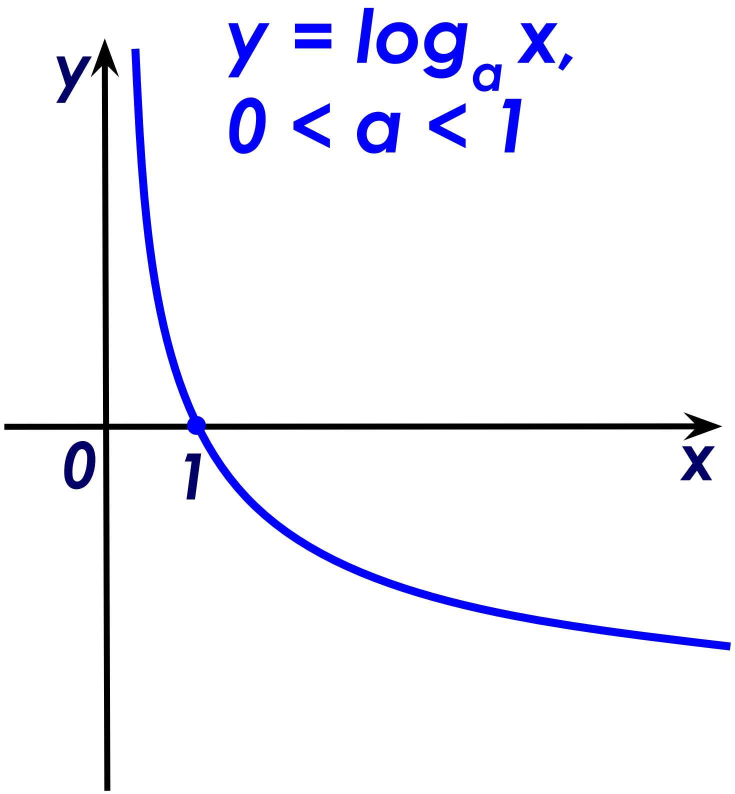
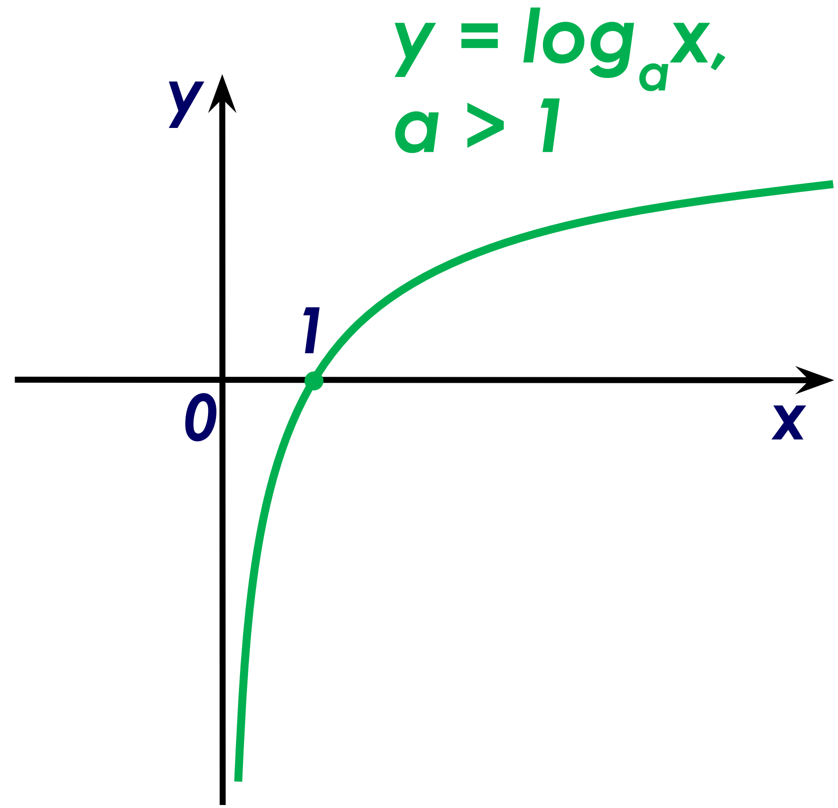

