Электростатическое поле

Лекции 1,2

Электростатическое поле

- Электромагнитное поле – особый вид материи, является носителем энергии и обладает характерными электрическими и магнитными свойствами
- Электростатическое поле – частный вид электромагнитного поля, создается совокупностью неподвижных электрических зарядов, величина которых не меняется во времени.

Электрический заряд

- Из курса физики известно, что вещество состоит из элементарных заряженных частиц, окруженных электромагнитным полем.
- В теории э-м поля рассматривают процессы в макроскопическом смысле, т.е. рассматривают общий электрический заряд тела. Электрические заряды можно считать бесконечно делимыми и пользоваться понятиями:
- объемной плотности заряда:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \text{или} \quad q = \int_V \rho \cdot dV$$

Электрический заряд

- Из курса физики известно, что вещество состоит из элементарных заряженных частиц, окруженных электромагнитным полем.
- В теории э-м поля рассматривают процессы в макроскопическом смысле, т.е. рассматривают общий электрический заряд тела. Электрические заряды можно считать бесконечно делимыми и пользоваться понятиями:
- поверхностной плотности заряда:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad \text{или} \quad q = \int_S \sigma \cdot dS$$

Электрический заряд

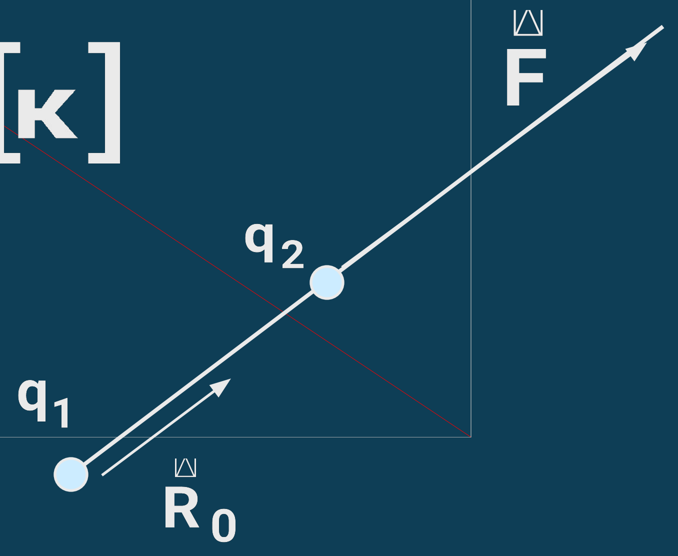
- Из курса физики известно, что вещество состоит из элементарных заряженных частиц, окруженных электромагнитным полем.
- В теории э-м поля рассматривают процессы в макроскопическом смысле, т.е. рассматривают общий электрический заряд тела. Электрические заряды можно считать бесконечно делимыми и пользоваться понятиями:
- линейной плотности заряда:

$$\tau = \frac{dQ}{dl} \quad \text{или} \quad q = \int_l \rho \cdot dl$$

Электрический заряд

- В основу определения электрического поля положено его механическое проявление – <u>закон Кулона</u>

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\vec{R}_0\,[\text{к}]$$



Где $\vec{R}_0$ – единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды.

$$\varepsilon_0 = 8{,}86\cdot 10^{-12}\ [\text{ф}/\text{м}]$$

Напряженность электростатического поля

- Напряженность поля – сила $\vec{F}$, действующая на единичный положительный пробный заряд (**q**), внесенный в электростатическое поле заряда **Q**:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad [В/м]$$

- Напряженность поля точечного заряда **Q**:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\vec{R}_0 \, [В/м]$$

Принцип суперпозиции электрических полей

- Если поле создано несколькими электрическими зарядами, то напряженность результирующего поля в каждой точке равна векторной сумме напряженностей от каждого из зарядов в отдельности

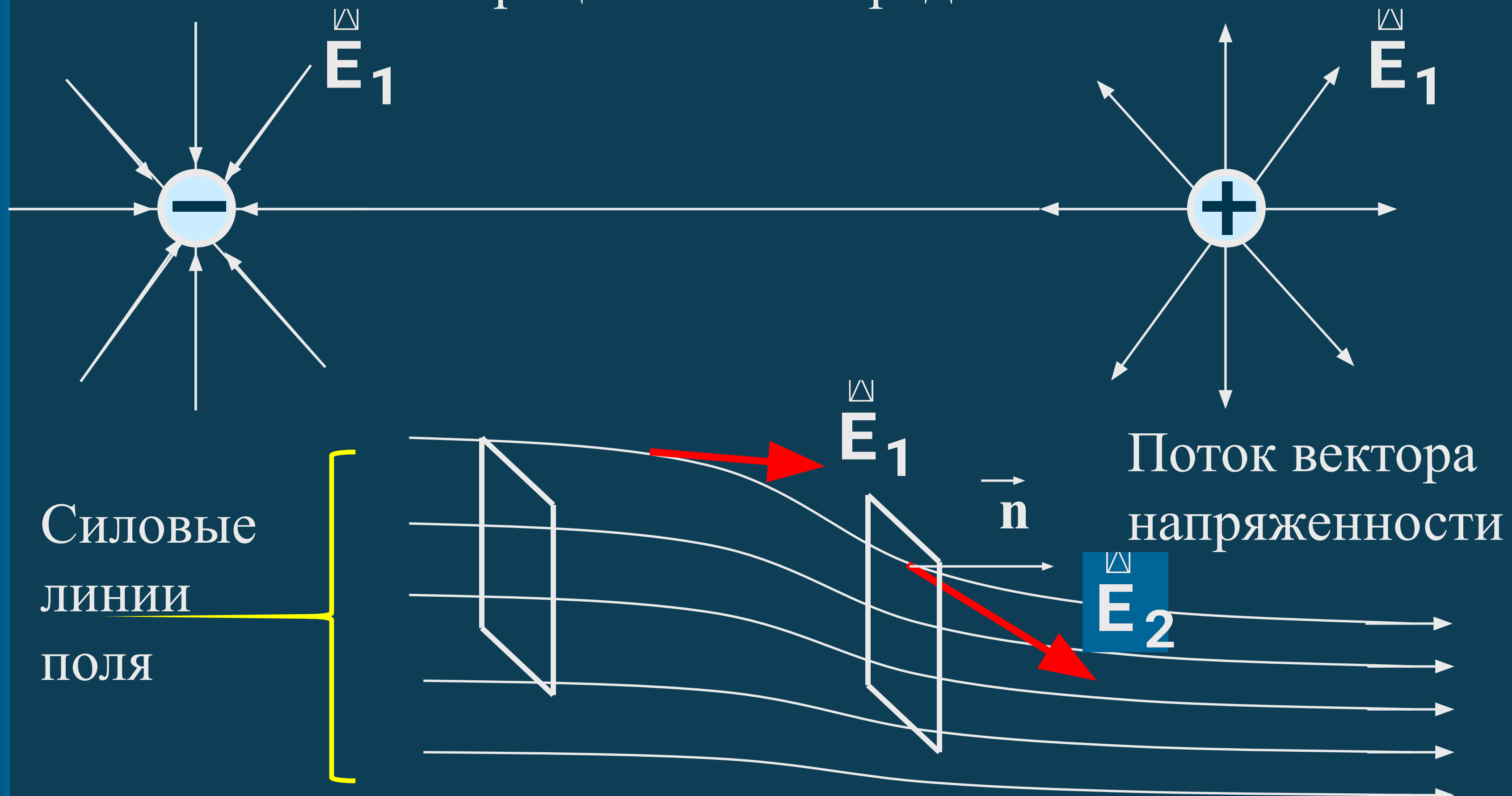
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

Графическое представление поля

- Электростатическое поле изображают с помощью линий напряженности поля или силовых линий поля. Эти линии проводят так, чтобы касательные к ним в каждой точке пространства совпадали с вектором напряженности в данной точке. Линии напряженности никогда не пересекаются.
- Величину напряженности поля характеризуют числом линий напряженности, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной линиям.

