

Лекция N6

Лектор: доц. Лаптева Надежда Александровна

Тема: Матрицы, операции над матрицами

Если число строк **не равно** числу столбцов,
то матрица называется **прямоугольной**

Если число строк **равно** числу столбцов,
то матрица называется **квадратной**

Примеры

a_{ij} - элементы матрицы

Опр. 2 Матрица называется **нулевой**, если все элементы равны нулю.

Опр. 3 Матрица E называется **единичной**, если она квадратная, на главной диагонали стоят единицы, а вне диагонали - нули.

Операции над матрицами

1. Сложение

Для сложения матриц нужно сложить соответствующие элементы.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + 3 & 2 + 1 \\ 0 + 2 & 1 + (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Складывать можно матрицы, имеющие одинаковые размерности.

2. Умножение на число

**Чтобы умножить матрицу на число,
нужно каждый элемент умножить на это
число.**

3. Умножение матриц

Число столбцов матрицы A должно совпадать с числом строк матрицы B .

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти $A \cdot B$.

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix};$$

$$C_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 4;$$

$$C_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 6;$$

$$C_{21} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 7;$$

$$C_{22} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 2.$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются **коммутативными**.

4. Возведение в степень

Дома

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти: $A + 2B$; $A \cdot B$; $B \cdot A$;

$$A^2; \quad (A + B)^2.$$

Тема:

**Матрицы: элементарные
преобразования строк, приведение к
ступенчатому виду и виду Гаусса.
Ранг матрицы**

Опр. 1 Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

- 1) Перестановка местами двух строк**
- 2) Замена строки суммой этой строки и некоторой другой, умноженной на число**
- 3) Умножение строки на ненулевое число α**

Аналогично вводятся элементарные преобразования столбцов.

Опр.2 **Опорным элементом строки называется первый слева ненулевой элемент этой строки.**

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① ② ④ – опорные
элементы

У нулевой строки опорного элемента нет

Опр. 3 Матрица называется **ступенчатой, если опорный элемент в каждой последующей строке расположен правее, чем в предыдущей.**

Если строка нулевая, то все последующие строки также нулевые.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Опр. 4 Матрица имеет **вид Гаусса**, если

- 1) она ступенчатая
- 2) все опорные элементы равны единице
- 3) над опорными элементами только нули

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 4 Любая матрица может быть приведена к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Опр. 5 Строки и столбцы матрицы, в которых расположены ее опорные элементы, называются **базисными.**

Опр. 6 Рангом матрицы называется число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы.

Обозначается $r(A)$.

Пример.

Привести матрицу к ступенчатому виду и найти ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \textcircled{-3} \\ | \\ \leftarrow \end{array} \quad \bullet \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow$$

Diagram illustrating the first step of row reduction on matrix A . The matrix is shown with a circled -3 in the top-right position. Blue arrows indicate the operations: a plus sign above the circled -3 , a left-pointing arrow from the circled -3 to the -2 in the first row, and another left-pointing arrow from the circled -3 to the 3 in the third row. To the right, a blue arrow points to the operation $\bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{l} \textcircled{3} \textcircled{2} \\ | \quad | \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ | \quad | \\ \leftarrow \quad \leftarrow \end{array} \quad \bullet \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \bullet \begin{array}{l} \leftarrow \\ | \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow$$

Diagram illustrating the second step of row reduction. The matrix is shown with circled 3 and 2 in the top-right and middle-right positions. Blue arrows indicate the operations: a left-pointing arrow from the circled 3 to the 1 in the first row, and another left-pointing arrow from the circled 3 to the 3 in the third row. To the right, a blue arrow points to the operation $\bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix}$, and another blue arrow points to the operation $\bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