$y = \log_a x,$
$0 < a < 1$
y
0
1
x


$y = \log_a x,$
$a > 1$
y
0
1
x

Содержание

Сведения из истории

Потребность в сложных расчётах в XVI веке быстро росла, и значительная часть трудностей была связана с умножением и делением многозначных чисел, а также извлечением корней. В конце века нескольким математикам, почти одновременно, пришла в голову идея: заменить трудоёмкое умножение на простое сложение, сопоставив с

геометрическую и арифметическую прогрессии, при этом геометрическая будет исходной. Тогда и деление автоматически заменяется на неизмеримо более простое и надёжное вычитание, а извлечение корня степени *n* сводится к делению логарифма подкоренного выражения на *n*. Первым эту идею опубликовал в своей книге «*Arithmetica integra*» *Михаэль Штифель*, который, впрочем, не приложил серьёзных усилий для реализации своей идеи.

Сведения из истории

В 1614 году шотландский математик-любитель *Джон Непер* опубликовал на латинском языке сочинение под названием «*Описание удивительной таблицы логарифмов*». В нём было краткое описание логарифмов и их свойств, а также 8-значные таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов, с шагом 1'. Термин логарифм, предложенный *Непером*, утвердился в науке. Теорию логарифмов Непер изложил в другой своей книге «Построение удивительной таблицы логарифмов», изданной посмертно в 1619 году его сыном.

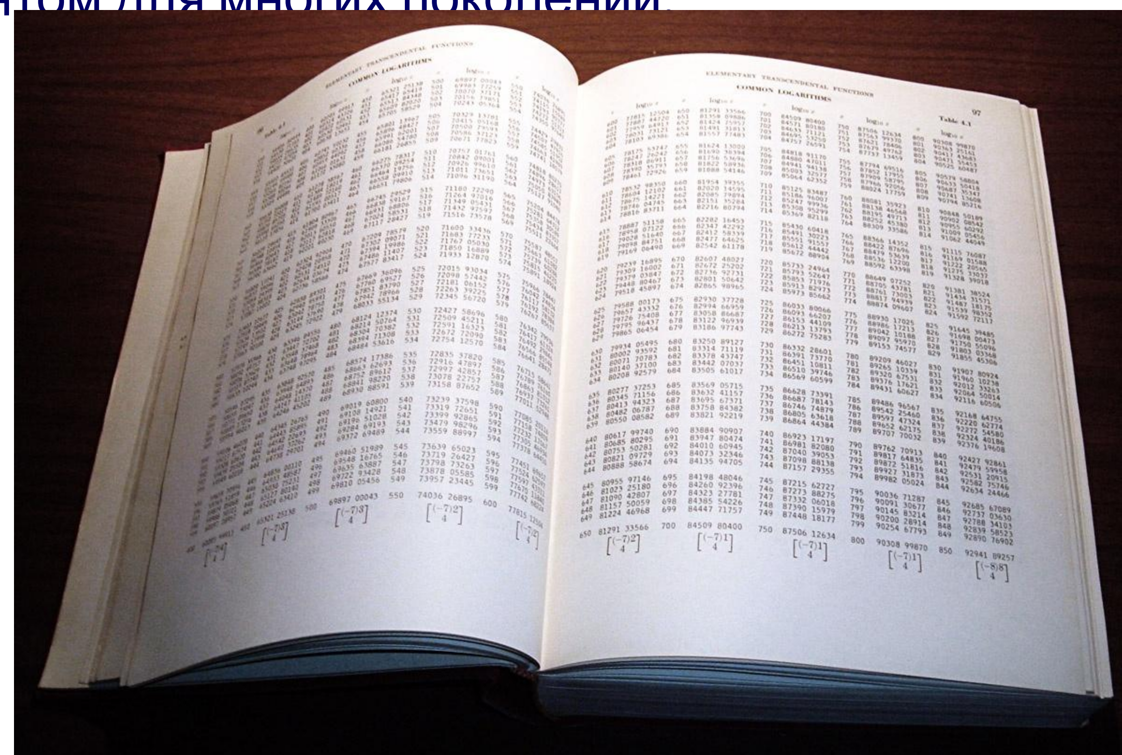
Слово *логарифм* происходит от греческого *λόγοφ* (число) и *αριvμοφ* (отношение) и переводится, следовательно, как отношение чисел.

