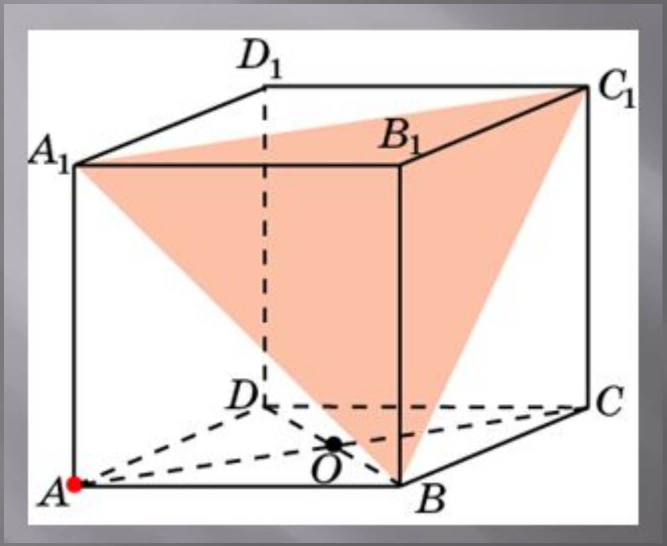
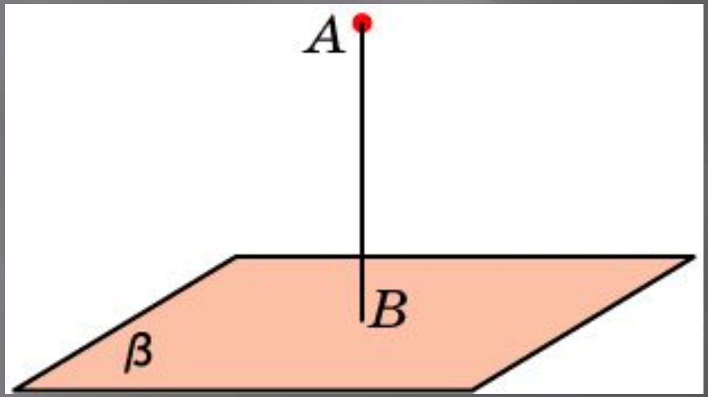
ЗАДАНИЕ 13
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.



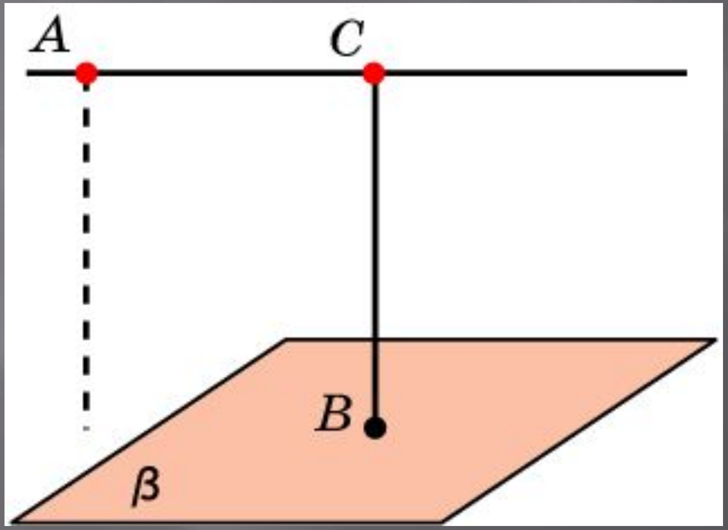
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Расстоянием от точки до плоскости в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.



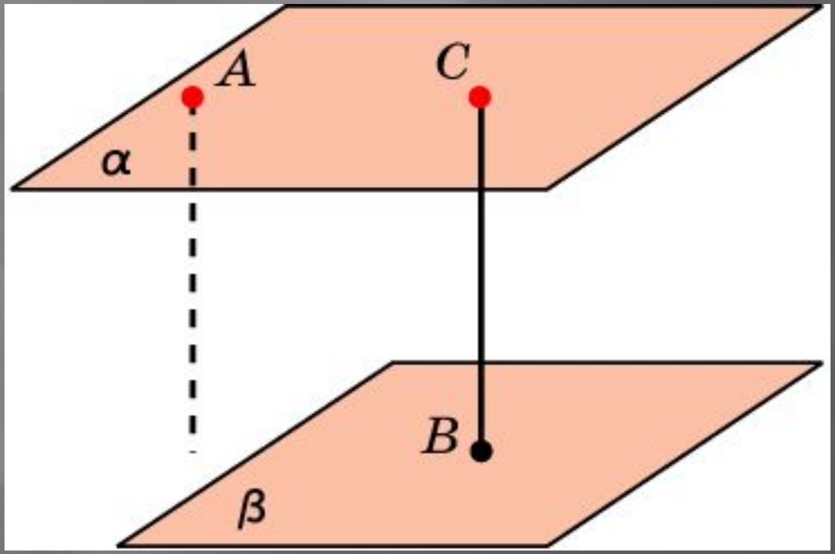
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ 2

Иногда основание перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость, не попадает на участок плоскости, изображенный на рисунке. В этом случае можно воспользоваться тем, что расстояние от точки до плоскости равно расстоянию от прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной плоскости, до этой плоскости. При этом перпендикуляр, опущенный из любой точки этой прямой на данную плоскость, будет равен расстоянию от исходной точки до плоскости.



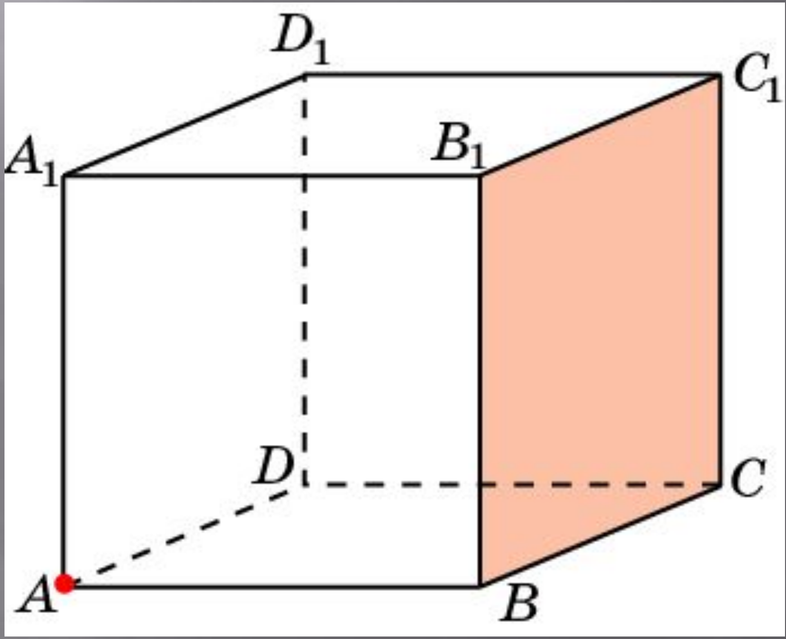
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ 3

Расстояние от точки до плоскости равно также расстоянию между параллельными плоскостями, одна из которых – данная плоскость, а другая проходит через данную точку. При этом перпендикуляр, опущенный из любой точки этой плоскости на данную плоскость, будет равен расстоянию от исходной точки до плоскости.



Куб 1

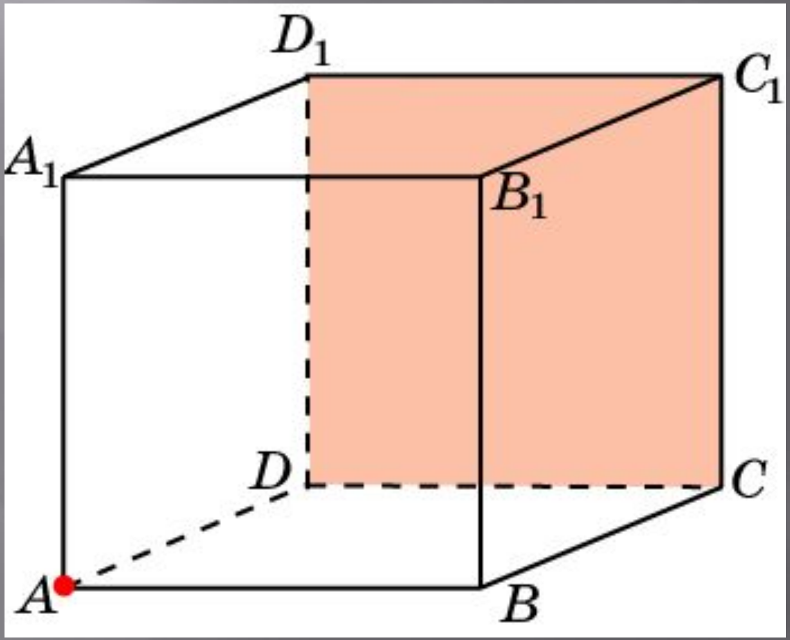
В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BCC_1.



Ответ: 1.

Куб 2

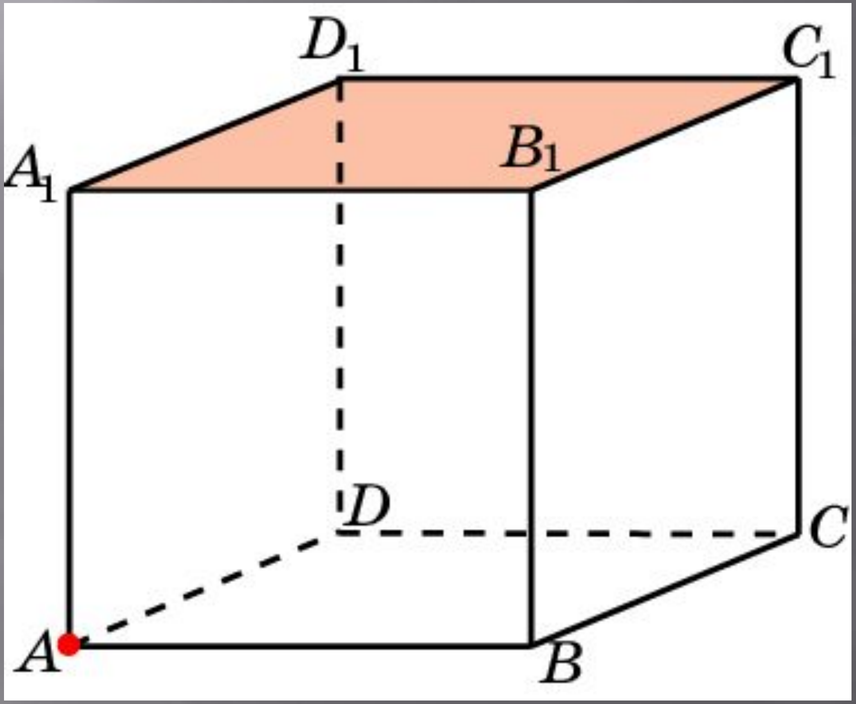
В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости CDD_1.



Ответ: 1.

