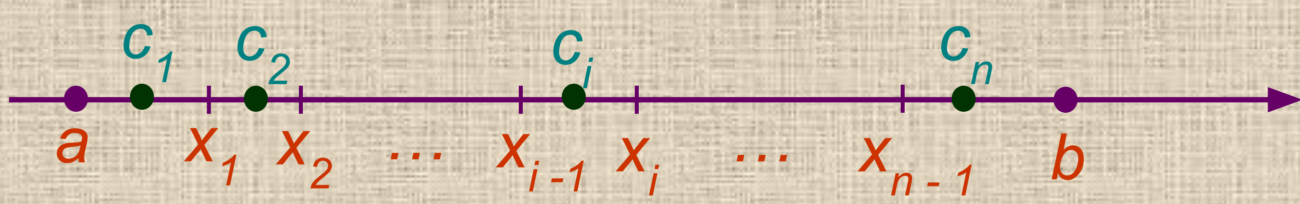
Определенный интеграл

- Определенный интеграл, как предел интегральной суммы
- Геометрический смысл определенного интеграла
- Физический смысл определенного интеграла
- Формула Ньютона – Лейбница
- Свойства определенного интеграла
- Замена переменной в определенном интеграле
- Интегрирование по частям

Определенный интеграл, как предел интегральной суммы

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке [a; b]. Выполним следующие действия:

- С помощью точек $x_0 = a; x_1; x_2; \ldots; x_n = b$ разобьем отрезок [a; b] на n частичных отрезков:



- В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ выберем произвольную точку:

$$c_i \in [x_{i-1}; x_i]$$

и найдем значение функции в ней, то есть величину $f(c_i)$.

- Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину соответствующего частичного отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$:

$$f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

- Составим сумму всех таких произведений

$$S_n = f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\cdot\Delta x_n = \boxed{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i}$$

Обозначим длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda = \max \Delta x_i$

Интегральная сумма функции y = f(x) на [a; b]

- Найдем предел интегральной суммы, когда $n \to \infty$, так что $\lambda \to 0$

Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел I, который не зависит ни от способа разбиения отрезка [a; b] на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число I называется ***определенным интегралом*** от функции *f(x)* на отрезке [a; b] и обозначается:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i}$$

Верхний предел интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx$$

Нижний предел интегрирования

[a; b] - область (отрезок) интегрирования

Теорема (существования определенного интеграла)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a; b] , то определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$ существует.

Непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости. Однако определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций (например для ограниченной на отрезке функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва)

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$.

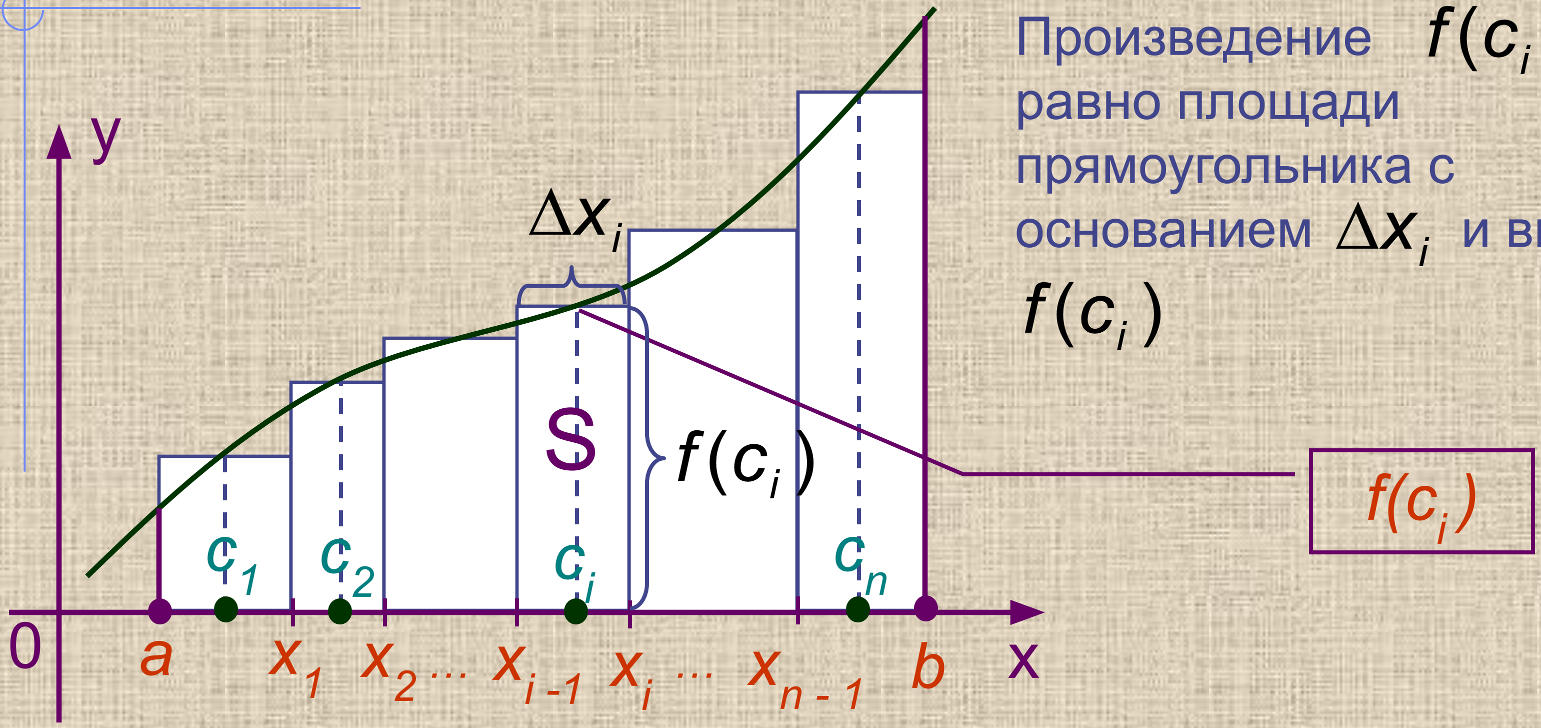
Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью OX, сбоку прямыми $x = a; x = b$, называется ***криволинейной трапецией.***

