Южный федеральный университет
Институт компьютерных технологий и информационной безопасности

Презентация к лекции №16 по дисциплине

«Теория принятия решений»

Лектор:

к.т.н., доцент каф. СиПУ
Кузьменко А.А.
andrew.kuzmenkosipu@gmail.com

Лекция №16 Метод ELECTRE I.

Цель лекции:

- изучить применение метода ELECTRE I для формирования множества недоминируемых альтернатив.

Содержание лекции:

1. Метод ELECTRE I.

1. Метод ELECTRE I.

Метод предложен в середине 1960-х гг. французским ученым Бернаром Руа (Bernard Roy) и называется ELECTRE. Это — аббревиатура целой фразы **EL**imination **E**t **C**hoix **T**raduisant la **RE**alit´e (удаление и выбор, отражающие реальность). На основе первого алгоритма ELECTRE I впоследствии было создано целое семейство методов (ELECTRE Is, ELECTRE Iv, ELECTRE II, ELECTRE III, ELECTRE IV и др.).

Основная идея методов ELECTRE состоит в изучении отношений между альтернативами при использовании двух индикаторов (индексов): конкорданса (согласия) и дискорданса (несогласия).

Метод ELECTRE I преимущественно используется **для построения** множества недоминируемых альтернатив, но в отдельных случаях может применяться и для многокритериального оценивания. При этом этот метод гибче метода построения множества Парето, поскольку позволяет изменять размер множества и учитывать важности критериев.

Различные варианты методов ELECTRE состоят из следующих типовых этапов:

- **конструкционный этап**, где определяются отношения превосходства, используемые для попарного сравнения вариантов (альтернатив) по всем критериям, и рассчитываются специальные индексы согласия и несогласия предпочтений ЛПР;

- **исследовательский этап**, где на основе введенных отношений превосходства и индексов согласия и несогласия предпочтений строится последовательно сужаемое множество недоминируемых вариантов (альтернатив) или итоговое ранжирование.

Входными данными для метода ELECTRE I является множество **n** решений (альтернатив), имеющих оценки по **m** критериям. Метод отсекает все неэффективные альтернативы. На множестве вариантов **X**={A_j, j=1,…,n} производится их попарное сравнение, в результате которого строятся индексы согласия и несогласия.

Каждому из **m** критериев ставится в соответствие число w_i, характеризующее важность критерия (фактически, вес важность критерия). Например, это число можно получить как количество голосов жюри, поданных за этот критерий. В данном методе веса важности **<u>не обязательно должны быть нормированными</u>** (т.е. $0<w_i<1$) и не обязательно должно выполняться условие нормировки $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$, но тем не менее они должны отражать важность соответствующего критерия для ЛПР – более важному критерию соответствует большее значение веса.

В методе осуществляется попарное сравнение **<u>всех</u>** альтернатив по всем критериям. Для каждой пары сравниваемых альтернатив A_j и A_k множество критериев I={1,2,…,m} разбивается на три подмножества (здесь u_{ji} – значение альтернативы A_j по критерию i):

$I_{jk}^{+} = \{i \in I \mid u_{ji} \succ u_{ki}\}$ – подмножество индексов критериев, по которым A_j строго предпочтительнее A_k.

$I_{jk}^{-} = \{i \in I \mid u_{ji} \prec u_{ki}\}$ – подмножество индексов критериев, по которым A_j строго менее предпочтительно, чем A_k.

$I_{jk}^{=} = \{i \in I \mid u_{ji} \approx u_{ki}\}$– подмножество индексов критериев, по которым A_j равноценна A_k.

Исходные данные для метода ELECTRE I:

- множество альтернатив **X**={A_j, j=1,…,n}
- множество критериев K_i, i=1,2,…,m
- значения весов важности критериев w_i
- матрица решений (полезностей) со значениями u_{ji}

Метод ELECTRE I применим как для количественных, так и для качественных критериев.

Вычислительный алгоритм метода ELECTRE I:

1. Преобразование оценок альтернатив по критериям матрицы решений (полезностей) из исходной шкалы в ранговую (порядковую) шкалу.

Элементы ранговой (порядковой) шкалы отличаются на единицу (одну ступень). Здесь же сразу удобно критерии привести к одному направлению – максимизации, так чтобы и для максимизации, и для минимизации наилучшей альтернативе соответствовал наибольший по значению ранг.

В соответствии с предпочтениями ЛПР разные значения в исходной шкале могут быть отнесены к одному рангу.

2. Вычисление матриц согласия и несогласия.

3. Построение графа предпочтений при заданных уровнях согласия и несогласия, разбиение альтернатив на ярусы и выделение ядра.