Куб 3

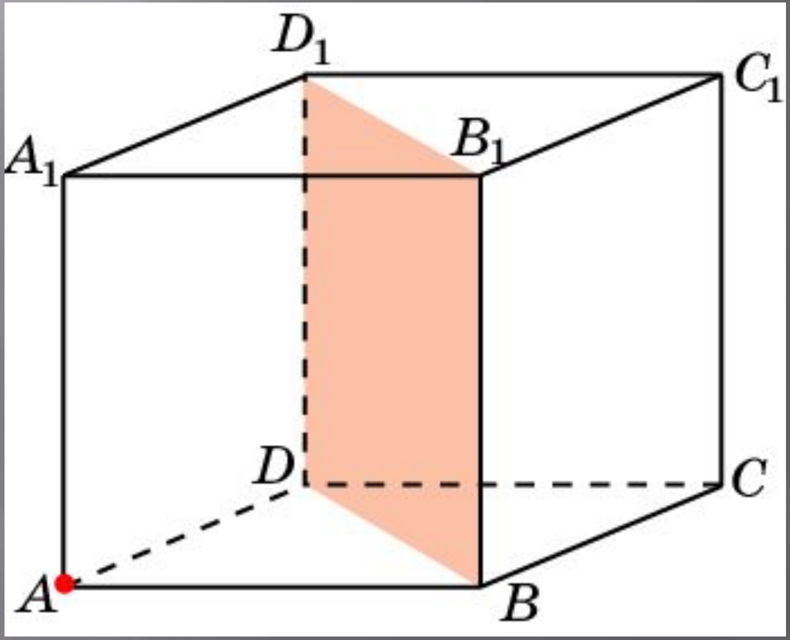
В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости $A_1B_1C_1$.



Ответ: 1.

Куб 4

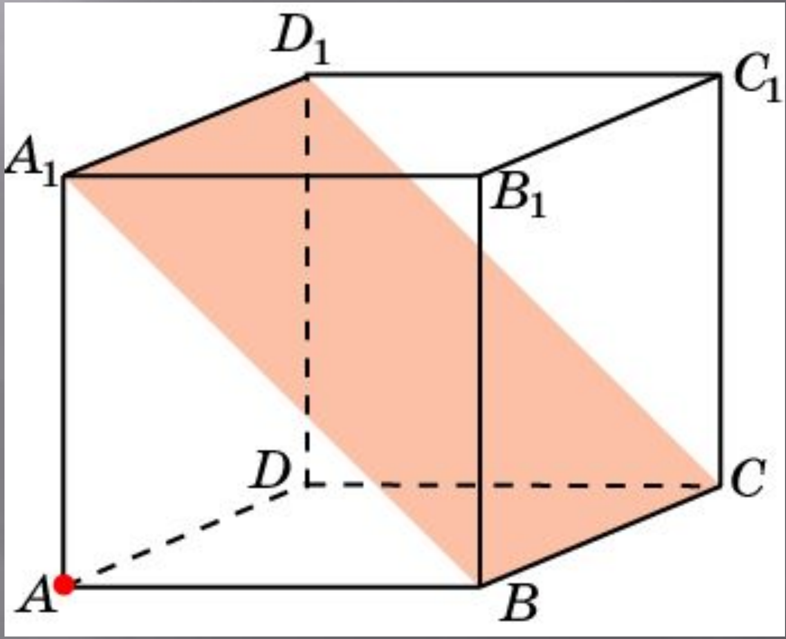
В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BB_1D_1.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Куб 5

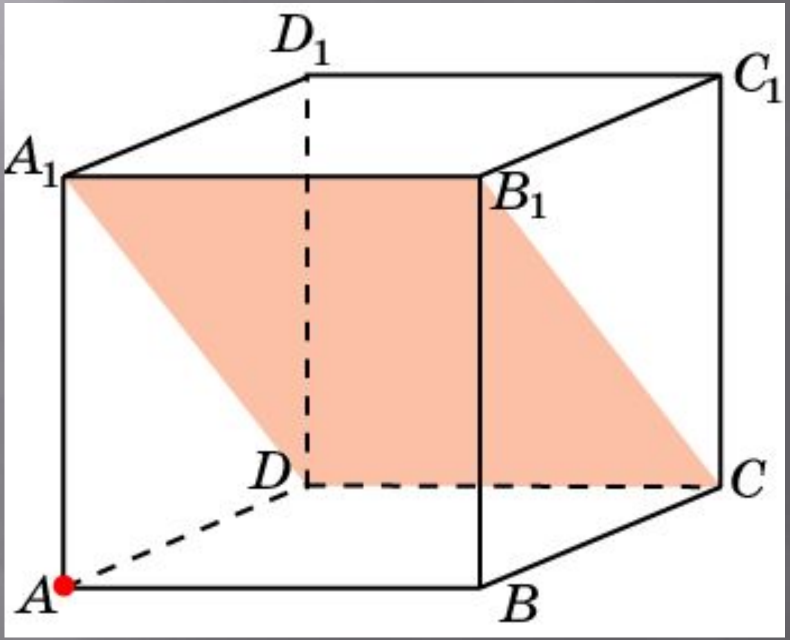
В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BCD_1.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Куб 6

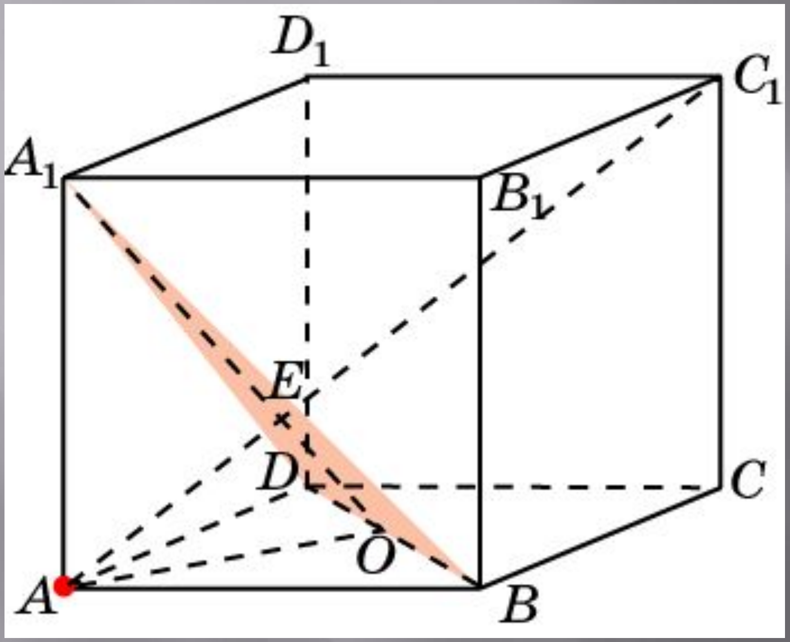
В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости CDA_1.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Куб 7

В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1.



Решение: Диагональ AC_1 куба перпендикулярна плоскости BDA_1. Обозначим O - центр грани $ABCD$, E - точка пересечения AC_1 и плоскости BDA_1. Длина отрезка AE будет искомым расстоянием. В прямоугольном треугольнике AOA_1 имеем

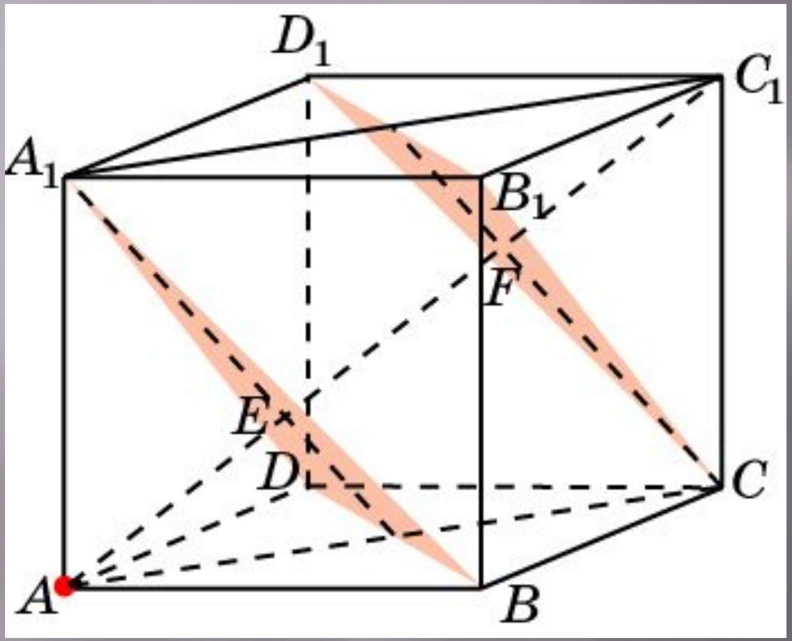
$$AA_1 = 1;\ AO = \frac{\sqrt{2}}{2};\ OA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Следовательно, $AE = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Куб 8

В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости CB_1D_1.



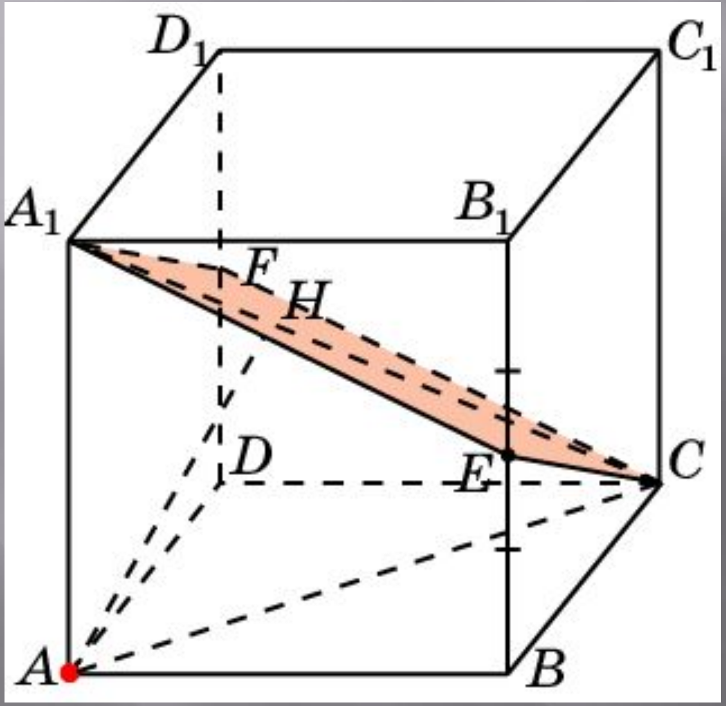
Решение: Плоскость CB_1D_1 параллельна плоскости BDA_1, и отстоит от вершины C_1 на расстояние $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(см. предыдущую задачу). Учитывая, что длина диагонали куба равна $\sqrt{3}$, получим, что искомое расстояние AF равно $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Куб 9

В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости, проходящей через вершины C, A_1 и середину ребра BB_1.



Решение: Сечением куба данной плоскостью является ромб CEA_1F. Искомое расстояние равно высоте AH прямоугольного треугольника ACA_1.