Графическое представление поля

Силовая линия начинается на положительном заряде и заканчивается на отрицательном заряде

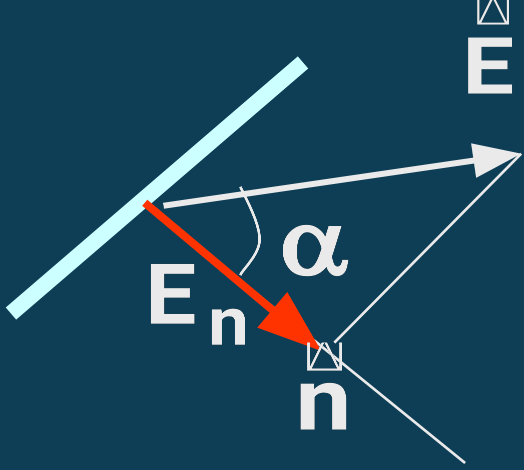


Поток вектора напряженности поля

- \- это число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку **dS**, нормаль **n** к которой образует угол α с вектором $\vec{E}$

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}_n$$

$d\vec{S}_n$ - Вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью к площадке.

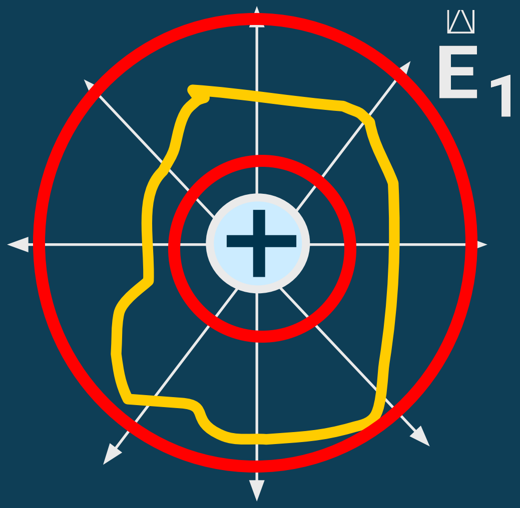


Для произвольной замкнутой поверхности:

$$\Phi_E = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S}_n$$

Поток вектора E – скалярная величина

Теорема Гаусса
(в вакууме)

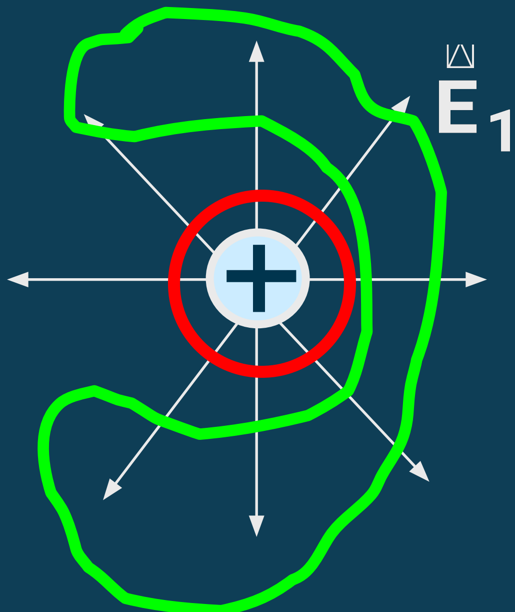


Поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса **r**, охватывающую точечный заряд **Q**, находящийся в ее центре:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Если окружить сферу замкнутой поверхностью произвольной формы, то каждая линия напряженности, пронизывающая сферу, пройдет и сквозь эту поверхность.

Теорема Гаусса
(в вакууме)



Поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса **r**, охватывающую точечный заряд **Q**, находящийся в ее центре:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Если замкнутая поверхность не охватывает заряд, то поток сквозь нее равен нулю, так как число линий напряженности, входящих в поверхность, равно числу линий напряженности, выходящих из нее.

Теорема Гаусса
(в вакууме)

- *Общая формулировка теоремы Гаусса:*
- Поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0 .

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \cdot dV$$

Вектор электрического смещения

- Вектор электрического смещения (электрической индукции) в вакууме: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$
- Вектор $\vec{D}$ совпадает по направлению с $\vec{E}$

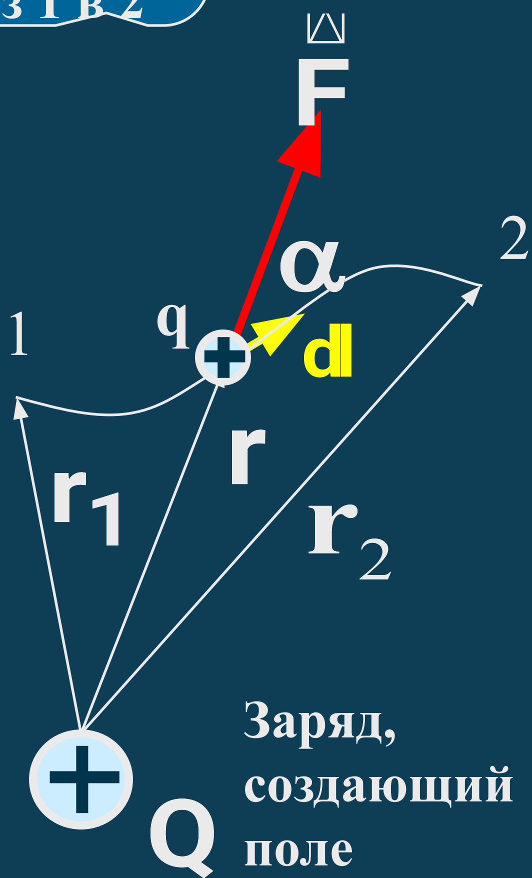
Теорема Остроградского-Гаусса:

Поток вектора электрического смещения в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \oint_S \varepsilon_0 E_n dS = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \int_V \rho \cdot dV$$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Точечный заряд перемещается из 1 в 2



Заряд, создающий поле

Работа по перемещению заряда в электростатическом поле зависит только от положения начальной и конечной точки и не зависит от траектории движения.