4. Изменение заданных уровнях согласия и несогласия и возврат к п. 3.

5. Выход из алгоритма при получении желаемого размера ядра или достижения цели исследования.

Пример 0. Проиллюстрируем преобразование оценок альтернатив по критериям матрицы решений (полезностей) из исходной шкалы в ранговую (порядковую) шкалу.

Допустим есть матрица полезностей в задаче приобретения автомобиля, в которой оценки по критериям представлены в исходных шкалах.

Автомобиль	Год выпуска	Пробег, тыс. км.	Цена, тыс. руб.	Мощность двигателя, л. с.	Тип двигателя
A1	2012	30	950	1,4	Бензин
A2	2010	100	550	2	Гибрид
A3	2007	90	410	1,6	Бензин

Матрица в ранговой шкале, в которой все критерии приведены к максимизации

Автомобиль	Год выпуска	Пробег, тыс. км.	Цена, тыс. руб.	Мощность двигателя, л.с.	Тип двигателя
A1	3	3	1	3	1
A2	2	1	2	1	2
A3	1	2	3	2	1

Для каждого попарного сравнения вычисляют индекс согласия.
Индекс согласия c_{jk}, что альтернатива A_j лучше альтернативы A_k определяется следующим образом:

$$c_{jk}=\frac{\sum\limits_{i\in I_{jk}^{+}} w_i+\alpha\sum\limits_{i\in I_{jk}^{=}} w_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} w_i}$$

где α – параметр, α ∈ {1; 0,5; 0} (выбор его значения зависит от того, какая модификация метода ELECTRE реализуется). В ELECTRE I обычно α = 0,5.

На основании всех попарных сравнений получаем матрицу согласия $\mathbf{C}=\left(c_{jk}\right)_{n\times n}$.

Только для матрицы согласия при α = 0,5 справедливо соотношение $c_{ji}=1-c_{ij}$

Пример 1 (выбор отеля). Собираясь на отдых, ЛПР выбирает один из отелей, примерно одинаковых по цене, но различающихся по критериям: расположение отеля, комфорт, качество питания и наличие интернета. Критерии и их градации представлены в табл. 1. Веса соответствующих критериев известны, они определены экспертным путем – табл. 2, оценки 7 отелей (альтернатив) приведены в табл. 3.

Таблица 1

Комфорт	Градации	Код (балл, ранг)
K_1 (комфорт)	Отличный	5
	Выше среднего	4
	Средний	3
	Ниже среднего	2
	Плохой	1
K_2 (питание)	Отличное	3
	Среднее	2
	Плохое	1
K_3 (расположение от моря)	Близко	2
	Далеко	1
K_4 (бесплатный WiFi)	Есть	2
	Нет	1

Таблица 2

j	Критерий K_j	Вес w_j
1	Комфорт	0,19
2	Питание	0,25
3	Расположение от моря	0,47
4	Бесплатный WiFi	0,09

Таблица 3

Альтернативы	K_1	K_2	K_3	K_4
A_1	1	3	2	2
A_2	2	3	1	2
A_3	2	2	2	2
A_4	3	2	2	1
A_5	3	2	1	2
A_6	3	1	2	2
A_7	5	1	1	1

Оценка по каждому из критериев производится по качественной шкале – шкале порядка. Градации этих шкал закодированы цифрами, но это не значит, что оценка «4», например, в два раза лучше «2».

Комфорт	Градации	Код (балл, ранг)
K_1 (комфорт)	Отличный	5
	Выше среднего	4
	Средний	3
	Ниже среднего	2
	Плохой	1
K_2 (питание)	Отличное	3
	Среднее	2
	Плохое	1
K_3 (расположение от моря)	Близко	2
	Далеко	1
K_4 (бесплатный WiFi)	Есть	2
	Нет	1

Каково множество Парето?

Легко видеть, что никакая строка табл. 3 не доминирует другую, следовательно, все вариант несравнимы по отношению абсолютного доминирования и образуют множество Парето.

Вычисление индексов согласия.