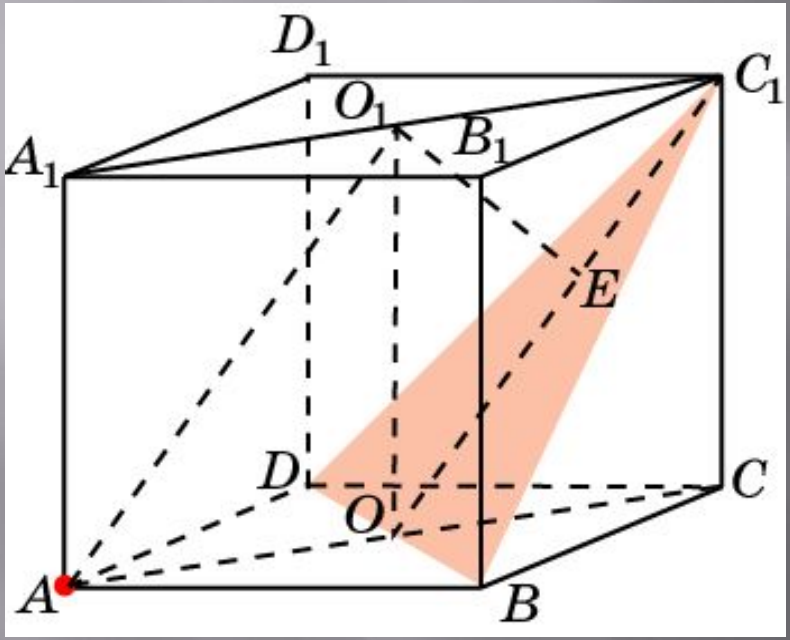
$AA_1 = 1$, $AC = \sqrt{2}$, $CA_1 = \sqrt{3}$.

Следовательно, $AH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Куб 10

В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BC_1D.



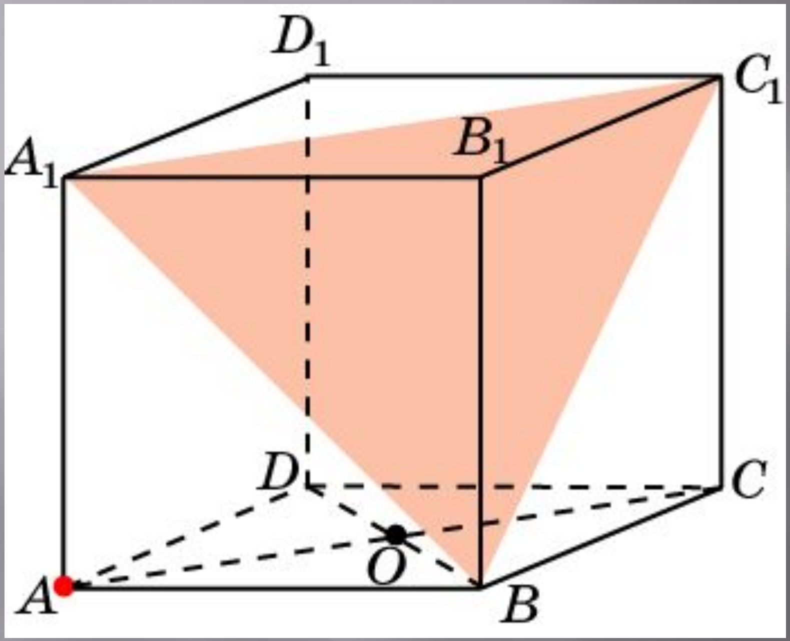
Решение: Обозначим O и O_1 – центры граней куба. Прямая AO_1 параллельна плоскости BC_1D и, следовательно, расстояние от точки A до плоскости BC_1D равно расстоянию от точки O_1 до этой плоскости, т.е. высоте O_1E треугольника OO_1C_1. Имеем $OO_1 = 1$; $O_1C = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $OC_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Следовательно, $O_1E = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Куб 11

В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BA_1C_1.

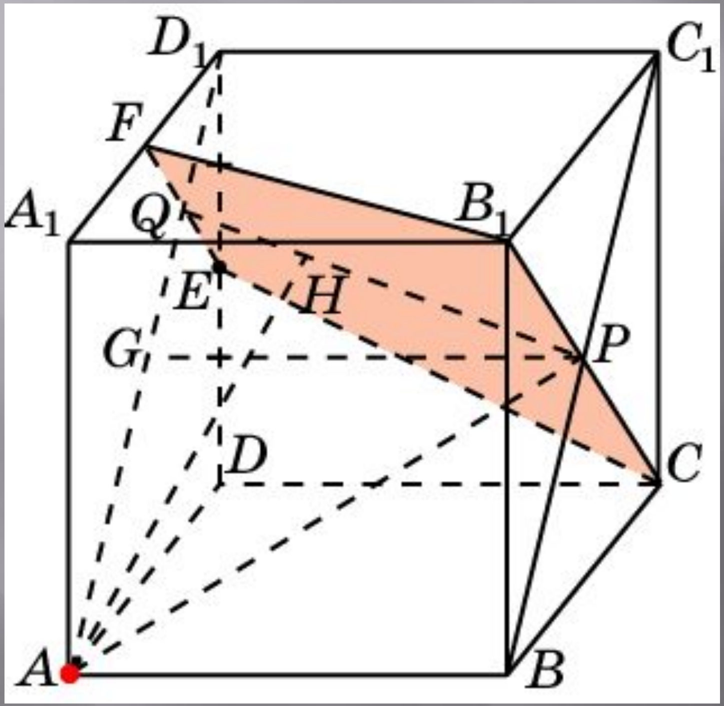


Решение: Прямая AC параллельна плоскости BA_1C_1. Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от центра O грани $ABCD$ куба до плоскости BA_1C_1. Из предыдущей задачи следует, что это расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Куб 12

В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости, проходящей через вершины C, B_1 и середину ребра DD_1.



Решение: Сечением куба данной плоскостью является равнобедренная трапеция $CEFB_1$. Плоскость ABC_1 перпендикулярна плоскости CEF. Искомое расстояние равно высоте AH треугольника APQ. Имеем

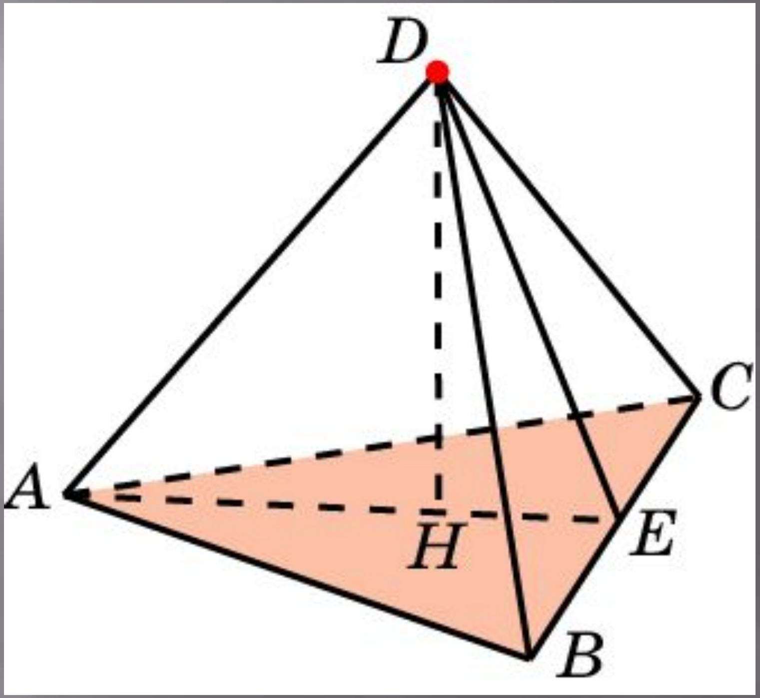
$$AP = \frac{\sqrt{6}}{2},\ AQ = \frac{3\sqrt{2}}{4},\ PQ = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Следовательно, высота AH равна высоте PG треугольника APQ и равна 1.

Ответ: 1.

Пирамида 1

В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите расстояние от вершины D до плоскости ABC.

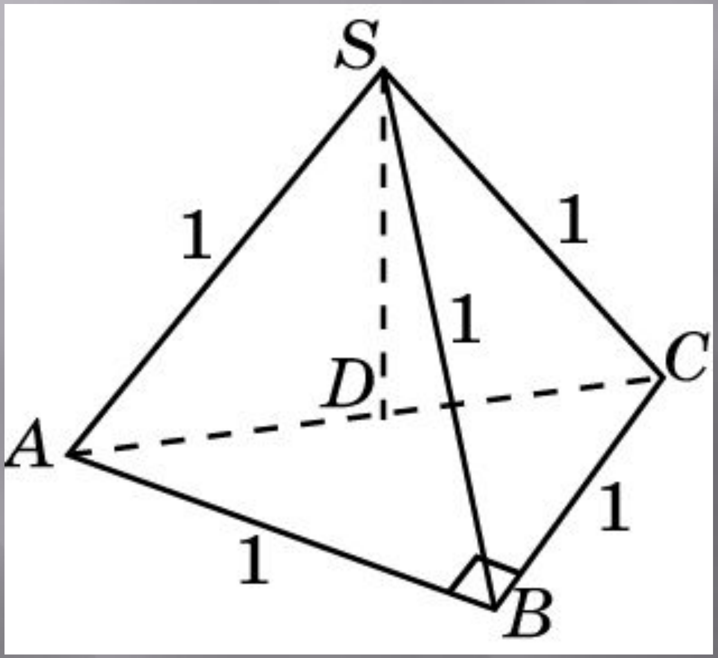


Решение. Обозначим E середину BC. Искомое расстояние равно высоте DH треугольника ADE, для которого $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $HE = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Следовательно, $DH = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Пирамида 2

Основанием треугольной пирамиде *SABC* является прямоугольный треугольник с катетами, равными 1. Боковые ребра пирамиды равны 1. Найдите расстояние от вершины *S* до плоскости *ABC*.

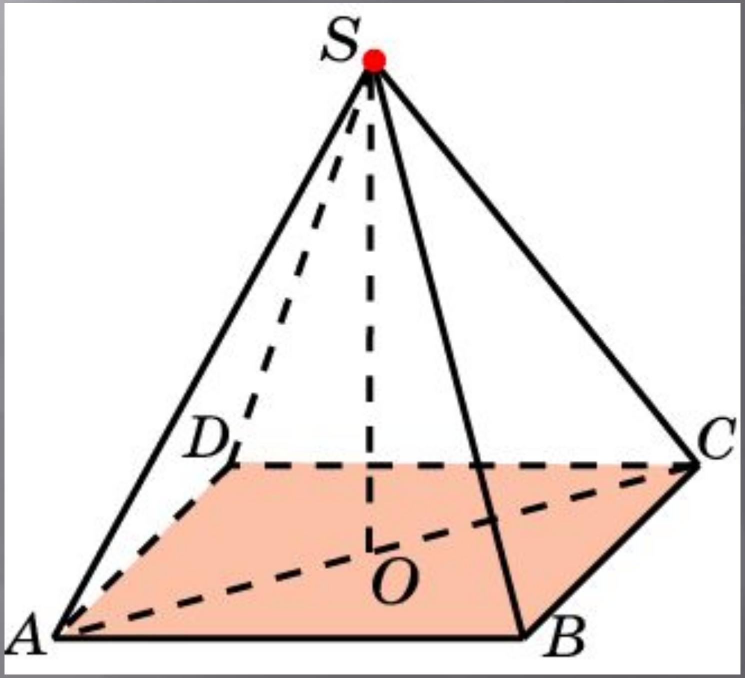


Решение. Из равенства боковых ребер следует, что основанием перпендикуляра, опущенного из вершины *S* на плоскость *ABC*, является центр окружности, описанной около треугольника *ABC*, т.е. середина *D* стороны *AC*. Треугольник *ACS* – прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, искомый перпендикуляр *SD* равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пирамида 3

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от вершины S до плоскости ABC.