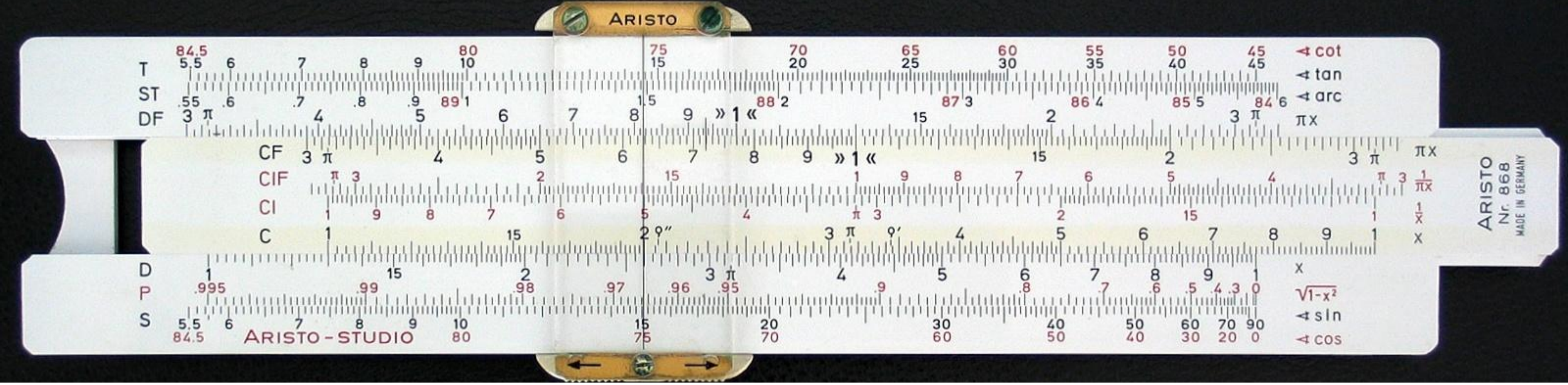
«Логарифм данного синуса есть число, которое арифметически возрастало всегда с той же скоростью, с какой полный синус начал геометрически убывать».

Сведения из истории

Логарифмы необычайно быстро вошли в практику. Изобретатели логарифмов не ограничились разработкой новой теории. Было создано практическое средство – таблицы логарифмов, – резко повысившее производительность труда вычислителей. Добавим, что уже в 1623 г., т. е. всего через 9 лет после издания первых таблиц, английским математиком *Д. Гантером* была изобретена первая логарифмическая линейка, ставшая рабочим инструментом для многих поколений.