Найдем площадь этой трапеции.

Составим для функции $f(x)$ интегральную сумму на отрезке $[a; b]$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

Найдем геометрический смысл этой суммы. :

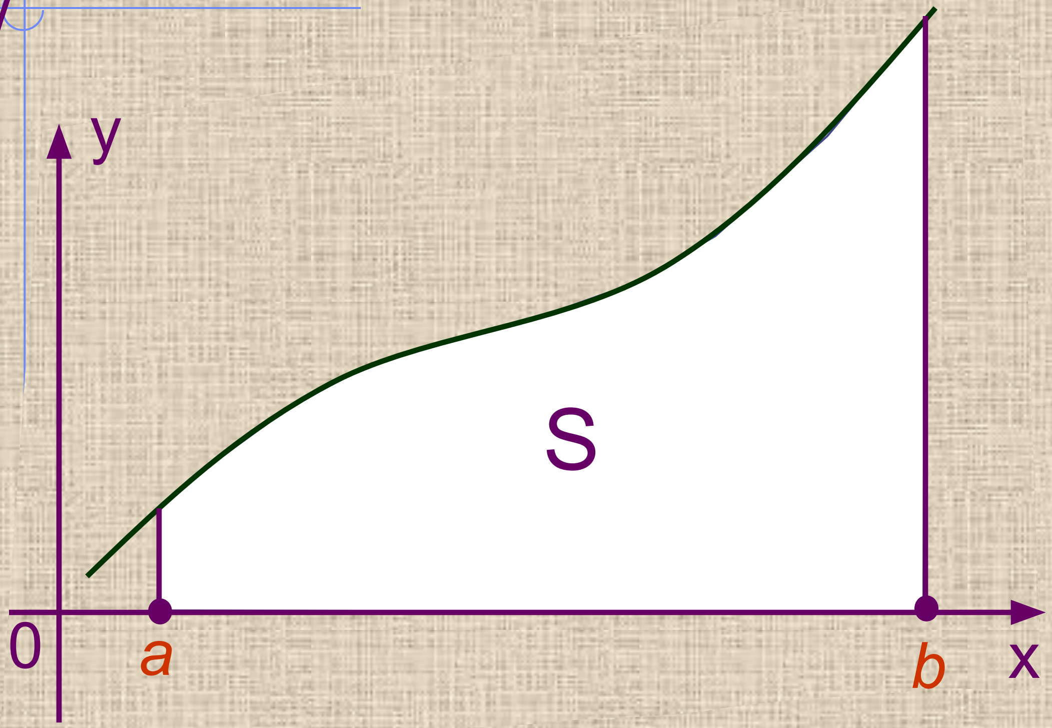


Произведение $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$

Сумма таких произведений: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$

(интегральная сумма) равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади криволинейной трапеции: $S \approx S_n$

Геометрический смысл определенного интеграла



С уменьшением величин Δx_i точность формулы $S_n \approx S$ увеличивается.

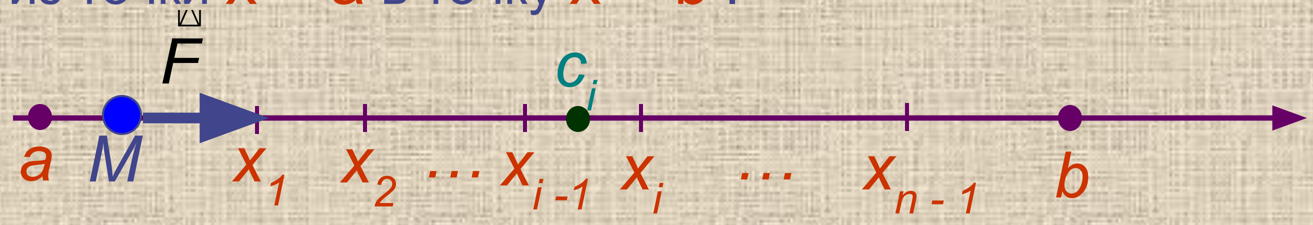
Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n неограниченно возрастает.