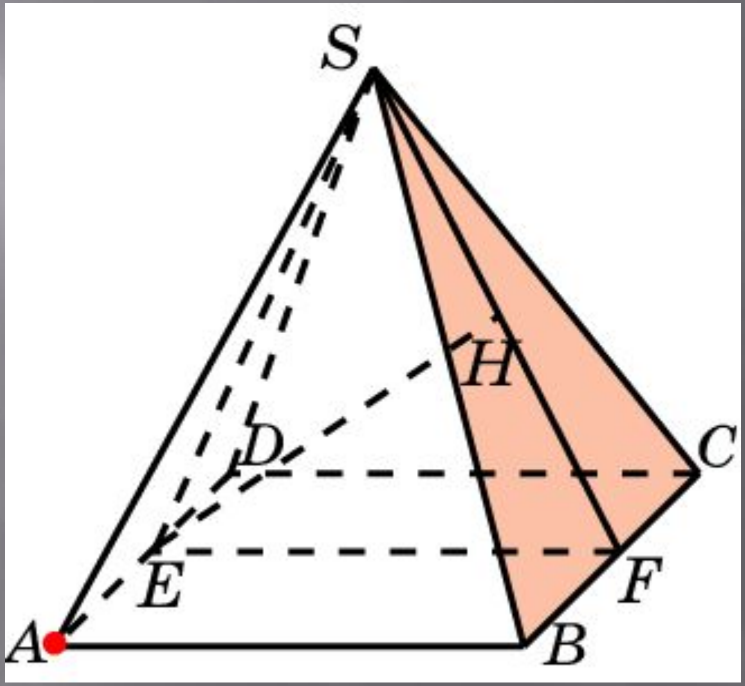


Решение. Искомое расстояние равно высоте SO треугольника SAC, в котором $SA = SC = 1$, $AC = \sqrt{2}$. Следовательно, $SO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пирамида 4

В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки *A* до плоскости *SBC*.

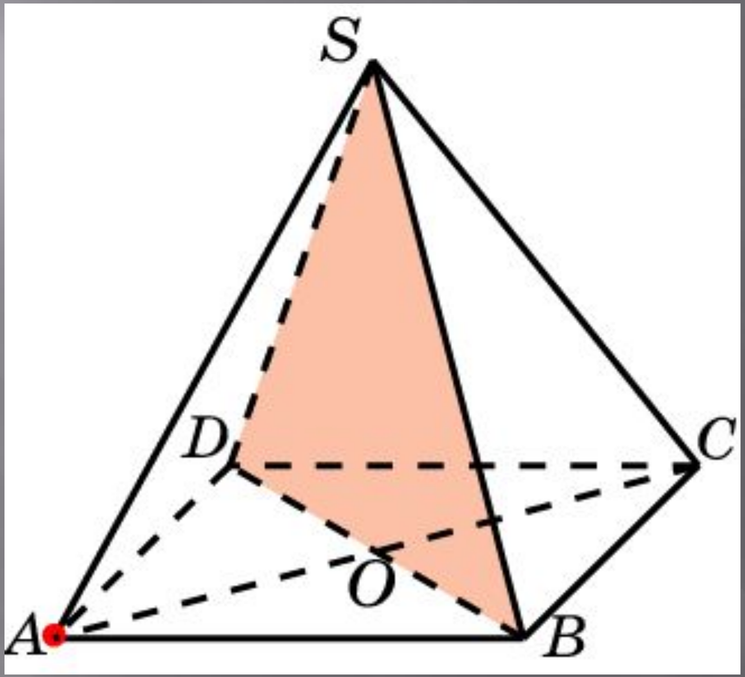


Решение. Обозначим *E*, *F* – середины ребер *AD*, *BC*. Искомое расстояние равно высоте *EH* треугольника *SEF*, в котором $SE = SF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $EF = 1$. Откуда, $EH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Пирамида 5

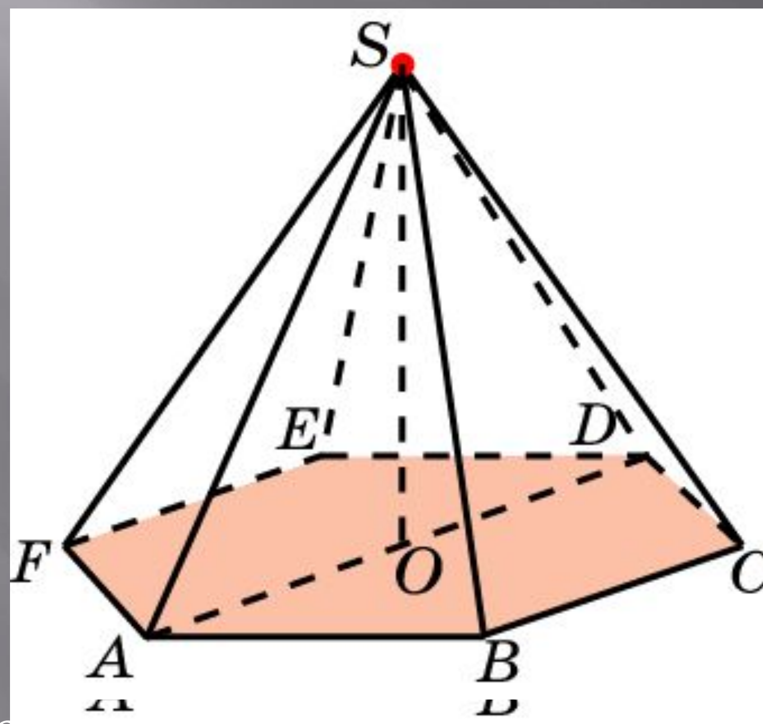
В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки *A* до плоскости *SBD*.



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пирамида 6

В правильной 6-ой пирамиде *SABCDEF*, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от вершины *S* до плоскости *ABC*.

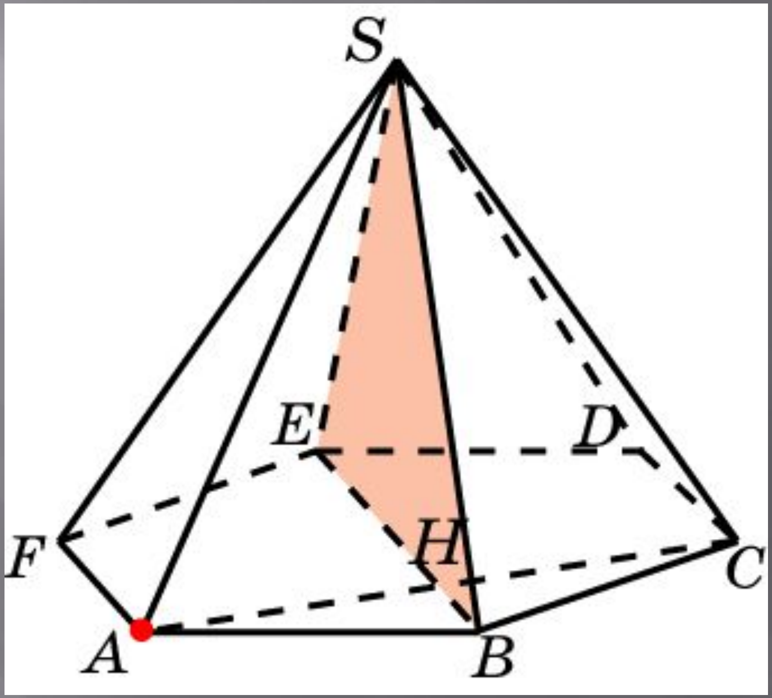


Решение. Искомое расстояние равно высоте *SO* равностороннего треугольника *SAD*. Оно равно $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Пирамида 7

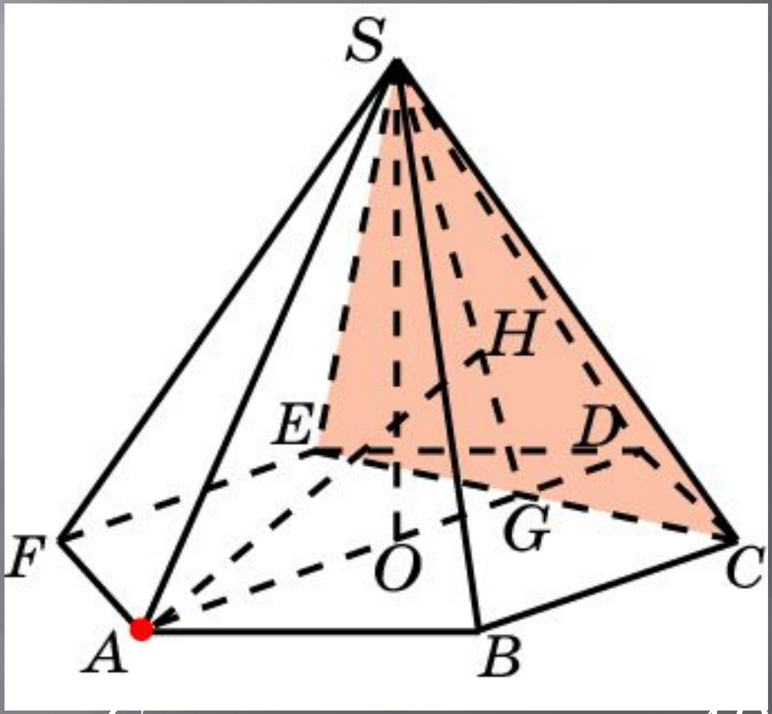
В правильной 6-ой пирамиде *SABCDEF*, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки *A* до плоскости *SBE*.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пирамида 8

В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки A до плоскости SCE.