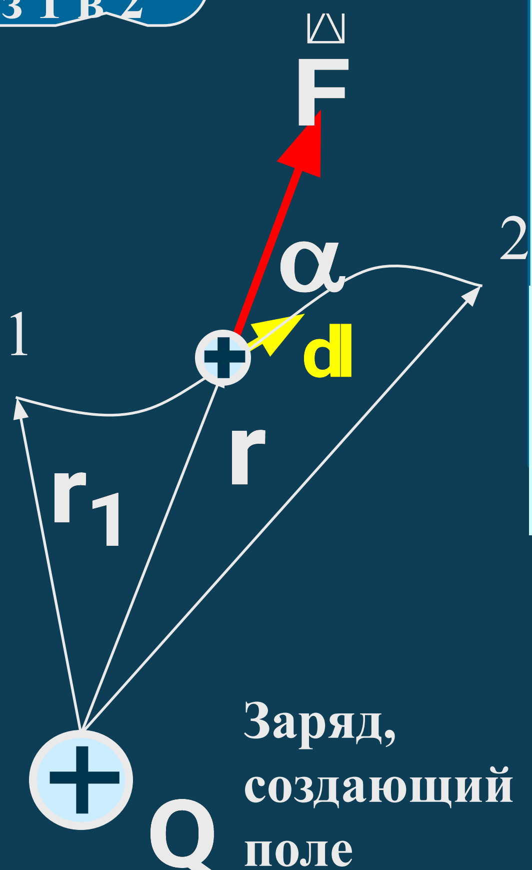
Электростатическое поле- ПОТЕЦИАЛЬНОЕ,

Электростатические силы - КОНСЕРВАТИВНЫ

$$A_{12}=\int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qQ}{r_1}-\frac{qQ}{r_2}\right)$$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Точечный заряд перемещается из 1 в 2



Заряд, создающий поле

РАБОТА СИЛ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ ВДОЛЬ ЗАМКНУТОГО КОНТУРА РАВНА НУЛЮ

$$\oint_L dA = q\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l}$$

Этот интеграл называется – ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qQ}{r_1} - \frac{qQ}{r_2}\right)$$

Безвихревой характер электростатического поля

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0$$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна 0

Используя теорему Стокса , можно записать

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{E}\,d\mathbf{S}$$

Так как циркуляция вектора напряженности электро-статического поля равна 0, то и ротор равен нулю:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$$

Электростатического поле - безвихревое

Потенциал электрического поля

- Тело, находящееся в потенциальном поле обладает потенциальной энергией, за счет которой силами поля совершается работа.
- Работу сил электростатического поля можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает точечный заряд в начальной и конечной точках.

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qQ}{r_1} - \frac{qQ}{r_2}\right) = U_1 - U_2$$

Потенциальная энергия заряда **q** в поле заряда **Q:**

$$U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

С-произвольная константа

Потенциал электрического поля

При $r \to \infty$ $C = 0$, потенциальная энергия поля:

$$U = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Отношение $\frac{U}{q}$ не зависит от величины пробного заряда q

и является энергетической характеристикой поля,

называемой потенциалом: $\boxed{\varphi = \frac{U}{q}}$

Потенциал φ в произвольной точке электростатического поля – физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку. Единица потенциала [В]= [Дж]/[К].

Потенциал электрического поля

- Потенциал поля, созданного несколькими зарядами равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов.

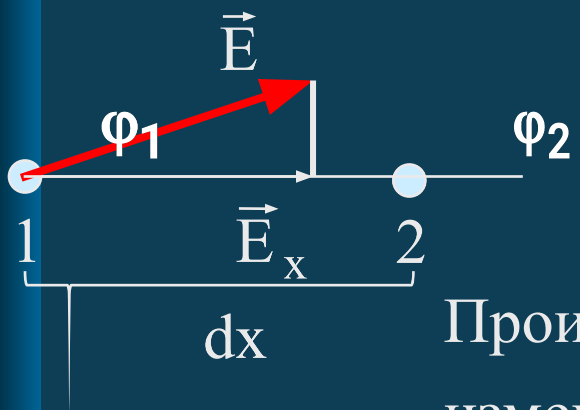
$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

<u>Потенциал</u> – скалярная энергетическая характеристика поля.

<u>Напряженность</u> – векторная силовая характеристика поля

Напряженность поля как градиент потенциала

- Работа по перемещению единичного заряда из точки 1 в точку 2 вдоль оси X



$$\varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi = E_x dx \quad \text{или} \quad E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$$

Производная $\frac{d\varphi}{dx}$ выражает быстроту изменения потенциала в направлении по оси **x.**

Повторив аналогичные рассуждения для осей **y** и **z,** получим:

$$\vec{E} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\vec{i} + \frac{d\varphi}{dy}\vec{j} + \frac{d\varphi}{dz}\vec{k}\right), \text{ где } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} - \text{единичные вектора}$$

Напряженность поля как градиент потенциала

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные вектора

Где оператор **<u>набла:</u>** $$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Градиентом скалярной величины φ в векторном анализе называют вектор, направление которого совпадает с направлением быстрейшего увеличения величины φ .

Знак минус означает, что вектор напряженности поля всегда направлен в сторону убывания потенциала.

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi}$$

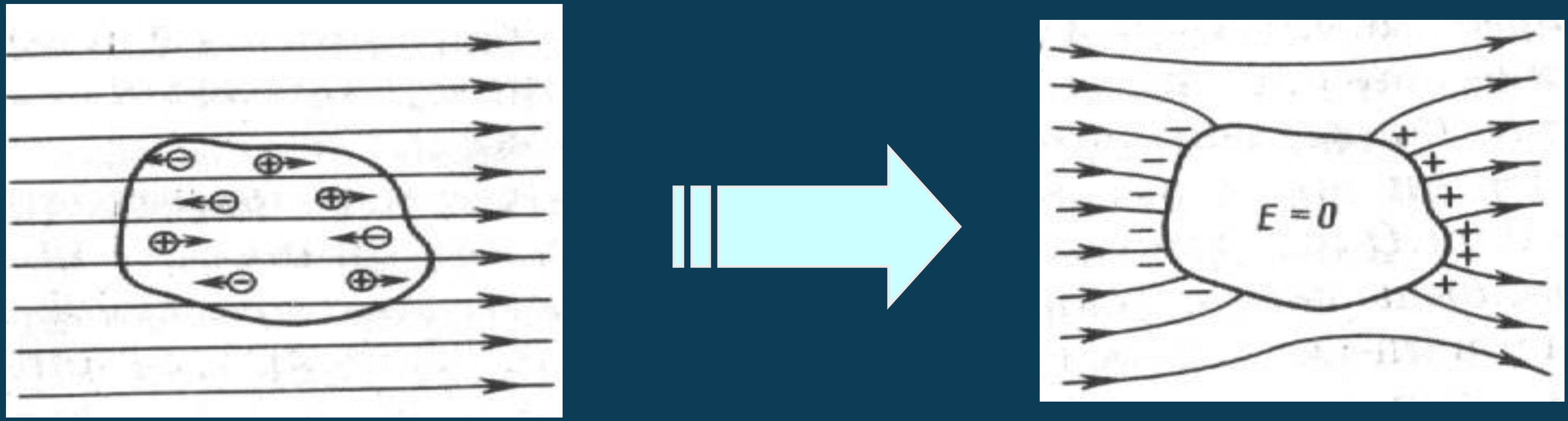
Силовые и эквипотенциальные линии поля

Для графического изображения распределения потенциала электростатического поля пользуются **эквипотенциальными поверхностями** – поверхностями, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение.

Так как все точки эквипотенциальных поверхностей имеют одинаковый потенциал, то работа по перемещению пробного единичного заряда вдоль этих поверхностей всегда равна нулю, следовательно сила, действующая на заряд направлена перпендикулярно траектории движения (эквипотенциальной поверхности).