Возьмем для примера пару A_1, A_2.
Для нее имеем

$$I_{12}^{+} = \{3\} \qquad I_{12}^{-} = \{1\} \qquad I_{12}^{=} = \{2,4\}$$

Альтернативы	K_1	K_2	K_3	K_4
A_1	1	3	2	2
A_2	2	3	1	2
A_3	2	2	2	2
A_4	3	2	2	1
A_5	3	2	1	2
A_6	3	1	2	2
A_7	5	1	1	1

Отсюда индекс согласия для этой пары

$$c_{12} = \frac{\sum\limits_{i \in I_{12}^{+}} w_i + 0{,}5 \sum\limits_{i \in I_{12}^{=}} w_i}{\sum\limits_{i=1}^{4} w_i} = \frac{0{,}47 + 0{,}5(0{,}25 + 0{,}09)}{1} = 0{,}64$$

j	Критерий K_j	Вес w_j
1	Комфорт	0,19
2	Питание	0,25
3	Расположение от моря	0,47
4	Бесплатный WiFi	0,09

Аналогично вычисляются остальные индексы согласия.
В результате матрица индексов согласия имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} - & 0.64 & 0.53 & 0.58 & 0.76 & 0.53 & 0.81 \\ 0.36 & - & 0.39 & 0.34 & 0.53 & 0.29 & 0.58 \\ 0.47 & 0.61 & - & 0.45 & 0.64 & 0.53 & 0.81 \\ 0.42 & 0.66 & 0.55 & - & 0.69 & 0.58 & 0.76 \\ 0.24 & 0.47 & 0.36 & 0.31 & - & 0.39 & 0.58 \\ 0.47 & 0.70 & 0.47 & 0.42 & 0.61 & - & 0.68 \\ 0.19 & 0.42 & 0.19 & 0.24 & 0.42 & 0.32 & - \end{pmatrix}$$

Далее, в методе ELECTRE вычисляются **индексы несогласия**.

Для каждой пары альтернатив A_j и A_k:
1) по каждому i-му критерию из подмножества $I^-_{jk} = \{i \in I \mid u_{ji} \prec u_{ki}\}$ определяется частный индекс несогласия $0 \le d^i_{jk} \le 1$. Он тем больше, чем больше различаются эти оценки по i-му критерию.

Частный индекс несогласия рассчитывается как

$$d^i_{jk} = \Delta^i_{jk} \cdot h_i ,$$

где Δ^i_{jk} – мера различия между оценками u_{ji} и u_{ki} в порядковой шкале i-го критерия, определяемая как число разделяющих u_{ji} и u_{ki} значений шкалы (соседние значения должны различаться на единицу); h_i – «протестная» константа, индивидуальная для каждого i-го критерия.

При сравнении альтернатив по i-му критерию величина «протестной» константы h_i равна отношению количества баллов (из 100), которые ЛПР готов отдать за улучшение значения альтернативы на одно деление шкалы i-го критерия, к 100 баллам. При этом h_i не должен приводить к $d^i_{jk} > 1$ при наибольшем различии между оценками u_{ji} и u_{ki}.

2) вычисляется общий индекс несогласия $d_{jk} = \max\limits_i d^i_{jk}$.

Т.о., при вычислении индексов несогласия веса важности не учитываются, но из всех несогласных находится самый несогласный (демократическое право вето).

Аналогично получаем матрицу несогласия $\mathbf{D} = \left(d_{jk}\right)_{n \times n}$.

Очевидны свойства индексов согласия и несогласия: $0 \le c_{jk} \le 1; 0 \le d_{jk} \le 1.$

Причём $c_{jk} = 1, d_{jk} = 0$, если $A_j \succ A_k$ для ВСЕХ критериев, т.е. полностью согласны с тем, что j-я альтернатива строго предпочтительнее чем k-я.

И $c_{jk} = 0, d_{jk} = 1$ в противоположном случае. Т.е. полностью НЕ согласны с тем, что j-я альтернатива строго предпочтительнее чем k-я.

Типовая ошибка: $d_{jk} > 1,$
которая может возникнуть если некорректно задать h_i, что может иметь место при наибольшем различии между оценками u_{ji} и u_{ki}.
Поэтому должно быть $h_i \le 1/\Delta^i_{\max}$, здесь $\Delta^i_{\max}$ – наибольший размах по шкале i-го критерия.

Для матрицы несогласия справедливо соотношение

$$d_{ji} \ne 1 - d_{ij}$$

т.е. d_{ij} и d_{ji} вычисляются отдельно для каждого парного сравнения.

Вычисление индексов несогласия. **Пример 1 (продолжение).**

Для вычисления индексов несогласия зададимся значениями «протестных» констант для критериев. Пусть $h_1 = 0{,}2; h_2 = 0{,}25; h_3 = 0{,}2; h_4 = 0{,}2$.

В качестве примера рассчитаем d_{16}, d_{71} .

Для пары альтернатив A_1, A_6 имеем $I^-_{16} = \{1\}$.

Различие по первому критерию составляет две ступени $\Delta^1_{16} = 2$, поэтому

$$d^1_{16} = \Delta^1_{16} \cdot h_1 = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad d_{16} = \max d^1_{16} = \max\{0{,}4\} = 0{,}4$$

Для пары альтернатив A_7, A_1 имеем $I^-_{71} = \{2,3,4\}$.

