

Лекция №6

Лектор: доц. Лаптева Надежда Александровна

Тема: Матрицы, операции над матрицами

Если число строк **не равно** числу столбцов,
то матрица называется **прямоугольной**

Если число строк **равно** числу столбцов,
то матрица называется **квадратной**

Примеры

a_{ij} - элементы матрицы

Опр. 2 Матрица называется **нулевой**, если все элементы равны нулю.

Опр. 3 Матрица E называется **единичной**, если она квадратная, на главной диагонали стоят единицы, а вне диагонали - нули.

Операции над матрицами

1. Сложение

Для сложения матриц нужно сложить соответствующие элементы.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+1 \\ 0+2 & 1+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Складывать можно матрицы, имеющие одинаковые размерности.

2. Умножение на число

**Чтобы умножить матрицу на число,
нужно каждый элемент умножить на это
число.**

3. Умножение матриц

Число столбцов матрицы A должно совпадать с числом строк матрицы B .

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти $A \cdot B$.

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix};$$

$$C_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 4;$$

$$C_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 6;$$

$$C_{21} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 7;$$

$$C_{22} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 2.$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются **коммутативными**.

4. Возвведение в степень

Дома

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти: $A + 2B$; $A \cdot B$; $B \cdot A$;

$$A^2; \quad (A + B)^2.$$

Тема:

**Матрицы: элементарные
преобразования строк, приведение к
ступенчатому виду и виду Гаусса.
Ранг матрицы**

Опр. 1 Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

- 1) Перестановка местами двух строк**
- 2) Замена строки суммой этой строки и некоторой другой, умноженной на число**
- 3) Умножение строки на ненулевое число α**

Аналогично вводятся элементарные преобразования столбцов.

Опр.2 Опорным элементом строки называется первый слева ненулевой элемент этой строки.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 2 4 – опорные
элементы

У нулевой строки опорного элемента нет

Опр. 3 Матрица называется
ступенчатой, если опорный элемент в
каждой последующей строке
расположен правее, чем в предыдущей.

Если строка нулевая, то все
последующие строки также нулевые.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Опр. 4 Матрица имеет **вид Гаусса**, если

- 1) она ступенчатая
- 2) все опорные элементы равны единице
- 3) над опорными элементами только нули

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 4 Любая матрица может быть приведена к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Опр. 5 Строки и столбцы матрицы, в которых расположены ее опорные элементы, называются **базисными**.

Опр. 6 **Рангом матрицы** называется
число ненулевых строк в ступенчатом
виде матрицы.

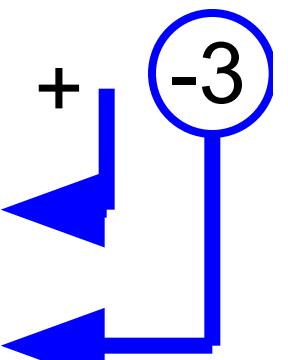
Обозначается $r(A)$.

Пример.

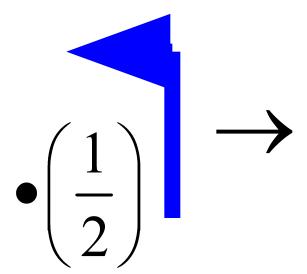
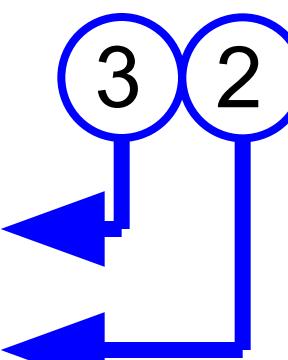
Привести матрицу к ступенчатому виду
и найти ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

+



$\cdot \left(\frac{1}{2} \right)$

$\cdot \left(\frac{1}{16} \right)$

$\cdot \left(\frac{1}{11} \right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