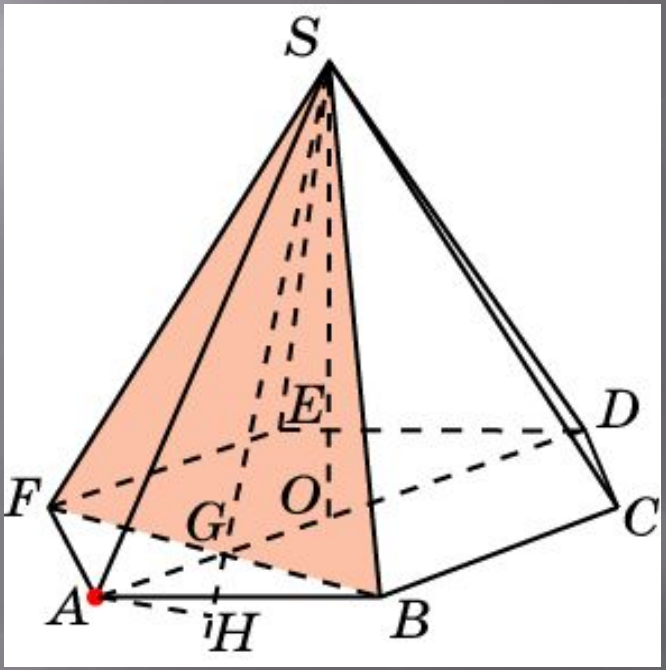


Решение. Обозначим G точку пересечения AD и CE. Искомое расстояние равно высоте AH треугольника SAG, в котором $SA = 2$, $SG = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $AG = \dfrac{3}{2}$, $SO = \sqrt{3}$. Откуда $AH = \dfrac{3\sqrt{39}}{13}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{39}}{13}$.

Пирамида 9

В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки A до плоскости SBF.

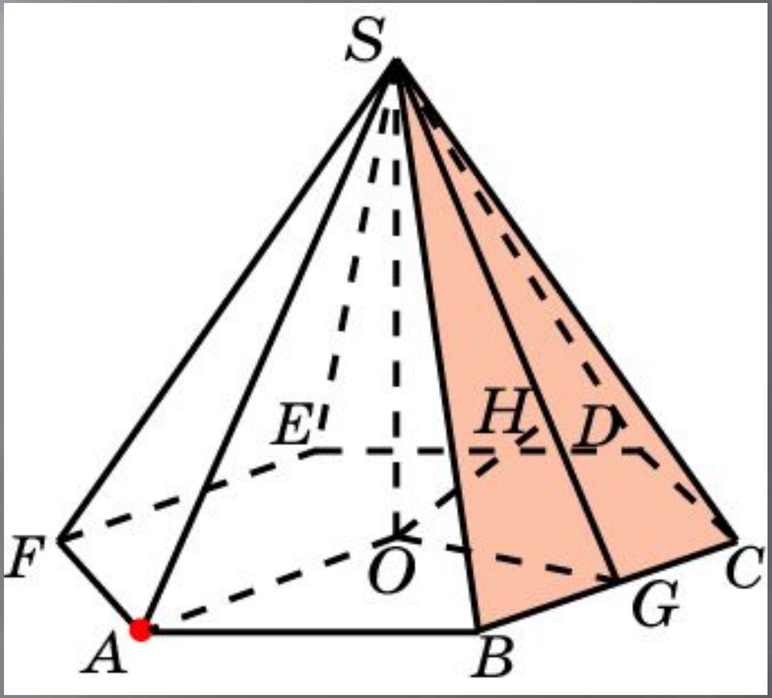


Решение. Обозначим G точку пересечения AD и BF. Искомое расстояние равно высоте AH треугольника SAG, в котором $SA = 2$, $SG = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $AG = \dfrac{1}{2}$, $SO = \sqrt{3}$. Откуда $AH = \dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

Пирамида 10

В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки A до плоскости SBC.

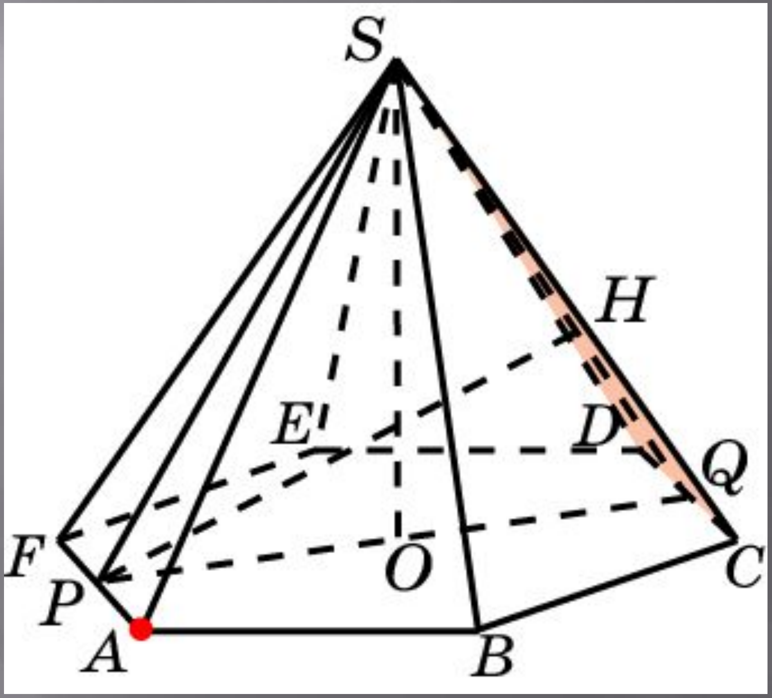


Решение. Пусть O – центр основания, G – середина ребра BC. Искомое расстояние равно высоте OH треугольника SOG, в котором $SO = \sqrt{3}.$, $OG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $SG = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$. Откуда $OH = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Пирамида 11

В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки A до плоскости SCD.

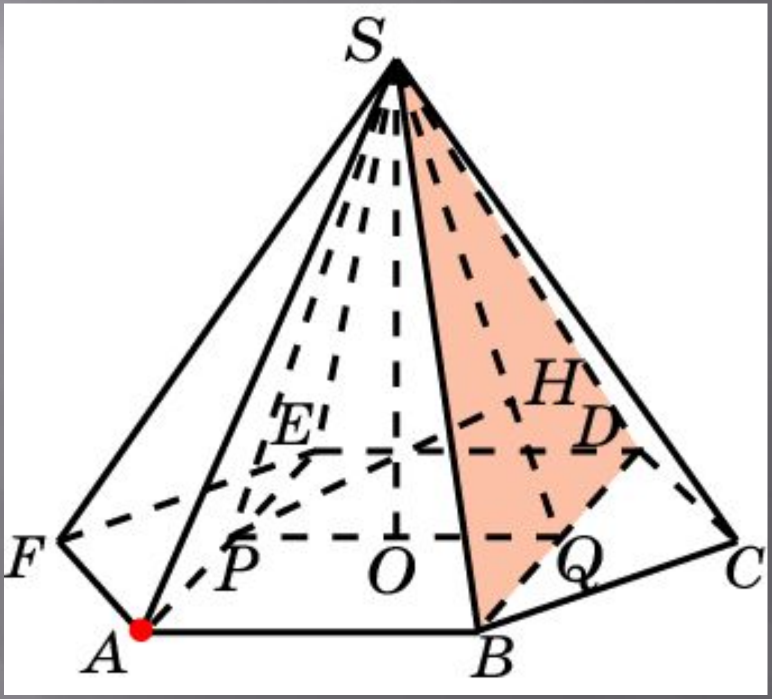


Решение. Пусть P, Q – середины ребер AF, CD. Искомое расстояние равно высоте PH треугольника SPQ, в котором $PQ = SO = \sqrt{3}$, $SP = SQ = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$. Откуда $PH = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$.

Пирамида 12

В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите расстояние от точки A до плоскости SBD.

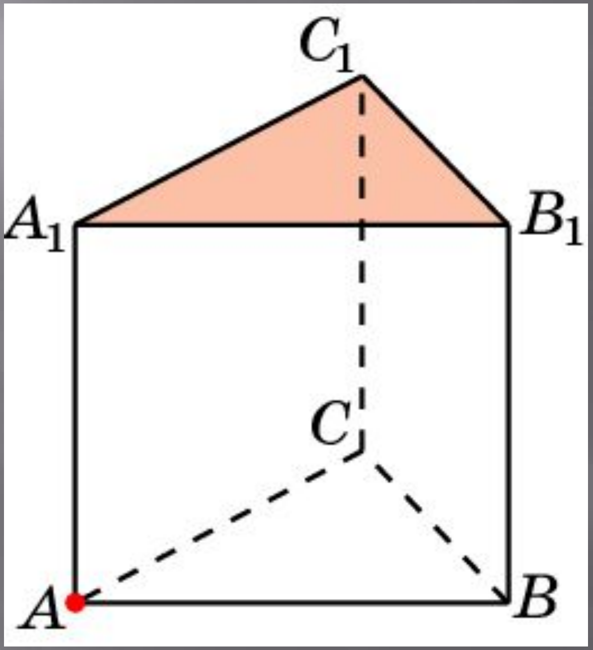


Решение. Пусть P, Q – середины отрезков AE, BD. Искомое расстояние равно высоте PH треугольника SPQ, в котором $PQ = 1$, $SP = SQ = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $SO = \sqrt{3}$. Откуда $PH = \dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

Призма 1

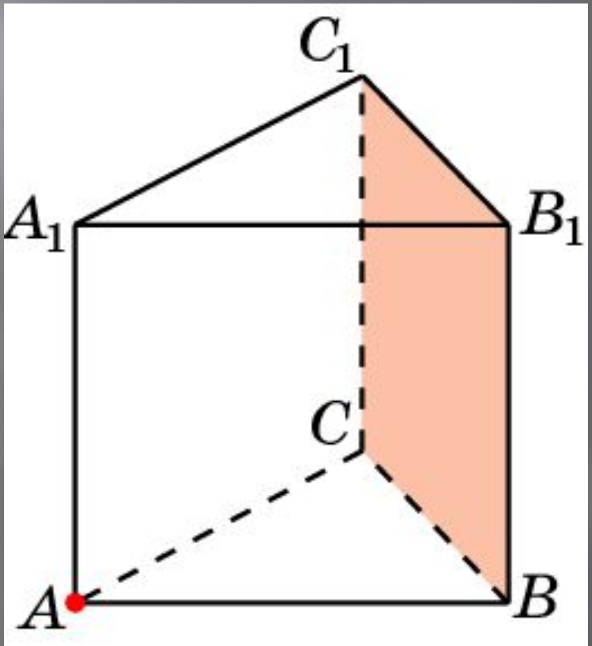
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точкой A и плоскостью $A_1B_1C_1$.



Ответ: 1.

Призма 2

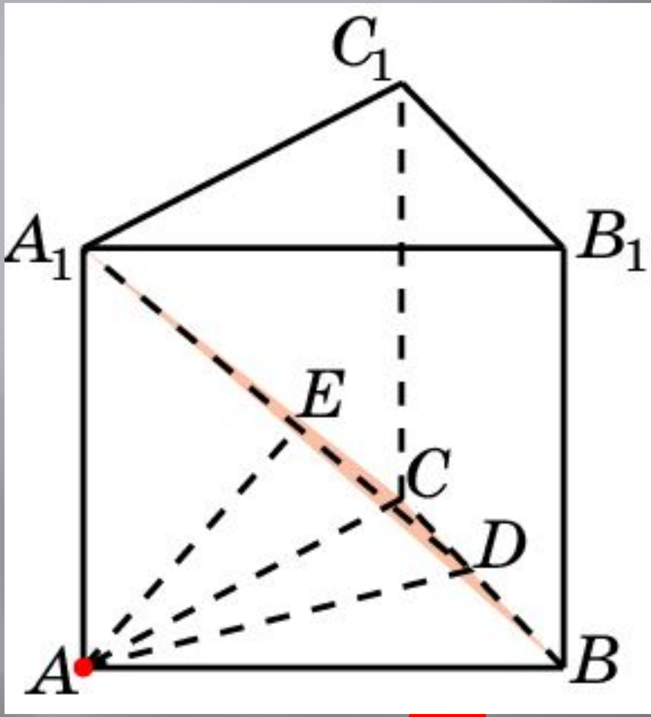
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точкой A и плоскостью BB_1C_1.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точкой A и плоскостью BCA_1.