Различие по третьему и четвертому критериям составляет одну ступень $\Delta^3_{71} = \Delta^4_{71} = 1$, а по второму - две ступени $\Delta^2_{71} = 2$, поэтому

$$\begin{aligned} d^2_{71} &= \Delta^2_{71} \cdot h_2 = 2 \cdot 0,25 = 0,5 \\ d^3_{71} &= \Delta^3_{71} \cdot h_3 = 1 \cdot 0,2 = 0,2 \\ d^4_{71} &= \Delta^4_{71} \cdot h_4 = 1 \cdot 0,2 = 0,2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad d_{71} = \max\{d^2_{71}, d^3_{71}, d^4_{71}\} = \max\{0,5; 0,2; 0,2\} = 0,5$$

Альтернативы	K_1	K_2	K_3	K_4
A_1	1	3	2	2
A_2	2	3	1	2
A_3	2	2	2	2
A_4	3	2	2	1
A_5	3	2	1	2
A_6	3	1	2	2
A_7	5	1	1	1

Вся матрица индексов несогласия:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} - & 0.20 & 0.20 & 0.40 & 0.40 & 0.40 & 0.80 \\ 0.20 & - & 0.25 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.60 \\ 0.25 & 0.25 & - & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.60 \\ 0.25 & 0.25 & 0.20 & - & 0.20 & 0.20 & 0.40 \\ 0.25 & 0.25 & 0.20 & 0.20 & - & 0.20 & 0.40 \\ 0.50 & 0.50 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & - & 0.40 \\ 0.50 & 0.50 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.20 & - \end{pmatrix}$$

Задание

Для примера 1 построить вторую и седьмую строки матрицы несогласия при $h_1 = 0,15; h_2 = 0,4; h_3 = 0,3; h_4 = 0,6$

Альтернативы	**K_1**	**K_2**	**K_3**	**K_4**
A_1	1	3	2	1
A_2	2	3	1	1
A_3	2	2	2	1
A_4	3	2	2	0
A_5	3	2	1	1
A_6	3	1	2	1
A_7	5	1	1	0

Исследовательский этап.

На данном этапе осуществляем построение решающего отношения.

На основе чисел $p \in (0,1]$ (заданный уровень согласия) и $q \in (0,1]$(заданный уровень несогласия), определяемых ЛПР, на множестве альтернатив строится следующее бинарное отношение:

j-я альтернатива лучше k-й альтернативы (доминирует альтернативу k) , при условии того что $c_{jk} \geq p$ и $d_{jk} \leq q$.

Введенное бинарное отношение позволяет построить на множестве альтернатив граф предпочтений G(p, q): просматривая матрицы **C** и **D**, выявляют все пары альтернатив, между которыми имеет место данное бинарное отношение при заданных p и q. В этом графе альтернативы – это вершины графа, а направленная дуга означает превосходство одной альтернативы над другой (дуги направлены в сторону доминируемых вершин), а отсутствие дуги – несравнимость альтернатив по введенному бинарному отношению. Т.о., при построении графа G(p, q) в графе показывают все альтернативы, а только те альтернативы, которые при заданных p и q связаны бинарным отношением, соединяют дугами.

Граф G(p, q) не обязательно является транзитивным. Более того, в графе могут быть циклы.

Значения p и q являются инструментами ЛПР. Меняя эти значения, ЛПР определяет условия сравнимости альтернатив и тем самым изучает множество имеющихся альтернатив.

Подмножество оставляемых P (несравнимых, доминирующих) альтернатив должно обладать следующими свойствами:

1) **внешней устойчивости**: для любой из исключенных альтернатив в $\overline{P}$ имеется хотя бы одна, превосходящая ее, среди доминирующих (оставляемых) P ;

2) **внутренней устойчивости**: никакая из доминирующих (оставляемых) альтернатив из P не превосходится другой, также относящейся к доминирующим (оставляемым).

$$\overline{P} \cup P = X$$

Подмножества вершин графа G(p, q), которые удовлетворяют одновременно двум свойствам, называются **ядрами**. Ядро является искомым результатом метода ELECTRE I, но в общем случае при разных значениях p и q можем получать различные ядра.

В случае появления в графе G(p, q) нетранзитивностей основным для выделения ядра становится свойство внутренней устойчивости.