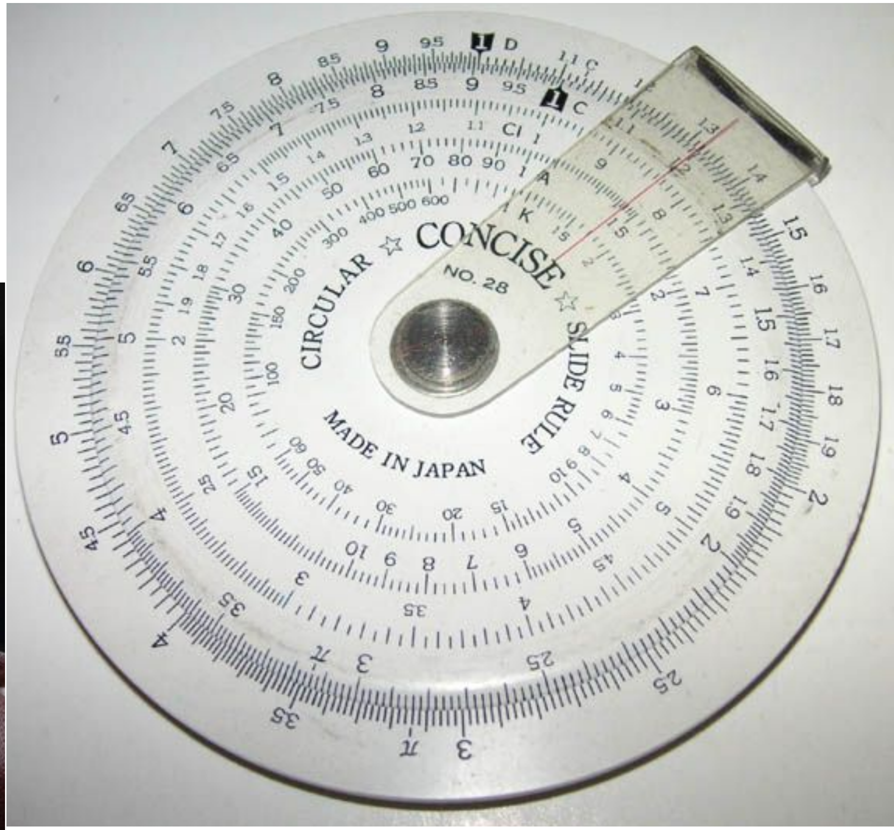
Первые таблицы логарифмов составлены независимо друг от друга шотландским математиком ***Дж. Непером*** (1550 - 1617) и швейцарцем ***И. Бюрги*** (1552 - 1632).





Логарифмическая линейка

Часы Breitling Navitimer



Круговая логарифмическая линейка (логарифмический

Понятие логарифма

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию а* называют показатель степени, в которую нужно возвести число *а*, чтобы получить число *b

$$\log_a b = c,\ a^c = b;\ \ a \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$$

$$a^{\log_a b} = b$$

- основное логарифмическое тождество

Примеры

1. $\log_2 8 =$
2. $\log_3 729 =$
3. $\log_{0,2} 25 =$
4. $\log_4 8 =$
5. $\log_2 2 =$
6. $\log_{10} 1 =$
7. $\log_{49} 1/7 =$
8. $\log_{0,1} 10000 =$

Основные свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0;$
2. $\log_a a = 1;$
3. $\log_a \frac{1}{a} = -1;$
4. $\log_{a^k} a = \frac{1}{k};$
5. $\log_a a^m = m;$
6. $\log_{a^k} a^m = \frac{m}{k};$
7. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c;$
8. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$
9. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b;$
10. $\log_a b^m = m \log_a b;$
11. $\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \log_a b;$
12. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$
13. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$
14. $\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$
15. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Понятие логарифмической функции