Решение: Через точки A_1 и D – середину ребра BC, проведем прямую. Искомым расстоянием будет расстояние AE от точки A до этой прямой. В прямоугольном треугольнике ADA_1 имеем,

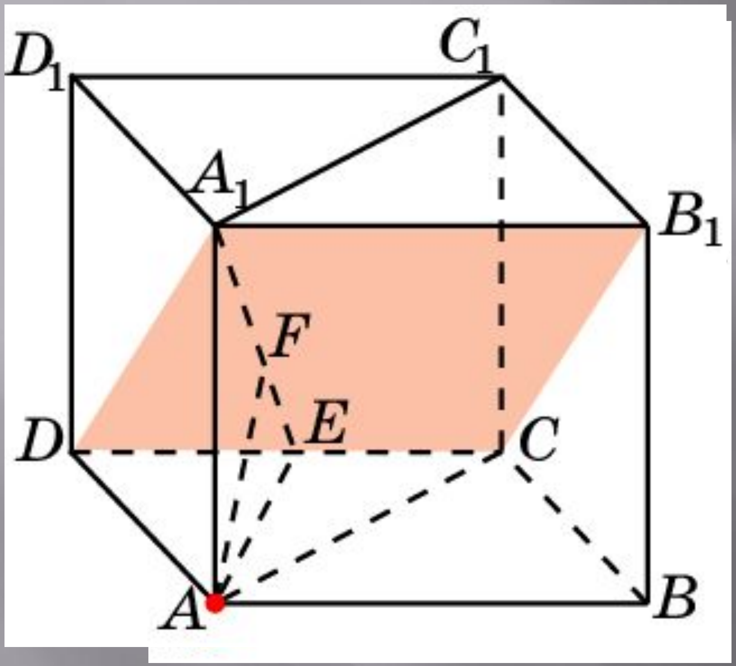
$$AA_1 = 1,\ AD = \frac{\sqrt{3}}{2},\ DA_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Следовательно, $AE = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Призма 4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точкой A и плоскостью A_1B_1C.

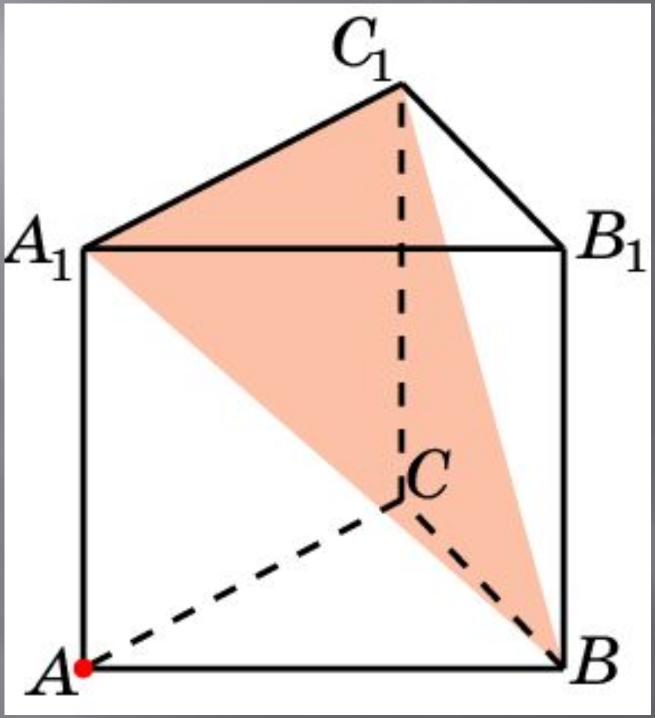


Решение: Достроим данную треугольную призму до четырехугольной. Искомым расстоянием будет расстояние от точки A_1 до плоскости CDA_1 в призме $A \ldots D_1$. Это расстояние мы нашли в предыдущей задаче. Оно равно $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Призма 5

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между точкой A и плоскостью A_1C_1B.

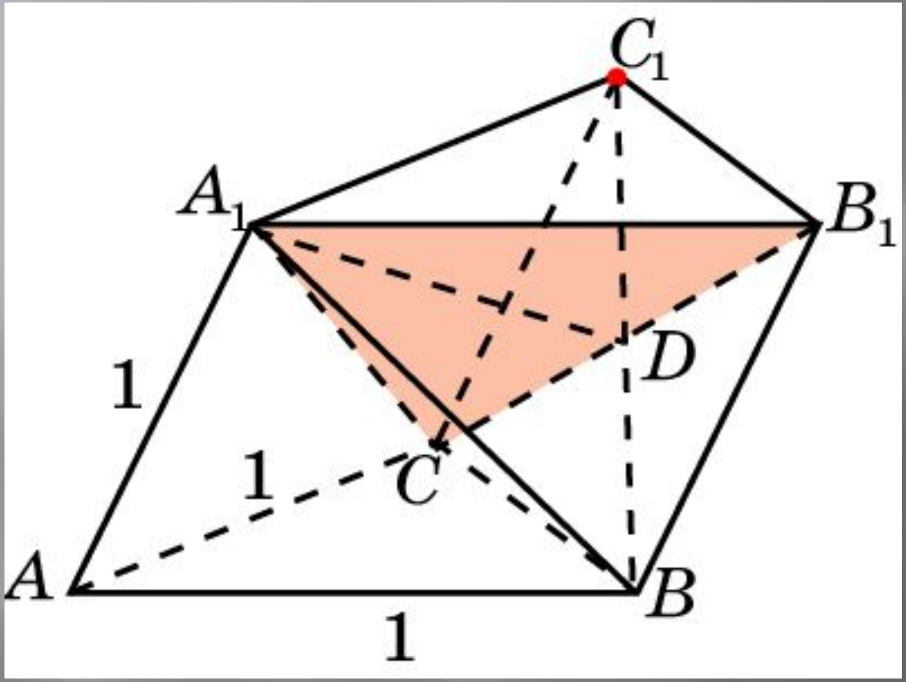


Решение: Искомое расстояние равно расстоянию от точки A до плоскости A_1B_1C из предыдущей задачи.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Призма 6

В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1, углы A_1AB и A_1AC равны 60°. Найдите расстояние от вершины C_1 до плоскости A_1B_1C.

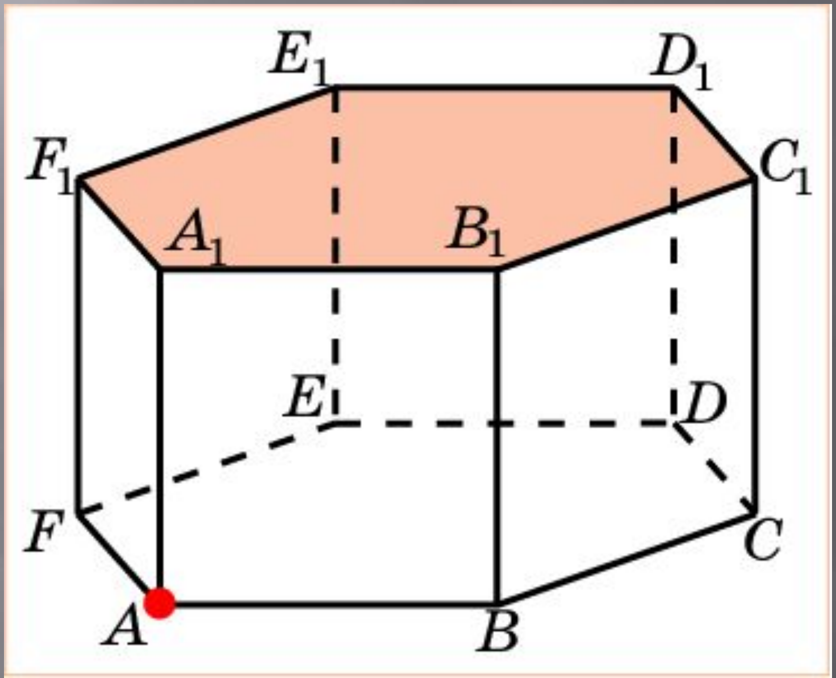


Решение. Пирамида $A_1BB_1C_1C$ – правильная с вершиной A_1, в основании которой квадрат. Следовательно, основанием перпендикуляра, опущенного из вершины C_1 на плоскость A_1B_1C, является середина D отрезка B_1C. Длина этого перпендикуляра равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Призма 7

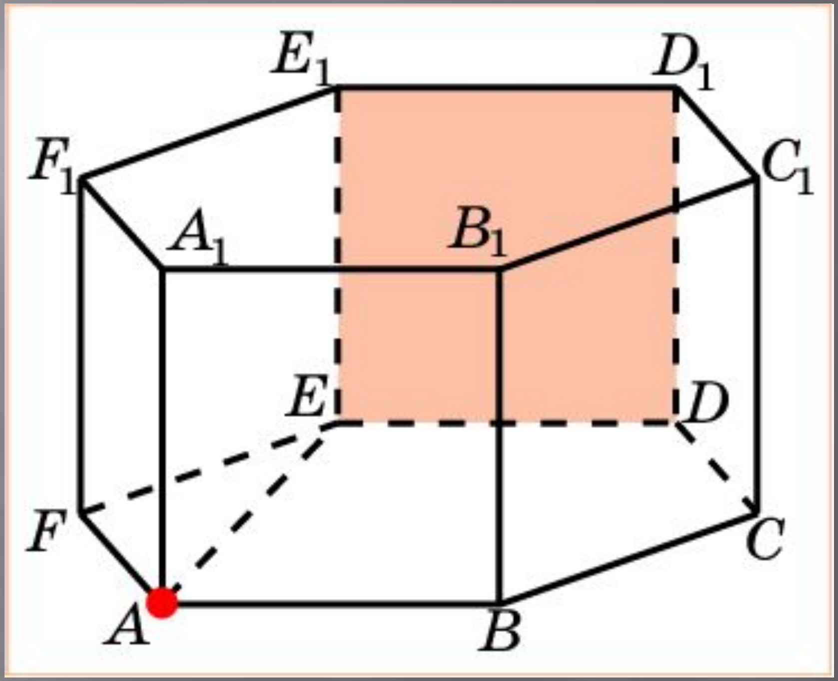
В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости $A_1B_1C_1$.



Ответ: 1.

Призма 8

В правильной 6-й призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости DEE_1.