Отсутствие циклов в графе является необходимым условием существования и единственности ядра. Однако в общем случае циклы могут быть. В случае их появления предлагается объявить альтернативы, входящие в цикл, эквивалентными и считать их одной обобщенной вершиной. Эта операция называется *стягиванием контуров*. Или при данных p и q считать, что ядро отсутствует.

Итак, создав граф G(p, q), необходимо в нем построить ядро, содержащее вершины, которые не доминируют друг друга и в совокупности доминируют все остальные.

Для построения ядра используется следующий двухэтапный алгоритм:

1. Разбиение на ярусы. Определяются вершины, которые не имеют входящих и исходящих дуг – это *изолированные вершины*, и вершины, имеющие только исходящие дуги – это *антитупики*. Они относятся к ярусу **0**. Затем эти вершины условно (умозрительно) вычеркиваются со всеми инцидентными (исходящими) дугами, а в получившемся подграфе определяются новые антитупики и изолированные вершины, которые относятся к ярусу **1**. Затем они аналогично вычеркиваются и т.д. до тех пор, пока все вершины не будут разбиты на ярусы (нормальное завершение алгоритма).

При аварийном завершении часть вершин останется необработанной, потому что на очередном шаге не найдется антитупиков. Это свидетельствует о том, что в графе имеются циклы. В этом случае их объединяют – стягивание контуров, либо меняют значения заданных уровней согласия и несогласия.

2. Построение ядра. В ядро включаются все вершины нулевого яруса, оставшиеся вершины просматриваются в порядке возрастания номеров ярусов. К ядру добавляются только те вершины, которые не связаны дугами с вершинами, *уже включенными* в ядро.

Отметим, что матрицы C и D вычисляются один раз, а на исследовательском этапе варьируют значения p и q, получая различные графы и ядра.

Пример 2. Построение и анализ графа относительного доминирования для Примера 1. Для построения результирующего отношения относительного доминирования установим пороговые значения p=0,5 и q=0,2 (пороги несравнимости по согласию и несогласию). Затем каждый элемент матрицы индексов согласия **C** и несогласия **D** сравнивается с порогами.

Как было выше сказано, при доминировании альтернативы j над k:

$$c_{jk} \geq p \qquad d_{jk} \leq q$$

Отношение относительного доминирования отображается графом, в котором дуги направлены в сторону доминируемых вершин.
Перебирая все элементы матриц индексов согласия и несогласия, видим, что пара вершин A1, A2, например, войдет в отношение относительного доминирования, так как c_{12} = 0,64 > 0.5, d_{12} = 0,2 = 0.2; а пара A1, A5 не войдет, так как c_{15} = 0,76 > 0.5, d_{12} = 0,4 > 0,2 и т.д.
Весь граф отношения при данных значениях порогов несравнимости:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} - & 0.64 & 0.53 & 0.58 & 0.76 & 0.53 & 0.81 \\ 0.36 & - & 0.39 & 0.34 & 0.53 & 0.29 & 0.58 \\ 0.47 & 0.61 & - & 0.45 & 0.64 & 0.53 & 0.81 \\ 0.42 & 0.66 & 0.55 & - & 0.69 & 0.58 & 0.76 \\ 0.24 & 0.47 & 0.36 & 0.31 & - & 0.39 & 0.58 \\ 0.47 & 0.70 & 0.47 & 0.42 & 0.61 & - & 0.68 \\ 0.19 & 0.42 & 0.19 & 0.24 & 0.42 & 0.32 & - \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} - & 0.20 & 0.20 & 0.40 & 0.40 & 0.40 & 0.80 \\ 0.20 & - & 0.25 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.60 \\ 0.25 & 0.25 & - & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.60 \\ 0.25 & 0.25 & 0.20 & - & 0.20 & 0.20 & 0.40 \\ 0.25 & 0.25 & 0.20 & 0.20 & - & 0.20 & 0.40 \\ 0.50 & 0.50 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & - & 0.40 \\ 0.50 & 0.50 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.20 & - \end{pmatrix}$$