Таким образом силовые линии напряженности поля всегда направлены нормально к эквипотенциальной поверхности

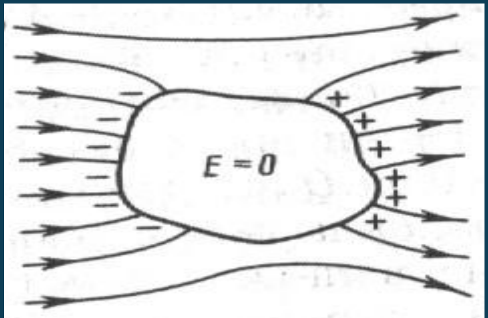
Проводники в электростатическом поле



- В проводнике имеются свободные заряды. Под действием внешнего поля они приходят в движение. Перемещение зарядов (ток) продолжается до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника становится равным нулю.
- Напряженность поля внутри проводника всегда равна нулю.
- Потенциал во всех точках внутри проводника постоянен, т.е. поверхность проводника является эквипотенциальной.

Проводники в электростатическом поле

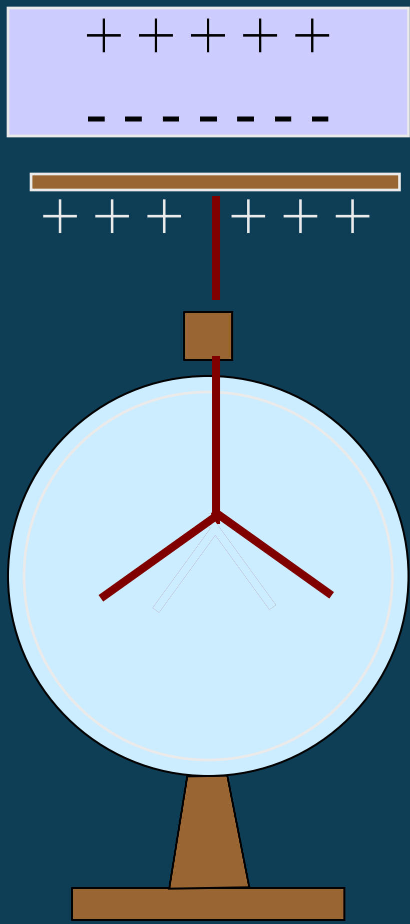
- Если проводящее тело внутри полое, то в полости электростатическое поле также отсутствует. Это используют для <u>электростатического экранирования.</u>



Для защиты от внешних полей измерительные приборы, радиоэлектронные схемы помещают в замкнутые металлические оболочки, называемые экранами.
Часто экраны выполняют из мелкой сетки и заземляют, чтобы потенциал экрана был равен 0.
Свинцовая оболочка кабеля также выполняет роль экрана

Конструкция кабеля

Поляризация диэлектриков



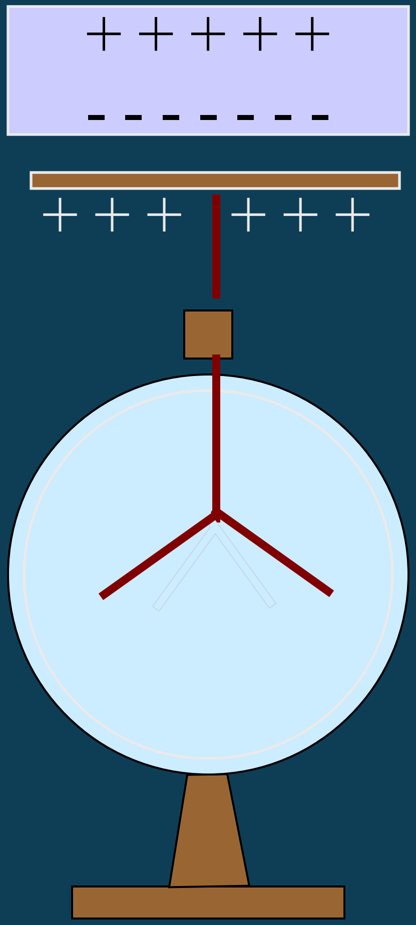
- В отсутствие электрического поля диэлектрик нейтрален
- Приблизим к электрометру стеклянную пластину. Показания электрометра уменьшатся. Отсюда можно сделать вывод:
- <u>На диэлектрике в электрическом поле возникают заряды</u>. Причем на

Это явление называют поляризацией диэлектриков

Свободные и связанные заряды.

- Свободными называют заряды, которые под воздействием сил поля могут свободно перемещаться в веществе, их перемещение не ограничивается внутримолекулярными силами. Свободные заряды имеются в проводниках
- Связанными зарядами называют заряды, связанные с молекулами вещества. Эти заряды при воздействии внешнего поля могут незначительно перемещаться внутри молекул. Связанные заряды имеются в диэлектриках.

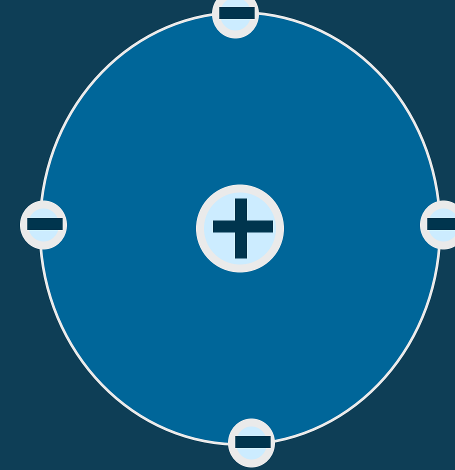
Поляризация диэлектриков



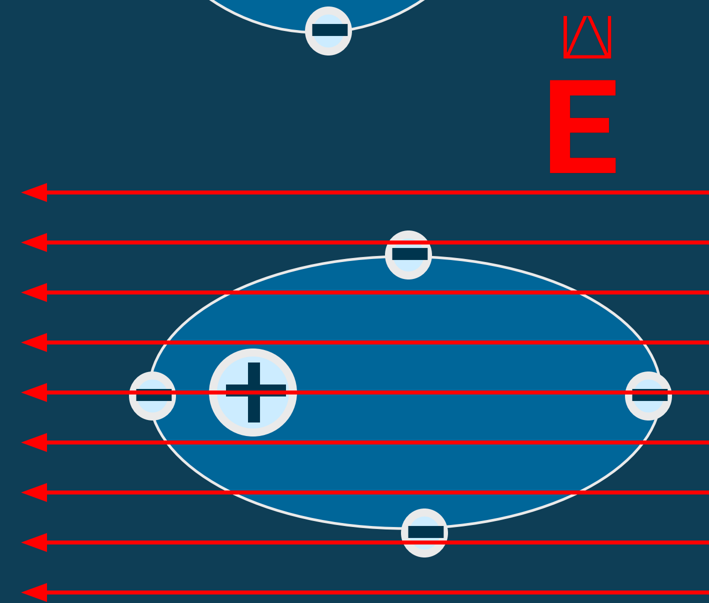
- Поляризация диэлектрика – это упорядоченное изменение расположения связанных зарядов в теле, вызванное электрическим полем.

Типы диэлектриков

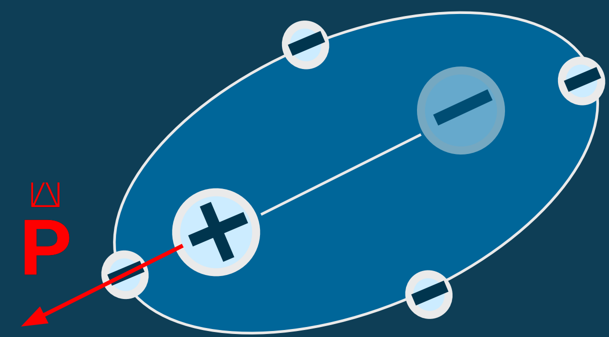
Неполярные – молекулы имеют симметричное строение, т.е. Центры тяжести отрицательных и положительных зарядов совпадают в отсутствии внешнего электрического поля.