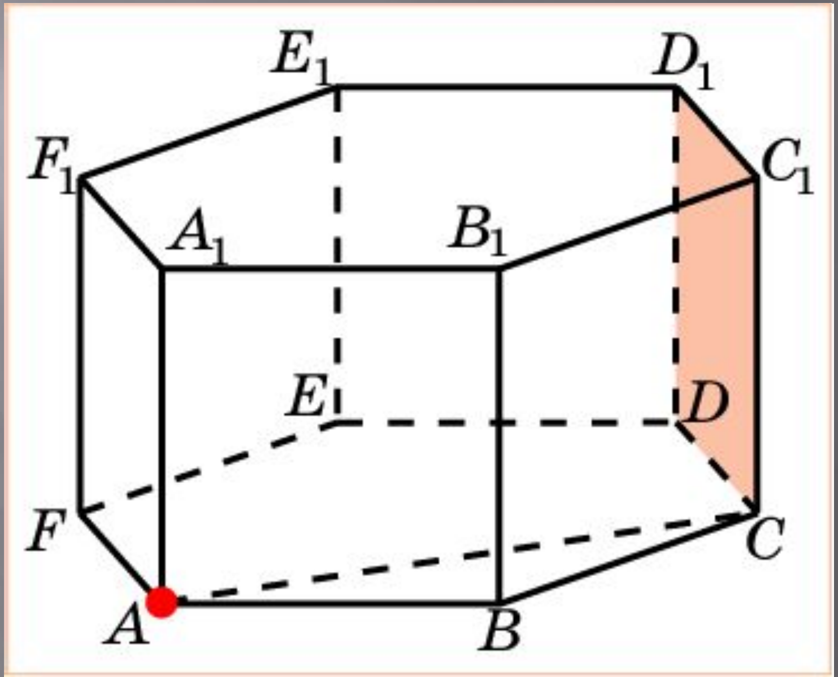


Решение: Искомым расстоянием является длина отрезка AE. Она равна $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Призма 9

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости CDD_1.

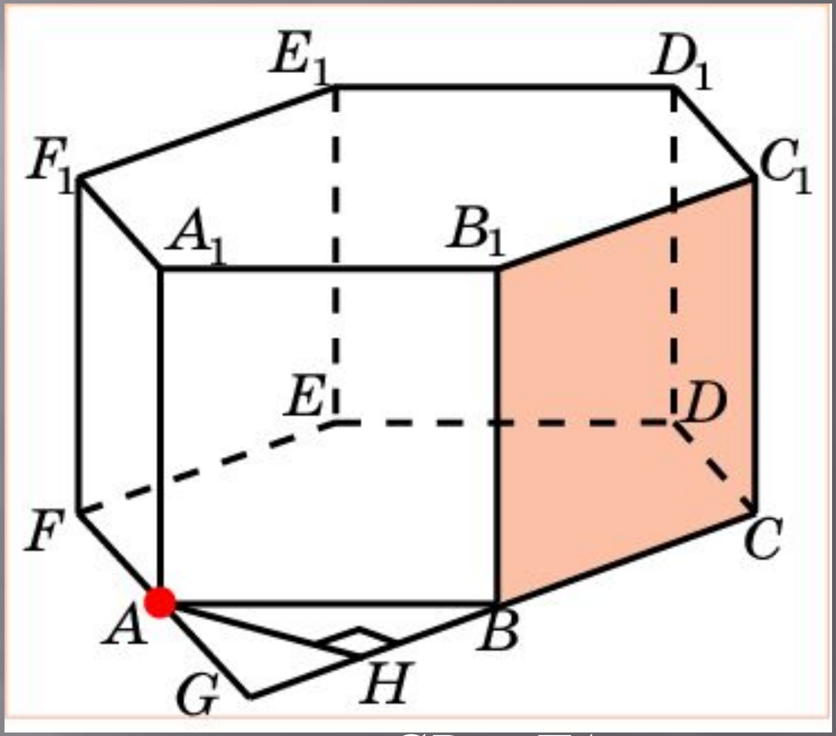


Решение: Искомым расстоянием является длина отрезка AC. Она равна $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Призма 10

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BCC_1.

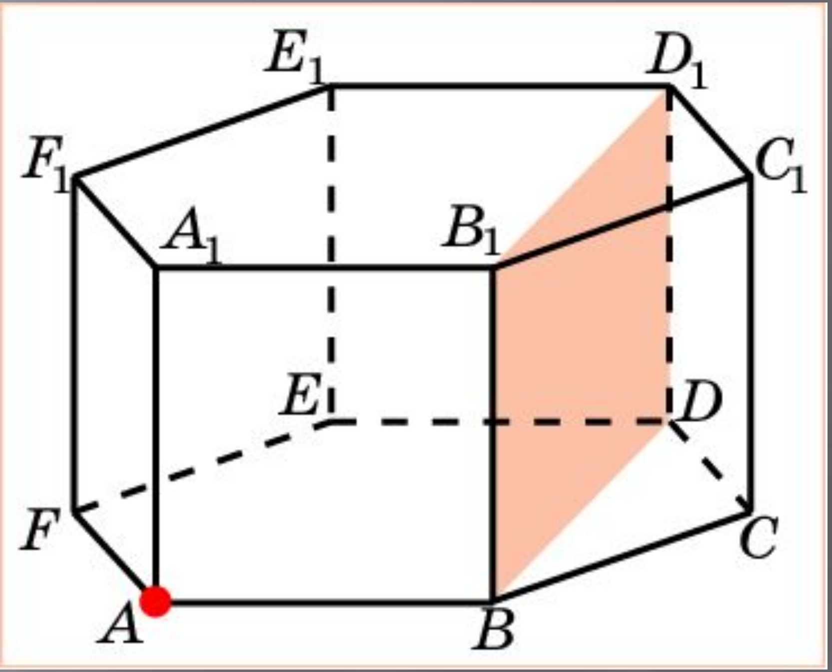


Решение: Продолжим отрезки CB и FA до пересечения в точке G. Треугольник ABG равносторонний. Искомым расстоянием является длина высоты AH треугольника ABG. Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 11

В правильной 6-й призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BDD_1.

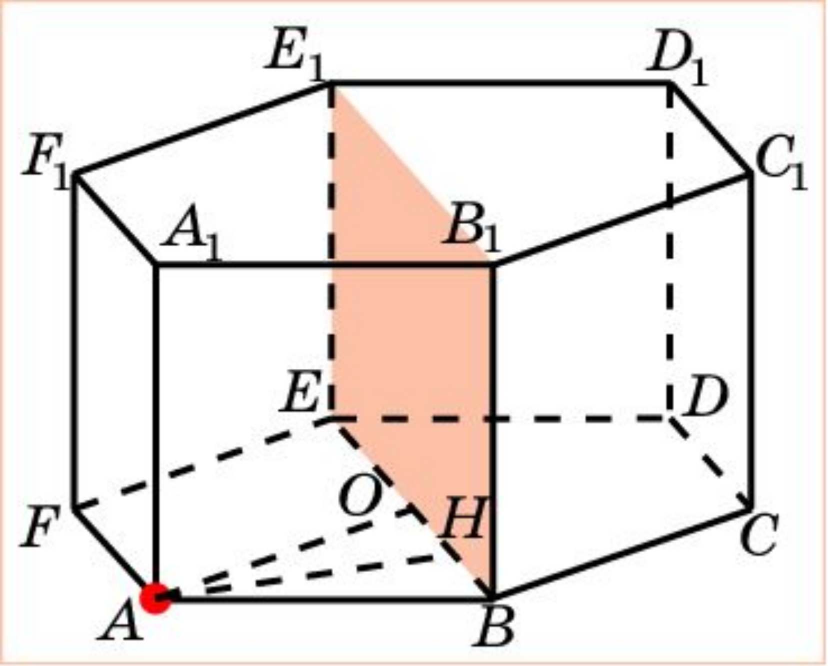


Решение: Искомым расстоянием является длина отрезка AB. Она равна 1.

Ответ: 1.

Призма 12

В правильной 6-й призме $A…F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BEE_1.

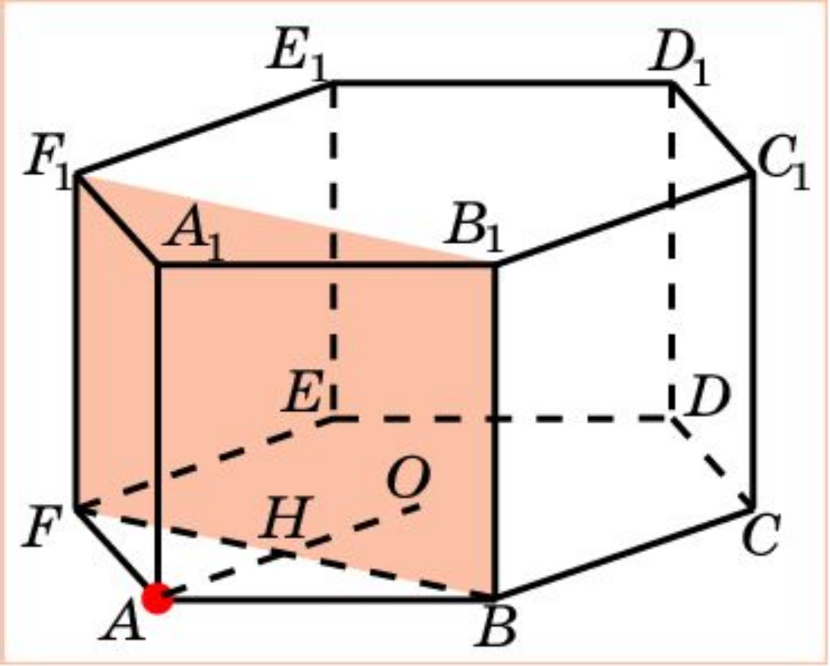


Решение: Пусть O – центр нижнего основания. Треугольник ABO – равносторонний. Искомое расстояние равно высоте AH этого треугольника. Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 14

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFF_1.

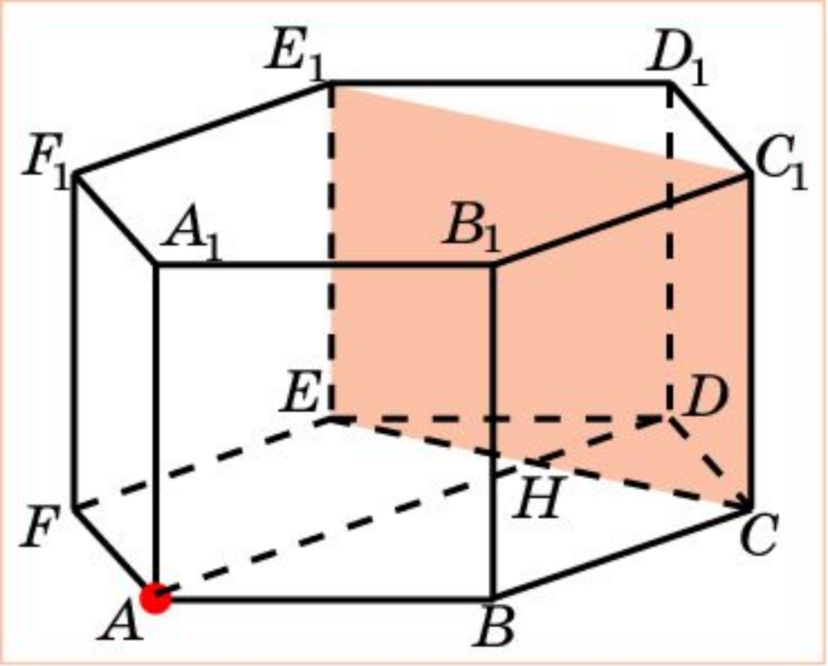


Решение: Пусть O – центр нижнего основания, H – точка пересечения AO и BF. Тогда AH – искомое расстояние. Оно равно $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Призма 15

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости CEE_1.

