ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ

БАРЫНИНА МАРИНА ВИТАЛЬЕВНА

Комбинаторика

Комбинаторика *– это раздел математики, в котором изучаются вопросы выбора или расположения элементов множества в соответствии с заданными правилами.*

Комбинаторные соединения

- **Перестановки**

1. Перестановки без повторений
2. Перестановки с повторениями

- **Размещения**

1. Размещения без повторений
2. Размещения с повторениями

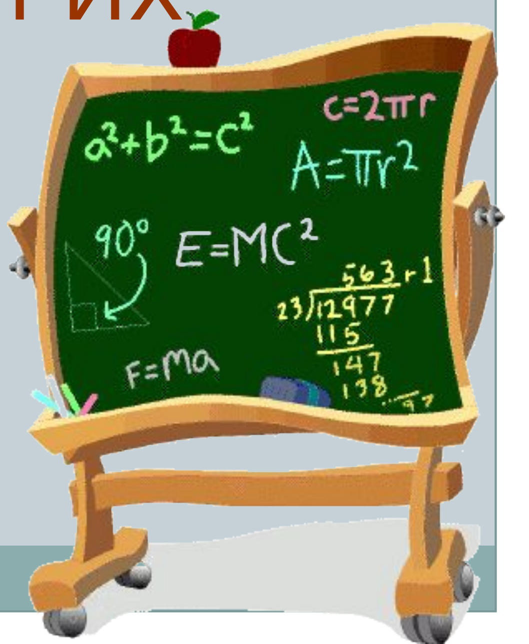
- **Сочетания**

1. Сочетания без повторений
2. Сочетания с повторениями

Перестановки

Перестановки – соединения, которые можно составить из n элементов, меняя всеми возможными способами их порядок.

Формула: $P_n = n!$



Пример

Сколькими способами могут 8 человек встать в очередь к театральной кассе?

Решение задачи:

Существует 8 мест, которые должны занять 8 человек.

На первое место может встать любой из 8 человек, т.е. способов занять первое место – 8.

После того, как один человек встал на первое место, осталось 7 мест и 7 человек, которые могут быть на них размещены, т.е. способов занять второе место – 7. Аналогично для третьего, четвертого и т.д. места.

Используя принцип умножения, получаем произведение Такое произведение обозначается как 8! (читается 8 факториал) и называется перестановкой Р8.

Ответ: Р8 = 8!

Перестановки с повторениями

Всякое размещение с повторениями, в котором элемент $\mathbf{a_1}$ повторяется $\mathbf{k_1}$ раз, элемент $\mathbf{a_2}$ повторяется $\mathbf{k_2}$ раз и т.д. элемент $\mathbf{a_n}$ повторяется $\mathbf{k_n}$ раз, где $\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \ldots, \mathbf{k_n}$ — данные числа, называется перестановкой с повторениями порядка

$\mathbf{m = k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$, в которой данные элементы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ повторяются соответственно $\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \ldots, \mathbf{k_n}$ раз.

Перестановки с повторениями

Теорема. Число различных перестановок с повторениями из элементов $\{a_1, \ldots, a_n\}$, в которых элементы $a_1, \ldots, a_n$ повторяются соответственно $k_1, \ldots, k_n$ раз, равно

$$\bar{P} = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} = \frac{m!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}$$

Пример

Слова и фразы с переставленными буквами называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова «макака»?

Решение

Всего в слове «МАКАКА» 6 букв ($m=6$).

Определим сколько раз в слове используется каждая буква:

«М» - 1 раз ($k_1=1$)

«А» - 3 раза ($k_2=3$)

«К» - 2 раза ($k_3=2$)

$$P = \frac{m!}{k_1!\ k_2!\ \ldots k_n!} \Rightarrow P_{1,3,2} = \frac{6!}{1!\ 3!\ 2!} = \frac{4*5*6}{2} = 60.$$

Размещения

Размещением из n элементов по k называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из n элементов.

Два размещения из n $k \le n$ элементов считаются различными, если они отличаются самими элементами или порядком их расположения.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))$$

Пример

Сколькими способами из 40 учеников класса можно выделить актив в следующем составе: староста, физорг и редактор стенгазеты?

Решение:

Требуется выделить упорядоченные трехэлементные подмножества множества, содержащего 40 элементов, т.е. найти число размещений без повторений из 40 элементов по 3.

$$A_{40}^{3}=\frac{40!}{37!}=38*39*40=59280$$

Размещения с повторениями

- **Размещения с повторениями** – соединения, содержащие **n** элементов, выбираемых из элементов **m** различных видов $(n \le m)$ и отличающиеся одно от другого либо составом, либо порядком элементов.
- **Их количество** в предположении неограниченности количества элементов каждого вида равно

$$\bar{A}_m^n = m^n$$

Пример

В библиотеку, в которой есть много одинаковых учебников **по десяти предметам**, пришло **5 школьников**, каждый из которых хочет взять учебник. Библиотекарь записывает в журнал по порядку названия (без номера) взятых учебников без имен учеников, которые их взяли. Сколько разных списков в журнале могло появиться?