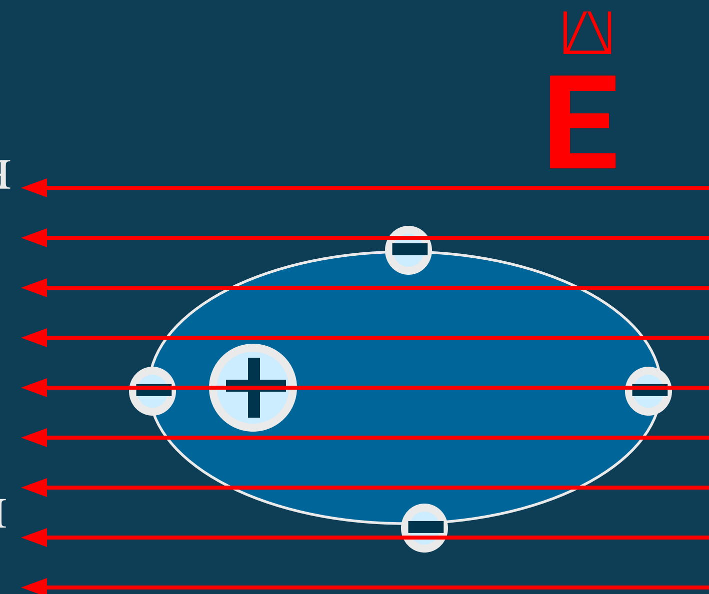
Под действием внешнего поля заряды неполярных молекул смещаются в противоположные стороны и молекула становится диполем.



Типы диэлектриков



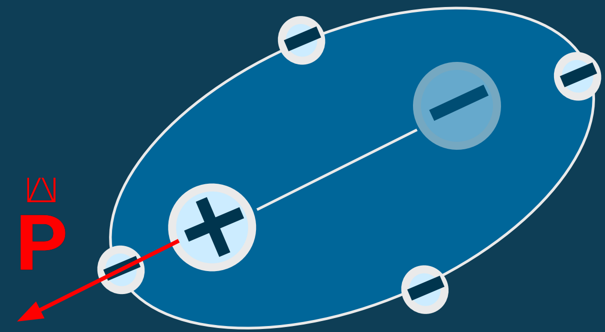
<u>Полярные</u> - молекулы имеют асимметричное строение, т.е. Центры тяжести положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Эти молекулы в отсутствии внешнего поля уже являются диполями, но благодаря тепловому хаотическому движению располагаются хаотично. Поэтому при отсутствии внешнего поля диэлектрик нейтрален.



Под действием внешнего поля молекулы стремятся повернуться так, чтобы их электрический момент $\vec{P}$ был направлен по внешнему полю.

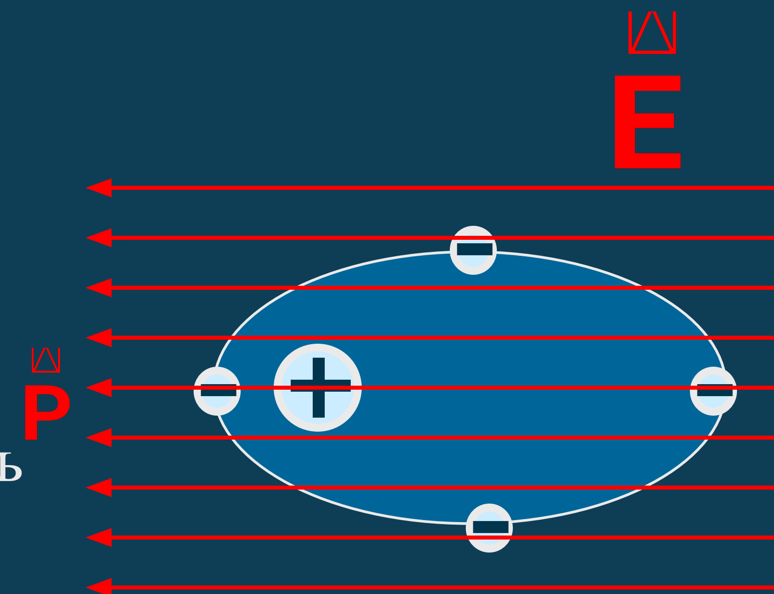
Вектор поляризации

Практический интерес представляет электрический момент суммы диполей, находящихся в единице объема диэлектрика.



Электрический момент суммы диполей в единице объема вещества называют вектором поляризации (поляризованностью)

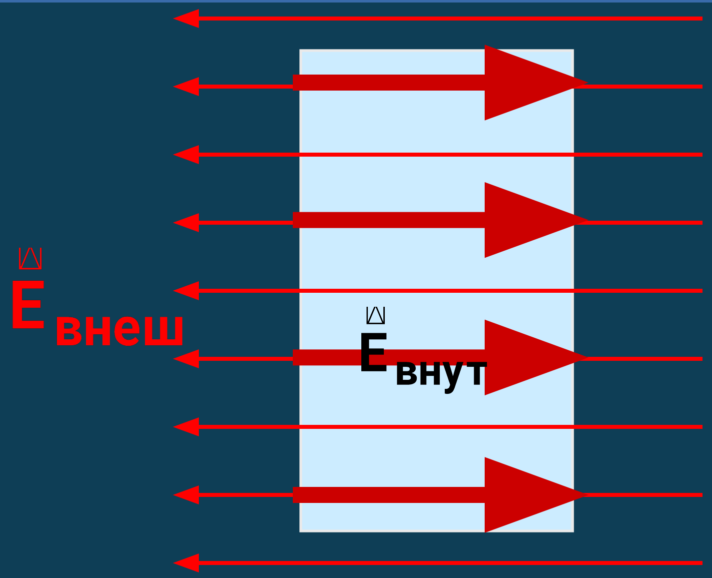
$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{V} = k\vec{E} = \kappa\varepsilon_0\vec{E}$$



κ-диэлектрическая восприимчивость вещества (безразмерная величина)

Вектор электрического смещения в диэлектриках

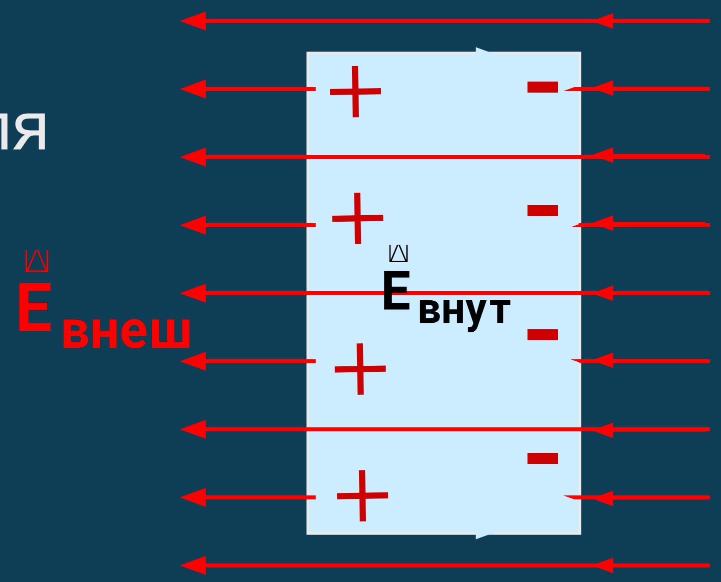
- Связанные заряды в диэлектрике, помещенном во внешнее электрическое поле создают свое внутреннее поле, напряженность которого будет направлена противоположно напряженности внешнего поля. Поэтому напряженность результирующего поля в диэлектрике будет меньше , чем напряженность внешнего поля.