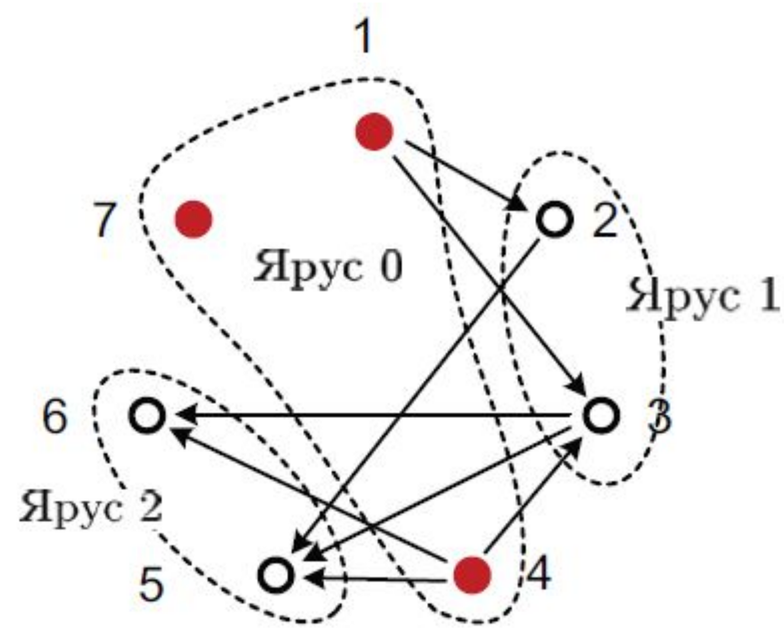
$$\mathbf{C} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 0.64 & 0.53 & 0.58 & 0.76 & 0.53 & 0.81 \\
0.36 & - & 0.39 & 0.34 & 0.53 & 0.29 & 0.58 \\
0.47 & 0.61 & - & 0.45 & 0.64 & 0.53 & 0.81 \\
0.42 & 0.66 & 0.55 & - & 0.69 & 0.58 & 0.76 \\
0.24 & 0.47 & 0.36 & 0.31 & - & 0.39 & 0.58 \\
0.47 & 0.70 & 0.47 & 0.42 & 0.61 & - & 0.68 \\
0.19 & 0.42 & 0.19 & 0.24 & 0.42 & 0.32 & -
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\qquad
\mathbf{D} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 0.20 & 0.20 & 0.40 & 0.40 & 0.40 & 0.80 \\
0.20 & - & 0.25 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.60 \\
0.25 & 0.25 & - & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.60 \\
0.25 & 0.25 & 0.20 & - & 0.20 & 0.20 & 0.40 \\
0.25 & 0.25 & 0.20 & 0.20 & - & 0.20 & 0.40 \\
0.50 & 0.50 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & - & 0.40 \\
0.50 & 0.50 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.20 & -
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}$$

При p=0,5 и q=0,2 из матриц **C** и **D** имеем следующие бинарные отношения:

$A_1 \square A_2;\ A_1 \square A_3;\ A_2 \square A_5;\ A_3 \square A_5;\ A_3 \square A_6;$

$A_4 \square A_3;\ A_4 \square A_5;\ A_4 \square A_6.$

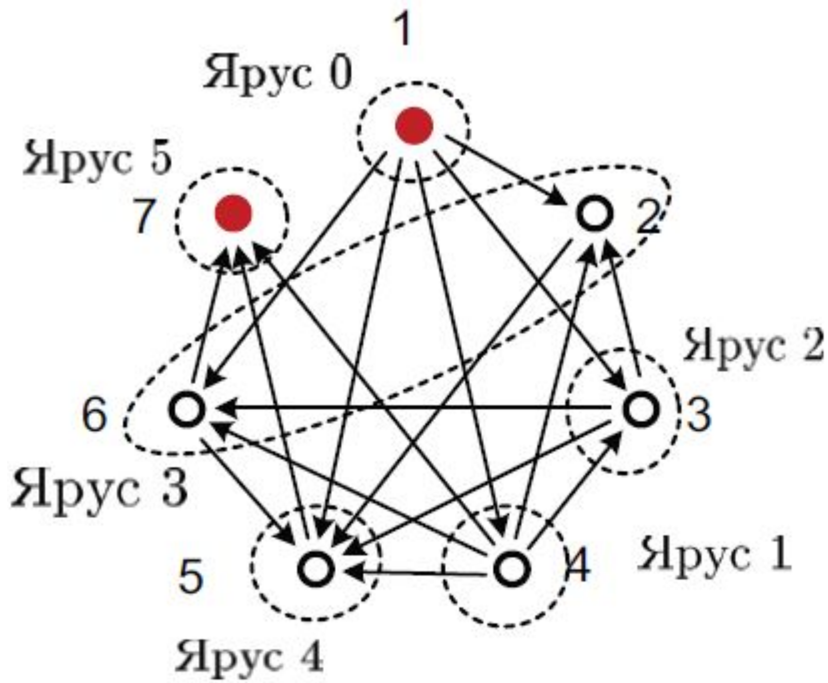
На их основе строим граф.
По графу осуществляем разбиение на ярусы.



Вершины 1, 4, 7 образуют ядро.

Если бы в данном графе не было бы связи 4 и 6, то вершина 6 вошла бы в ядро.

