1}B^{T} R^{-1}w$	$v = A\delta t + l$
$B P^{-1}B^{T}k + w = 0$	$A^{T}PA \cdot \delta t + A^{T}P\, l = 0$

$$Bl = -w$$

$$BA = 0$$

Оценка точности при коррелатном способ уравнивания

Самое распространенное приложение коррелатного способа - ***формулы для допустимых невязок***:

$$Bv + w = 0 \rightarrow B\Delta = w \rightarrow Q_{\Delta} = P^{-1}$$

Из фундаментальной теоремы переноса ошибок:

$$Q_w = F\,P^{-1}F^{\mathrm{T}} \rightarrow F = B$$

$$Q_w = B\,P^{-1}B^{\mathrm{T}} = R$$

имеем допуск

$$w_{i(\text{äî ï})} = t\sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{w_i}}$$

Оценка точности при коррелатном способ уравнивания

Пример:

Допуск для невязки в одиночном нивелирном ходе из 5 сторон.

$B = (1\ 1\ 1\ 1\ 1)$, $P^{-1} = \mathrm{diag}(L_i)$, $Q_w = R = [L]$

из

$$w_{i(\ddot{a}\hat{\imath}\ \ddot{\imath})} = t\sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{w_i}}$$

имеем допуск

$$w_{i(\ddot{a}\hat{\imath}\ \ddot{\imath})} = t\sigma_0 \cdot \sqrt{[L]}$$

Оценка точности при коррелатном способ уравнивания

Контрольные вопросы по модулю:

1. Общие положения задачи уравнивания.
2. Общие положения коррелатного способа уравнивания.
3. Уравнивание коррелатным способом (до получения условных уравнений поправок).
4. Уравнивание коррелатным способом (получение коррелат, окончательное уравнивание и контроли).
5. Оценка точности в коррелатном способе уравнивания.
6. Оценка точности функций и определение погрешности единицы веса.