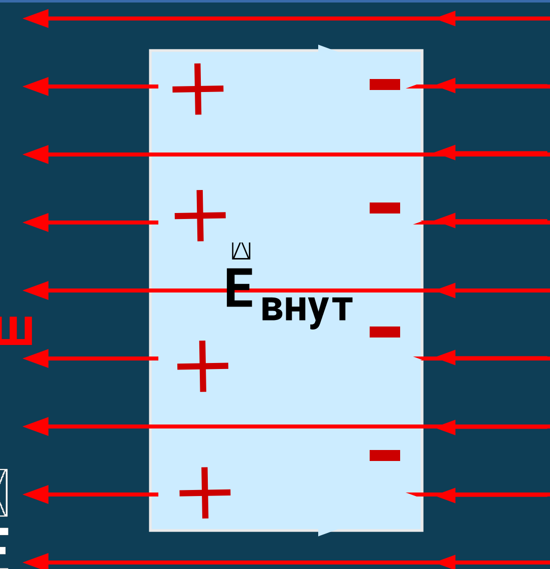
$$\vec{E}_{рез} = \vec{E}_{внеш} + \vec{E}_{внут}$$

Вектор электрического смещения в диэлектриках

- В результате часть линий напряженности внешнего поля обрывается на связанных зарядах в диэлектрике.
- Другая часть линий напряженности проходит сквозь диэлектрик.
- Таким образом <u>вектор напряженности поля на границе раздела вакуум-диэлектрик изменяется</u> скачкообразно.



Вектор электрического смещения в диэлектриках



- Поэтому оказалось целесообразным ввести еще одну характеристику поля – <u>вектор электрического смещения</u>, который равен сумме двух векторов:

$$\vec{D}_{рез} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E}$$

обозначим $\varepsilon = 1 + \kappa$, тогда $\vec{D}_{рез} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$

ε – относительная диэлектрическая проницаемость

Вектор $\vec{D}$ не зависит от свойств среды в отличие от вектора $\vec{E}$.

Он описывает электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами, но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Линии электрического смещения

- Поле вектора $\vec{D}$ изображается с помощью линий электрического смещения, направление и густота которых характеризуют поле.
- Линии вектора $\vec{E}$ могут начинаться и заканчиваться на любых зарядах – свободных и связанных.
- Линии вектора $\vec{D}$ начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах.
- Через области, где находятся связанные заряды, линии вектора $\vec{D}$ проходят не прерываясь.

Теорема Гаусса
(в интегральной форме)

- Поток вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме **свободных** электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности.

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \int_V \rho \cdot dV$$

Теорема Гаусса
(в дифференциальной форме)

- Разделим обе части уравнения на одну и ту же скалярную величину – объем **V:**

$$\frac{\oint\limits_S D_n dS}{V} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i}{V} = \frac{\int\limits_V \rho \cdot dV}{V} = \rho$$

- Найдем предел выражения при V→ 0: $\lim\limits_{V \to 0} \frac{\oint\limits_S D_n dS}{V} = \rho$

Предел отношения потока векторной величины сквозь замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем к объему называют дивергенцией (истоком) вектора (div $\vec{D}$).

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

ТЕОРЕМА ГАУССА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Определение дивергенции векторной функции

По определению $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$,

Покажем, что скалярное умножение оператора ∇ на векторную функцию $\vec{E}$, означает взятие дивергенции от этой векторной функции:

$$\nabla\vec{E} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z\right) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

при этом учитываем что скалярное произведение одноименных ортов равно 1, а разноименных – 0:

$$\vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = \vec{k}\,\vec{k} = 1\cdot 1\cdot\cos 0 = 1, \quad \vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{k} = 1\cdot 1\cdot\cos(\pi/2) = 0$$

Таким образом можно записать:

$$\boxed{\nabla\vec{E} = \operatorname{div}\vec{E}}$$

Теорема Гаусса
(в дифференциальной форме)

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{D} = \rho}$$

ТЕОРЕМА ГАУССА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ
(первая форма записи)

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

ТЕОРЕМА ГАУССА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ
для однородной и изотропной среды
(вторая форма записи)

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho_{своб} + \rho_{связ}}{\varepsilon_0}}$$

ТЕОРЕМА ГАУССА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ
для неоднородной среды
(третья форма записи)

Уравнения Пуассона и Лапласа для электростатического поля

Получены уравнения:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \\ \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \end{cases}$$

После подстановки, получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Дивергенцию градиента называют лапласианом (оператором Лапласа) и обозначают:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Уравнение Пуассона

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}}$$

В тех точках поля, где нет зарядов – уравнение Лапласа

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$$

Общее решение уравнения Пуассона

- Пусть в объеме V имеются точечные объемные, поверхностные, и линейные заряды: ρdv, σds, τdl
- Потенциал в некоторой точке пространства складывается из трех составляющих:
  - ✔ От объемного заряда $\dfrac{\rho dv}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$
  - ✔ От поверхностного заряда $\dfrac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$
  - ✔ От линейного заряда $\dfrac{\tau dl}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$

Полное значение потенциала в точке пространства

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho dv}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma ds}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_L \frac{\tau dl}{R}$$

Теорема единственности решения

- Покажем, что если найдена напряженность электрического поля, которая удовлетворяет уравнению Лапласа-Пуассона и заданным граничным условиям, то это решение - <u>единственное</u>. Допустим, что есть два решения $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$.

Тогда для E_1 $\operatorname{div}(\varepsilon_0\varepsilon E_1) = \rho$ и $\operatorname{rot} E_1 = 0$

и для E_2 $\operatorname{div}(\varepsilon_0\varepsilon E_2) = \rho$ и $\operatorname{rot} E_2 = 0$

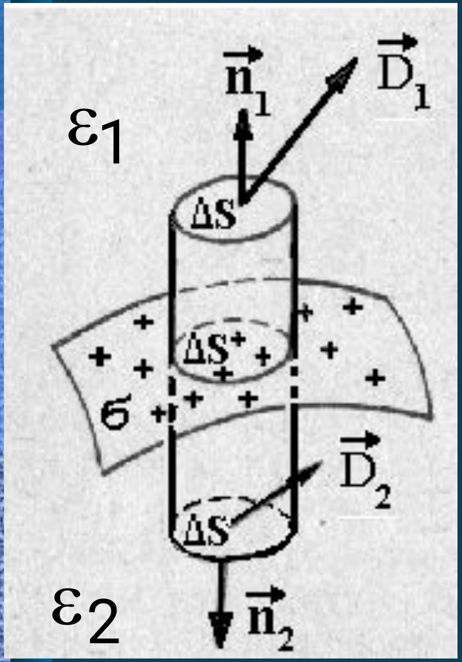
Найдем дивергенцию и ротор разности $E_1 - E_2$:

$\operatorname{div}(E_1 - E_2) = \operatorname{div} E_1 - \operatorname{div} E_2 = 0$

$\operatorname{rot}(E_1 - E_2) = \operatorname{rot} E_1 - \operatorname{rot} E_2 = 0$

Если у вектора $E_1 - E_2$ и дивергенция и ротор равны 0, то такой вектор сам равен нулю, т.е. $E_1 - E_2 = 0$, а $E_1 = E_2$ оба решения одинаковы.