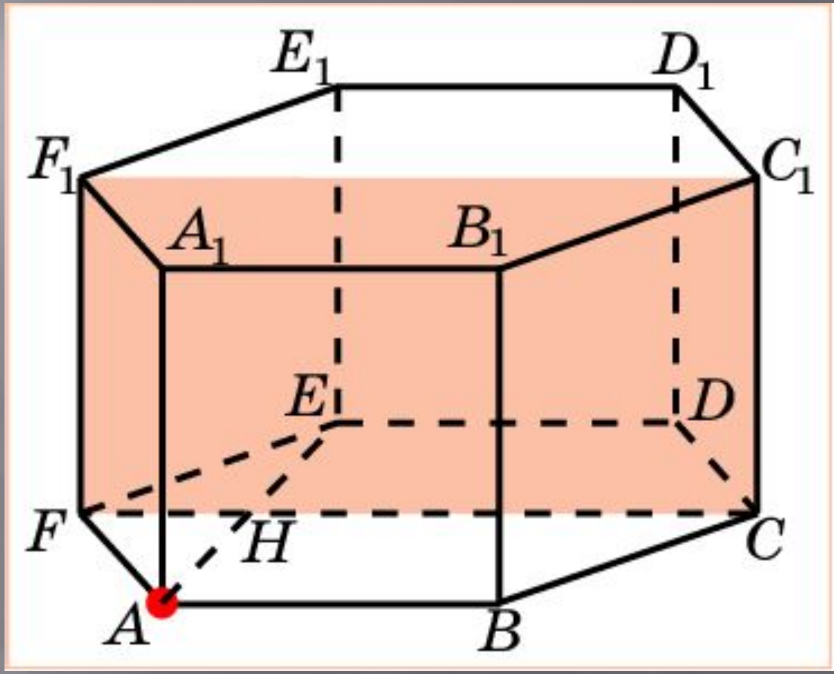


Решение: Проведем диагональ AD. Обозначим H – ее точку пересечения с CE. AH – искомое расстояние. Оно равно $\frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Призма 16

В правильной 6-й призме $A…F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости CFF_1.

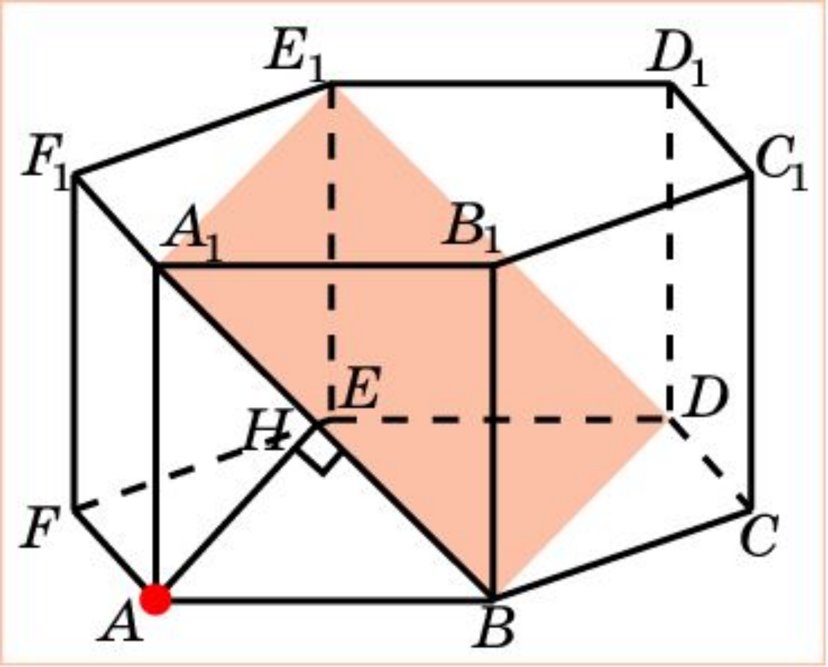


Решение: Проведем отрезок AE. Обозначим H – его точку пересечения с CA. AH – искомое расстояние. Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 17

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BA_1E_1.

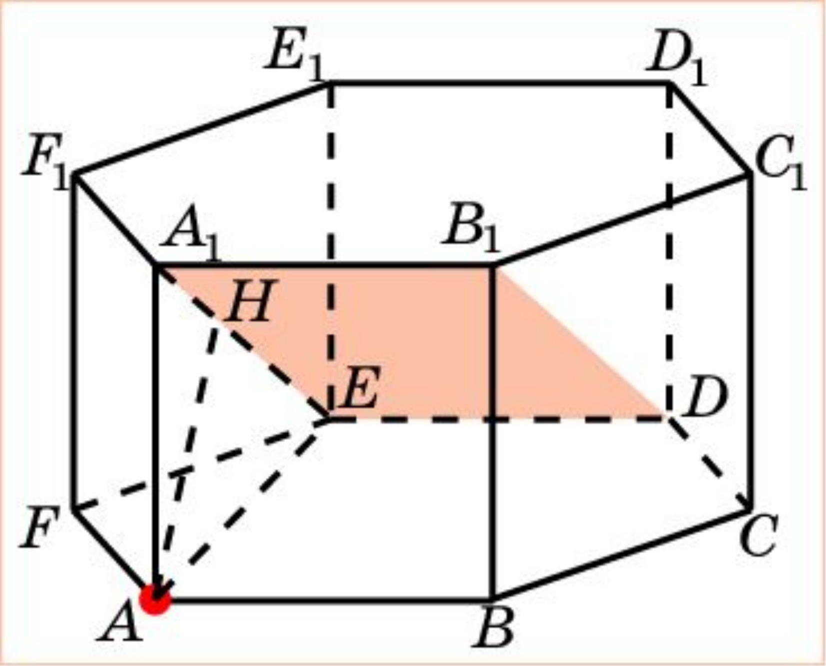


Решение: Искомым расстоянием является длина перпендикуляра AH, опущенного из точки A на прямую A_1B. Оно равно $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Призма 18

В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1D.

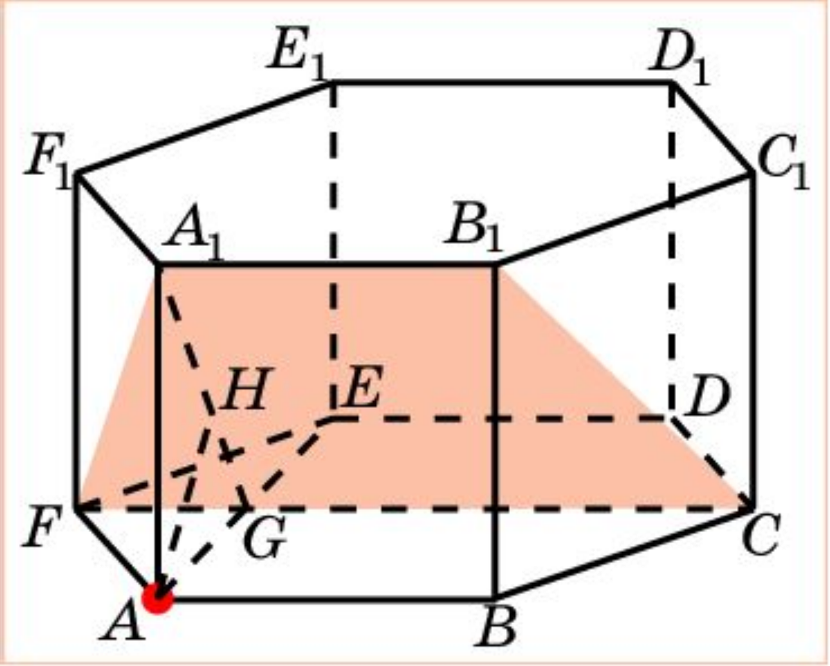


Решение: Искомым расстоянием является длина перпендикуляра AH, опущенного из точки A на прямую A_1E. Для его нахождения рассмотрим прямоугольный треугольник AEA_1. Имеем $AA_1 = 1$, $AE = \sqrt{3}$, $A_1E = 2$. Следовательно, угол AEA_1 равен 30º и высота AH равна $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Призма 19

В правильной 6-й призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C.



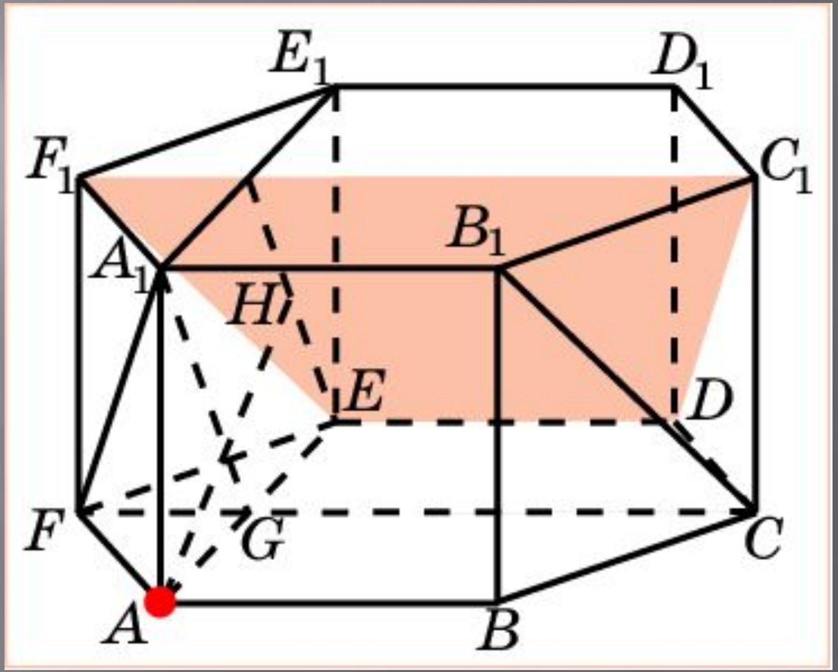
Решение: Искомое расстояние равно высоте AH прямоугольного треугольника AGA_1, в котором $AA_1 = 1$, $AG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $GA_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Из подобия треугольников AA_1G и HAG находим $AH = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Призма 20

В правильной 6-й призме $A \ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости F_1C_1D.



Решение: Заметим, что данная плоскость параллельна плоскости A_1B_1C из предыдущей задачи, причем $AE = 2AG$. Следовательно, искомое расстояние AH от точки A до плоскости F_1C_1D в два раза больше расстояния от точки A до плоскости A_1B_1C, т.е. равно $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.