Для того чтобы еще уменьшить число несравнимых вершин, можно варьировать пороги несравнимости. Так при пороговых значениях p=0,5 и q=0,4 имеем граф



По сравнению с графом на предыдущем слайде, он имеет на 10 дуг больше, а его ядро включает две вершины: 1, 7.

Пример 3 (покупка автомобиля). Допустим, что ЛПР собирается купить автомобиль, выбрав из семи альтернатив.
Каждый автомобиль оценивается по четырем критериям:

- цене;
- комфортности салона;
- максимальной скорости;
- внешнему виду.

Цена и скорость являются количественными критериями, поэтому область их значений разобьем на классы (табл. 4), присвоив каждому классу свой код и перейдя тем самым к качественным показателям по ВСЕМ критериям:

Таблица 4

	Критерий	**Значения**	**Ранг шкалы**
K_1	Цена, у.е.	$\le$ 27 000 28 000 – 32 000 33 000 – 37 000 38 000- 42 000 43 000 – 47 000	5 4 3 2 1
K_2	Комфортность	Высокая Средняя Низкая	3 2 1
K_3	Максимальная скорость, км/ч	$\ge$ 250 < 250	2 1
K_4	Внешний вид	Хороший Приемлемый	2 1

В табл. 5, с учетом введенных критериев и классов, перечислены значения критериев для выделенных ЛПР альтернатив.

Таблица 5

	K_1	K_2	K_3	K_4
A_1	1	3	2	2
A_2	2	3	1	2
A_3	2	2	2	2
A_4	3	2	2	1
A_5	3	2	1	2
A_6	3	1	2	2
A_7	5	1	1	1

	Критерий	Значения	Ранг шкалы
K_1	Цена, у.е.	$\leq$ 27 000 28 000 – 32 000 33 000 – 37 000 38 000- 42 000 43 000 – 47 000	5 4 3 2 1
K_2	Комфортность	Высокая Средняя Низкая	3 2 1
K_3	Максимальная скорость, км/ч	$\geq$ 250 < 250	2 1
K_4	Внешний вид	Хороший Приемлемый	2 1

Применяем метод ELECTRE.

Пусть веса $w_1 = 5; w_2 = 3; w_3 = 1; w_4 = 1$. При сравнении альтернатив A$_1$ и A$_6$ имеем $I_{16}^{+} = \{2\}$, $I_{16}^{-} = \{1\}$, $I_{16}^{=} = \{3,4\}$. Отсюда индекс согласия для этой пары:

$$c_{16} = \frac{\sum\limits_{i \in I_{16}^{+}} w_i + 0{,}5 \sum\limits_{i \in I_{16}^{=}} w_i}{\sum\limits_{i=1}^{4} w_i} = \frac{3 + 0{,}5(1+1)}{10} = 0{,}4$$

Аналогично вычисляются остальные индексы согласия.

В результате матрица индексов согласия имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} - & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & - & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}35 & 0{,}45 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & - & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}55 & 0{,}6 & 0{,}7 & - & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}55 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}5 & - & 0{,}7 & 0{,}45 \\ 0{,}6 & 0{,}65 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}3 & - & 0{,}35 \\ 0{,}5 & 0{,}55 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}55 & 0{,}65 & - \end{pmatrix}$$

	K$_1$	**K$_2$**	**K$_3$**	**K$_4$**
A$_1$	1	3	2	2
A$_2$	2	3	1	2
A$_3$	2	2	2	2
A$_4$	3	2	2	1
A$_5$	3	2	1	2
A$_6$	3	1	2	2
A$_7$	5	1	1	1

Для вычисления индексов несогласия зададимся значениями «протестных» констант для критериев. Пусть $h_1 = 0,2; h_2 = 0,2; h_3 = 0,25; h_4 = 0,6$.

В качестве примера рассчитаем d_{16}, d_{24}.

Для пары альтернатив A_1, A_6 имеем $I_{16}^{-} = \{1\}$.

Различие по первому критерию составляет две ступени $\Delta_{16}^{1} = 2$, поэтому

$$d_{16}^{1} = \Delta_{16}^{1} \cdot h_1 = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \quad \Rightarrow \quad d_{16} = \max d_{16}^{1} = \max\{0,4\} = 0,4$$

Для пары альтернатив A_2, A_4 имеем $I_{24}^{-} = \{1,3\}$.