Граничные условия в электростатическом поле (1)



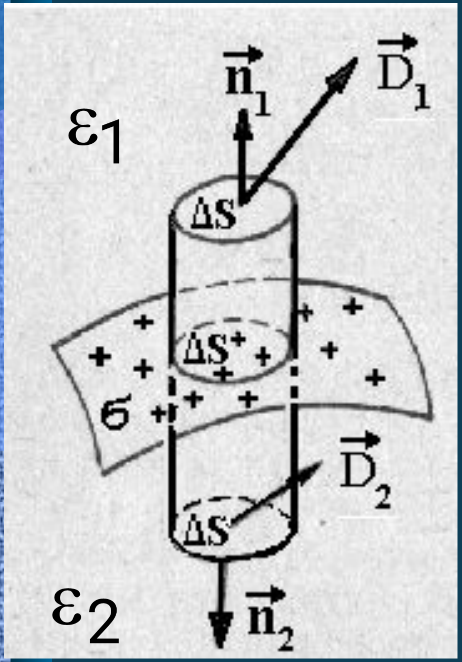
Рассмотрим границу двух непроводящих сред, диэлектрические проницаемости которых ε_1 и ε_2.

Пусть на границе двух сред имеется свободный заряд с поверхностной плотностью σ.

Построим замкнутую цилиндрическую поверхность, пересекающую поверхность раздела двух сред. По теореме Гаусса:

$$\oint\limits_{s} D\,ds = \oint\limits_{\Delta s} D_1\,ds + \oint\limits_{\Delta s} D_2\,ds + \oint\limits_{s_{бок}} D\,ds = \sigma \Delta S$$

Граничные условия в электростатическом поле (1)



При $\Delta S \to 0$ можно считать, что

$$\oint_{\Delta s} D_1\, ds = D_{1n}\Delta S \quad \text{и} \quad \oint_{\Delta s} D_2\, ds = D_{2n}\Delta S$$

При малой высоте цилиндра можно считать, что поток через боковую поверхность $\to 0$.

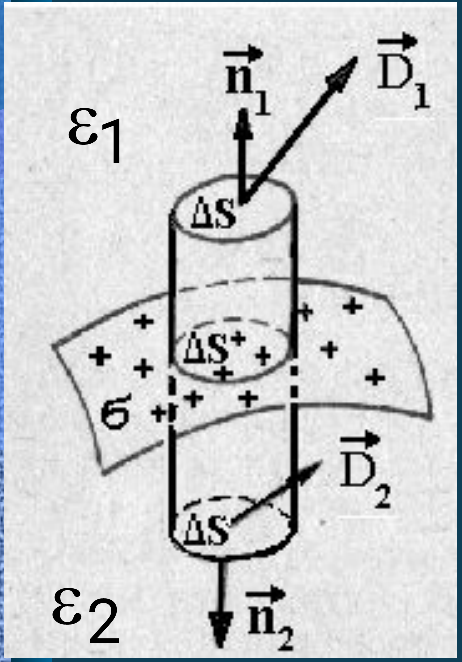
Тогда $D_{1n}\Delta S - D_{2n}\Delta S = \sigma\Delta S$, отсюда

1 – ое граничное условие:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma$$

Нормальная составляющая вектора электрической индукции на границе двух непроводящих сред изменяется скачком, равным поверхностной плотности зарядов, распределенных на границе.

Граничные условия в электростатическом поле **(1)**



При $\Delta S \to 0$ можно считать, что

$$\oint_{\Delta s} D_1\, ds = D_{1n}\Delta S \quad \text{и} \quad \oint_{\Delta s} D_2\, ds = D_{2n}\Delta S$$

При малой высоте цилиндра можно считать, что поток через боковую поверхность $\to 0$.

Тогда $D_{1n}\Delta S - D_{2n}\Delta S = \sigma\Delta S$, отсюда

1 – ое граничное условие:

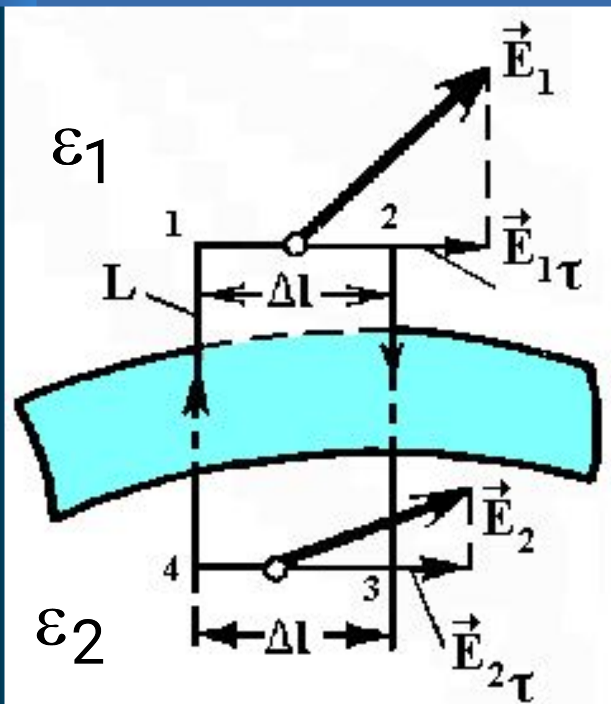
$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma$$

Если поверхностная плотность зарядов равна 0, то:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ непрерывна.

Граничные условия в электростатическом поле **(2)**



Проведем замкнутую линию **L** так, чтобы одна ее часть находилась в первом диэлектрике, а друга во втором. Зададимся направлением обхода по контуру 1-2-3-4 и составим циркуляцию вектора напряженности.

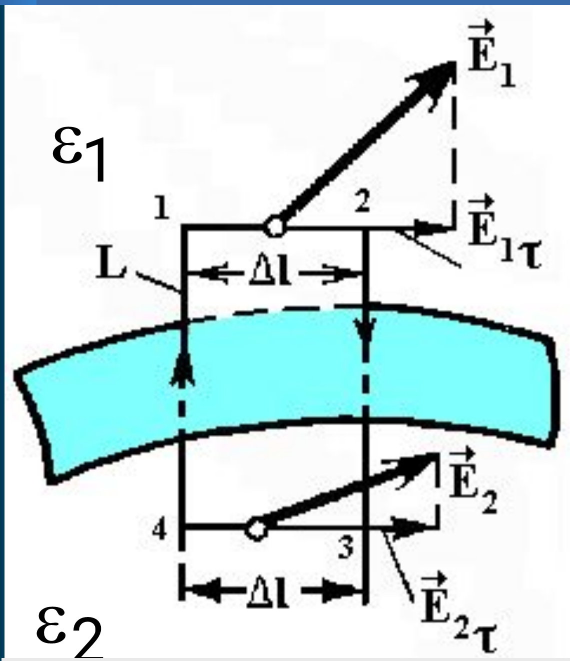
В электростатическом поле циркуляция вектора напряженности равна 0:

$$\int_{12} \vec{E}_1 dl + \int_{23} \vec{E} dl + \int_{34} \vec{E}_2 dl + \int_{41} \vec{E} dl = 0$$

при $dl \to 0$ можно считать $\vec{E} = const$, тогда

$$\int_{12} \vec{E}_1 dl = E_{1\tau} \Delta l \quad \text{и} \quad \int_{34} \vec{E}_{12} dl = E_{2\tau} \Delta l$$

Граничные условия в электростатическом поле **(2)**



$$\int_{12} \vec{E}_1 dl + \int_{23} \vec{E} dl + \int_{34} \vec{E}_2 dl + \int_{41} \vec{E} dl = 0 \qquad (1)$$

при $dl \to 0$ можно считать $\vec{E} = const$, тогда

$$\int_{12} \vec{E}_1 dl = E_{1\tau}\Delta l \quad \text{и} \quad \int_{34} \vec{E}_{12} dl = E_{2\tau}\Delta l$$

Если отрезки $2-3$ и $4-1$ уменьшать так, чтобы они $\to 0$, то отрезки Δl совпадут с граничной поверхностью и $\int \vec{E} dl = \int \vec{E} dl = 0$

На границе двух непроводящих сред касательные составляющие вектора напряженности электрического поля равны, а потенциал непрерывен.