Пример

Так как учебники по каждому предмету одинаковые, и библиотекарь записывает лишь название (без номера),то <u>список – размещение с повторением</u>, число элементов исходного множества равно 10, а количество позиций – 5.

Тогда количество разных списков равно

$$\bar{A}_{10}^{5} = 10^5 = 100000.$$

<u>Ответ</u>: 100000

Сочетания

Сочетания – соединения, содержащие по m предметов из n, различающихся друг от друга по крайней мере одним предметом

Сочетания – *конечные множества, в которых порядок не имеет значения.*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример

Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из класса, в котором 25 учеников?

Решение:

m = 2 (необходимое количество дежурных)

n = 25 (всего учеников в классе)

$$C_{25}^{2} = \frac{25!}{2!\,(25-2)!} = \frac{24*25}{2} = 300$$

Сочетания с повторениями

<u>Определение</u>

Сочетаниями с повторениями из m по n называют соединения, состоящие из n элементов, выбранных из элементов m разных видов, и отличающиеся одно от другого хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из m по n обозначают

$$C_m^n$$

Сочетания с повторениями

Если из множества, содержащего *n* элементов, выбирается поочередно *m* элементов, причём выбранный элемент каждый раз возвращается обратно, то количество способов произвести неупорядоченную выборку – число ***сочетаний с повторениями*** – составляет

$$C_m^n = P_{m-1,\, n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}$$

Пример

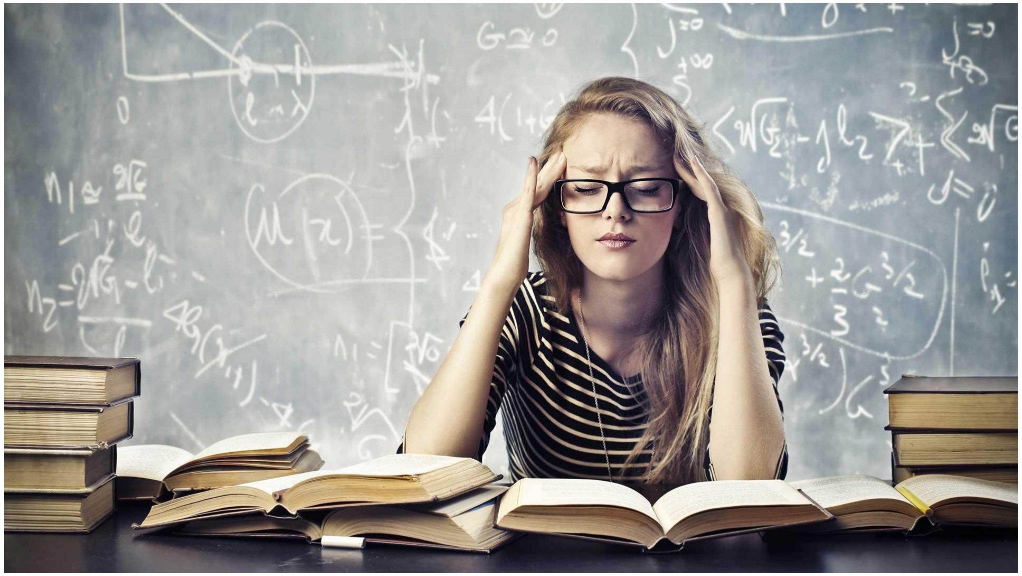
Задача №1

Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в распоряжении имеются 4 сорта пирожных?

Решение:

$$C_4^7 = \frac{(4+7-1)!}{(4-1)!4!} = 120$$

Закрепление знаний



Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день среди **семи** учащихся группы в течение 7 дней (каждый должен отдежурить один раз)?

Решение

По формуле перестановки находим:

P(7)= **7! =** 1x2x3x…x6x7= 5040

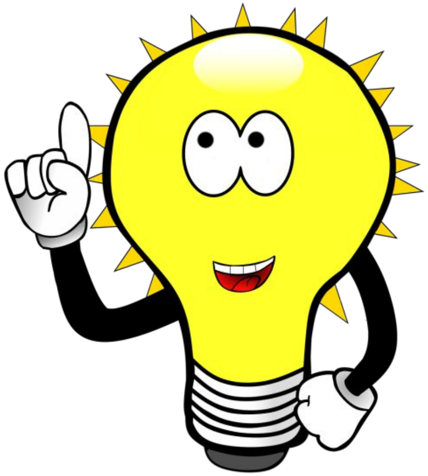
Ответ: 5040 способа.

Телефонный номер состоит из 7 цифр. Какое наибольшее число звонков неудачник-Петя может совершить прежде, чем угадает правильный номер.

Решение

Т.к. цифры могут повторяться, то всего возможно разных номеров $\bar{A}_{10}^{7} = 10^7$
Если Петя невезучий, он должен будет звонить 10 миллионов раз.

Ответ: 10000000



Сколькими способами можно делегировать троих студентов на межвузовскую конференцию из 9 членов научного общества?

Решение

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = \frac{9!}{3!*6!} = \frac{6!*7*8*9}{3!*6!} = 84$$

Домашнее задание

Выучить конспект и формулы

Спасибо за внимание