Различие по первому и третьему критерию составляет одну ступень $\Delta_{24}^{1} = \Delta_{24}^{3} = 1$, поэтому

$$d_{24}^{1} = \Delta_{24}^{1} \cdot h_1 = 1 \cdot 0,2 = 0,2 \quad \Rightarrow \quad d_{24} = \max\{d_{24}^{1}, d_{24}^{3}\} = \max\{0,2; 0,25\} = 0,25$$

$$d_{24}^{3} = \Delta_{24}^{3} \cdot h_3 = 1 \cdot 0,25 = 0,25$$

Итоговая матрица индексов несогласия:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} - & 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,8 \\ 0,25 & - & 0,25 & 0,25 & 0,2 & 0,25 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & - & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 & - & 0,6 & 0,6 & 0,4 \\ 0,25 & 0,2 & 0,25 & 0,25 & - & 0,25 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & - & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,25 & 0,6 & 0,6 & - \end{pmatrix}$$

	K_1	K_2	K_3	K_4
A_1	1	3	2	2
A_2	2	3	1	2
A_3	2	2	2	2
A_4	3	2	2	1
A_5	3	2	1	2
A_6	3	1	2	2
A_7	5	1	1	1

Для построения результирующего отношения относительного доминирования установим пороговые значения p=0,6 и q=0,2 (пороги несравнимости по согласию и несогласию). Затем каждый элемент матрицы индексов согласия **C** и несогласия **D** сравнивается с порогами. Как было выше сказано, при доминировании альтернативы j над k: $c_{jk} \geq p, \quad d_{jk} \leq q$.

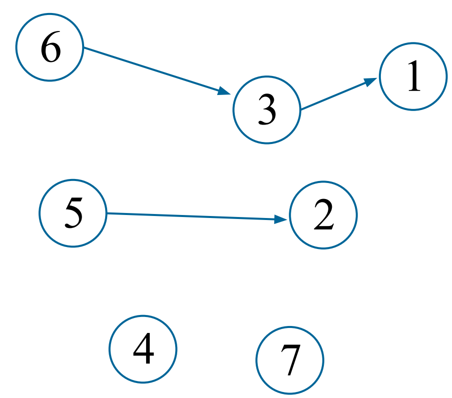
Отношение относительного доминирования отображается графом, в котором дуги направлены в сторону доминируемых вершин.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} - & 0,3 & 0,4 & 0,45 & 0,45 & 0,4 & 0,5 \\ 0,7 & - & 0,6 & 0,4 & 0,4 & 0,35 & 0,45 \\ 0,6 & 0,4 & - & 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,55 & 0,6 & 0,7 & - & 0,5 & 0,6 & 0,4 \\ 0,55 & 0,6 & 0,7 & 0,5 & - & 0,7 & 0,45 \\ 0,6 & 0,65 & 0,6 & 0,4 & 0,3 & - & 0,35 \\ 0,5 & 0,55 & 0,5 & 0,6 & 0,55 & 0,65 & - \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} - & 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,8 \\ 0,25 & - & 0,25 & 0,25 & 0,2 & 0,25 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & - & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 & - & 0,6 & 0,6 & 0,4 \\ 0,25 & 0,2 & 0,25 & 0,25 & - & 0,25 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & - & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,25 & 0,6 & 0,6 & - \end{pmatrix}$$

Из матриц C и D при заданных p=0,6 и q=0,2 имеем бинарные отношения:

$$A_3 \succ A_1, A_6 \succ A_3, A_5 \succ A_2.$$



Ярус 0 = {6, 5, 4, 7}, ярус 1 = {2, 3}, ярус 2 = {1}.

В ядро входят альтернативы 4, 5, 6, 7, а также 1, которая включается в ядро согласно п. 2 алгоритма построения ядра.

При $p=0,7$ и $q=0,2$ в ядро входят все альтернативы 1-7.

В случае $p=0,6$ и $q=0,25$ ядро составят 1, 4, 5, 7.

При $p=0,5$ и $q=0,25$ ядро уже составят 5 и 7.

Таким образом, увеличение q и уменьшение p приводят к сокращению альтернатив в ядре.

Подведём итоги. Итак, от ЛПР в процессе реализации метода ELECTRE требуется получить

- веса критериев;
- цены перехода из класса в класс («протестные» константы);
- пороги согласия p и несогласия q.

Как видим из примеров, результат зависит от того, какие значения p и q будут выбраны. При этом ЛПР сразу назначить p и q разумным образом довольно сложно. С этим связан недостаток этого метода.

Рекомендуется в качестве начальных значений выбирать $p=1$ и $q \approx 0$, которые затем постепенно меняются. По графу доминирования ЛПР отслеживает как изменяется состав ядра. Когда изменения параметров p и q начинают приводить к противоречиям, процесс останавливается, и ЛПР выбирает наиболее приемлемый для себя вариант значений p и q из рассмотренных ранее.