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2}$$

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad \text{или} \quad \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}}$$

Условия на границе раздела двух диэлектриков

1. Нормальная составляющая вектора электрической индукции на границе двух непроводящих сред изменяется скачком, равным поверхностной плотности зарядов, распределенных на границе.

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma$$

2. Если поверхностная плотность зарядов равна 0, то нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ непрерывна.

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

3. Касательные составляющие вектора напряженности электрического поля равны:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad \text{или} \quad \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2},$$

а потенциал непрерывен: $\varphi_1 = \varphi_2$

Условия на границе раздела проводящего тела и диэлектрика

В проводящей среде векторы поля равны нулю, а потенциал всех точек проводника один и тот же. Если первая среда диэлектрик, а вторая – проводник, то граничные условия:

$$E_2 = 0, \quad D_2 = 0, \quad \varphi_2 = \mathrm{const},$$

$$D_{1n} = D_1 = \sigma \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_1 = \sigma,$$

$$E_{1\tau} = 0 \ \text{или} \ D_{1\tau} = 0.$$

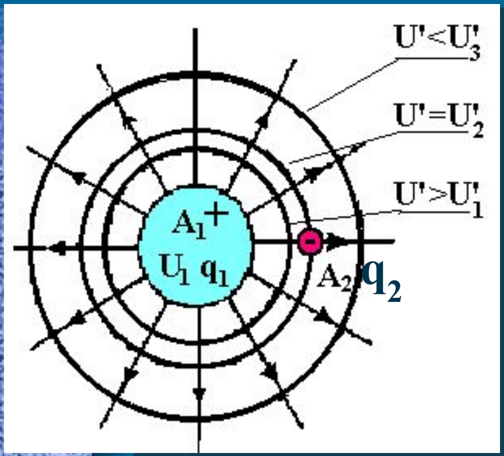
Электрическая емкость

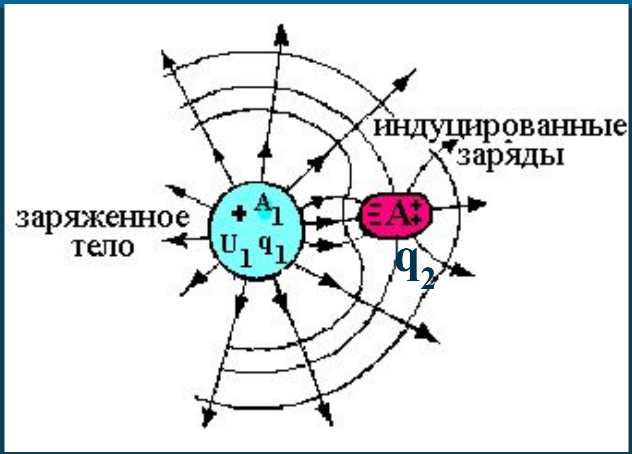
- Емкость **C** между двумя телами, на которых имеются равные по величине и противоположные заряды есть абсолютная величина отношения заряда на одном теле к напряжению между телами:

$$C = \frac{Q}{U} \; [\text{ф}], \qquad 1\,\textit{фарада}\,[\text{ф}] = \frac{1\,\textit{кулон}}{1\,\textit{вольт}}$$

Электрическая емкость

- **В системе нескольких заряженных тел потенциал каждого тела определяется не только зарядом данного тела, но и зарядами всех остальных тел.**





Возможны 2 случая:

1. **Если тело A_2 мало, то можно пренебречь искажением поля , возникающим от индуцированных зарядов на этом теле.**
2. **В общем случае потенциал U_1 определяется как зарядом, распределенным на теле A_1, так и зарядами, индуцированными на теле A_2.**

Если заряды обоих тел отличны от нуля, то потенциалы тел могут быть найдены на основе принципа наложения:

$$U_1 = U_1' + U_1'' = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2$$

$$U_2 = U_2' + U_2'' = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2$$

Электрическая емкость

В общем случае, когда имеется n заряженных тел:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \ldots + \alpha_{1k}q_k + \ldots + \alpha_{1n}q_n \\
U_2 &= \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \ldots + \alpha_{2k}q_k + \ldots + \alpha_{2n}q_n \\
&\vdots \\
U_k &= \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \ldots + \alpha_{kk}q_k + \ldots + \alpha_{kn}q_n \\
&\vdots \\
U_n &= \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \ldots + \alpha_{nk}q_k + \ldots + \alpha_{nn}q_n
\end{aligned}
$$

α_{kk} – собственные потенциальные коэффициенты.

α_{kn} – взаимные потенциальные коэффициенты

Электрическая емкость

Часто выражают заряд каждого тела через разности потенциалов данного тела и других тел, в том числе и земли:

$$q_1 = C_{11}(U_1 - 0) + C_{12}(U_1 - U_2) + \ldots + C_{1k}(U_1 - U_k) + \ldots + C_{1n}(U_1 - U_n)$$

$$\vdots$$

$$q_k = C_{k1}(U_k - U_1) + C_{k2}(U_k - U_2) + \ldots + C_{kk}(U_k - 0) + \ldots + C_{kn}(U_k - U_n)$$

$$\vdots$$

$$q_n = C_{n1}(U_n - U_1) + C_{n2}(U_n - U_2) + \ldots + C_{nk}(U_n - U_k) + \ldots + C_{nn}(U_n - 0)$$

C_{kk} – собственные емкости,

C_{kn} – взаимные емкости

Энергия взаимодействия точечных заряженных тел

- При перемещении точечного заряда $\mathbf{Q_1}$ из точки 1 в бесконечность необходимо совершить работу, против сил поля.

$$\int_1^\infty F dl = \int_1^\infty E_1 Q dl = Q_1 \int_1^\infty E_1 dl = Q_1 \varphi_1$$

- Энергия взаимодействия двух зарядов $\mathbf{Q_1}$ и $\mathbf{Q_2}$.

$$W = \frac{Q_1\varphi_1 + Q_2\varphi_2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2} Q_n \varphi_n$$

Энергия электростатического поля

Если поле возбуждается объемными и поверхностными зарядами, то элементарные заряды $dQ = \rho dv$ и $dQ = \sigma ds$ можно считать точечными.

Энергия поля: $W = \int\limits_V \frac{\varphi\rho}{2} dv + \oint\limits_S \frac{\varphi\sigma}{2} ds = \int\limits_V \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} dv$.

В однородных и изотропных средах $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$, тогда энергия поля:

$$W = \int\limits_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dv$$

Физический смысл этого уравнения заключается в том, что носителем энергии является электрическое поле, распределенное в пространстве с объемной плотностью: $\frac{dW}{dv} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$