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Физический смысл определенного интеграла

Пусть материальная точка *M* перемещается по воздействием силы $\vec{F}$, направленной вдоль оси OX и имеющей переменную величину $F = F(x)$

Найдем работу *A* силы $\vec{F}$ по перемещению точки *M* вдоль оси OX из точки x = a в точку x = b .



Сила, действующая на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ меняется от точки к точке.

Но если длина отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ достаточно мала, то силу на этом отрезке можно считать постоянной, равной значению функции в произвольно выбранной точке $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$

Поэтому работа, совершенная этой силой на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ равна:

$$A_i = F(c_i) \cdot \Delta x_i$$

Приближенное значение работы A силы $\vec{F}$ на всем отрезке [a; b]:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i) \cdot \Delta x_i$$

Точное значение работы A :

$$\boxed{A = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} F(c_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b F(x)dx}$$

Аналогично можно показать, что путь S, пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определенному интегралу от скорости:

$$\boxed{S = \int_a^b v(t)dt}$$

Масса неоднородного стержня на отрезке [a; b] равна определенному интегралу от плотности:

$$\boxed{m = \int_a^b \gamma(x)dx}$$

Формула Ньютона - Лейбница

Теорема

Если функция *y = f(x)* непрерывна на отрезке [a; b] и *F(x)* какая либо ее первообразная, то имеет место формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона - Лейбница

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = \left(-\cos\pi - (-\cos 0)\right) =$$

$$= \left(1 - (-1)\right) = \boxed{2}$$

Свойства определенного интеграла

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Если функция *f* интегрируема на каждом из отрезков [*a*, *c*] и [*c*, *b*] ($a < c < b$), то она интегрируема на [*a*, *b*] и

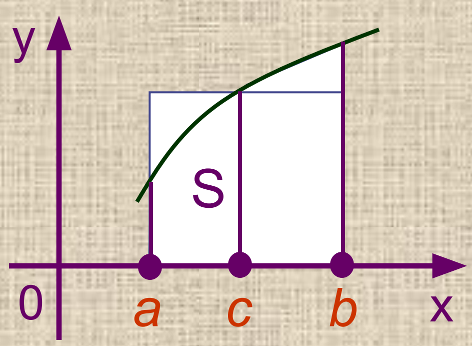
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Теорема о среднем

Если функция *f* непрерывна на отрезке [*a*, *b*] то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Это свойство имеет при *f(x) > 0* следующий геометрический смысл:



Значение определенного интеграла $S = \int_a^b f(x)dx$ равно при некотором $c \in [a;b]$ площади прямоугольника с высотой *f(c)* и основанием *b – a*.

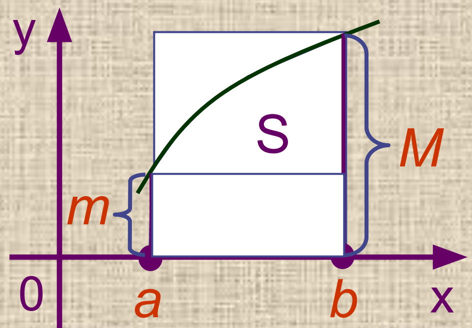
Число: $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется ***средним значением*** функции *f(x)* на отрезке [*a*, *b*] .

- Если функция *f* сохраняет знак на отрезке [*a*, *b*] то интеграл на этом отрезке имеет тот же знак, что и функция:

$$f(x) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \ge 0$$

- <u>*Оценка интеграла*</u>: если *m* и *M* – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции *f(x)* на отрезке [*a*, *b*] то :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$



Площадь криволинейной трапеции заключена между площадями прямоугольников, основания которых есть отрезок [*a*, *b*] , а высоты равны *m* и *M.*

- Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)$$

Это означает также, что определенный интеграл с переменным верхним пределом есть одна из первообразных подынтегральной функции.

Замена переменной в определенном интеграле

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка: $x = \varphi(t)$

Теорема Если:

1) Функция $x = \varphi(t)$ и ее производная непрерывны при $t \in [\alpha;\beta]$;

2) Множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta]$ является отрезок [a; b] ;

3) $\varphi(\alpha) = a;\quad \varphi(\beta) = b$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt}$$

Замечания: *1)* при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не нужно.

2) Иногда вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = q(x)$

Пример.

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} x=2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \\ x=0 \Rightarrow 2\sin t = 0 \Rightarrow t=0 \\ x=2 \Rightarrow 2\sin t = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right|$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt = \left.\left(2t-\frac{1}{2}\sin 4t\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right) = \boxed{\pi}$$

Интегрирование по частям

Теорема

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула:

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

$$\int_1^e x \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = x\,dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2 \ln x}{2}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\,\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2 \ln e}{2} - \frac{1^2 \ln 1}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \boxed{\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}}$$