Функцию вида

$y = \log_a x$, где $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$

называют

логарифмической функцией

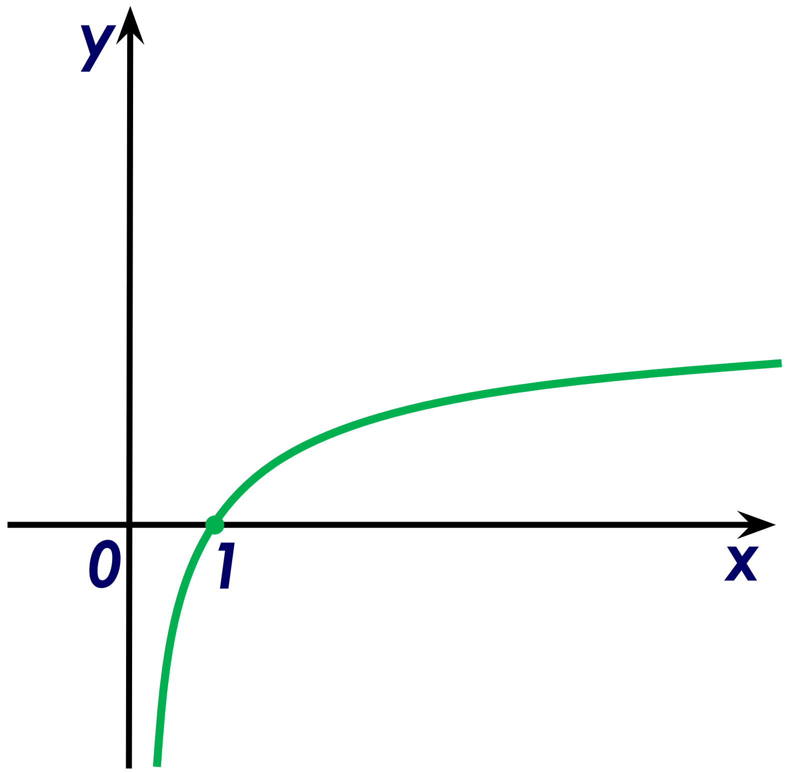
Свойства логарифмической функции $y = \log_a x,\ a \neq 1,\ a > 0$

1. $D(y) = (0;\ +\infty)$,
   $E(y) = (-\infty;\ +\infty)$.
2. а) Нули функции: $y = 0$ при $x = 1$;
   б) точек пересечения с осью ординат нет.
3. а) При $a > 1$ функция возрастает на $(0;\ +\infty)$;
   б) при $0 < a < 1$ функция убывает на $(0;\ +\infty)$.
4. Ни четная функция, ни нечетная.
5. Не ограничена сверху, не ограничена снизу.
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
7. Непрерывна.
8. а) При $a > 1$ функция выпукла вверх;
   б) при $0 < a < 1$ функция выпукла вниз.
9. Ось y является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции.

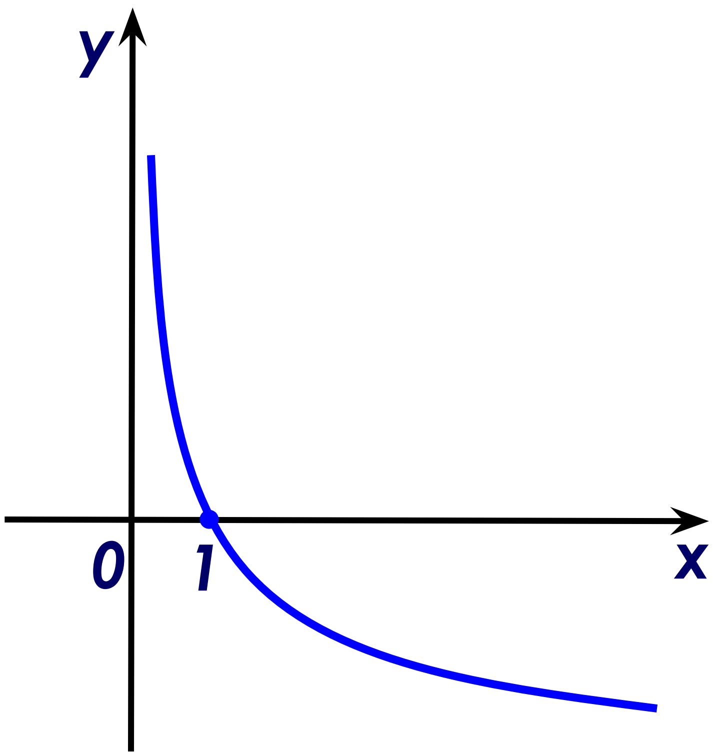
График логарифмической функции

$y = \log_a x,\ a \neq 1,\ a > 0$

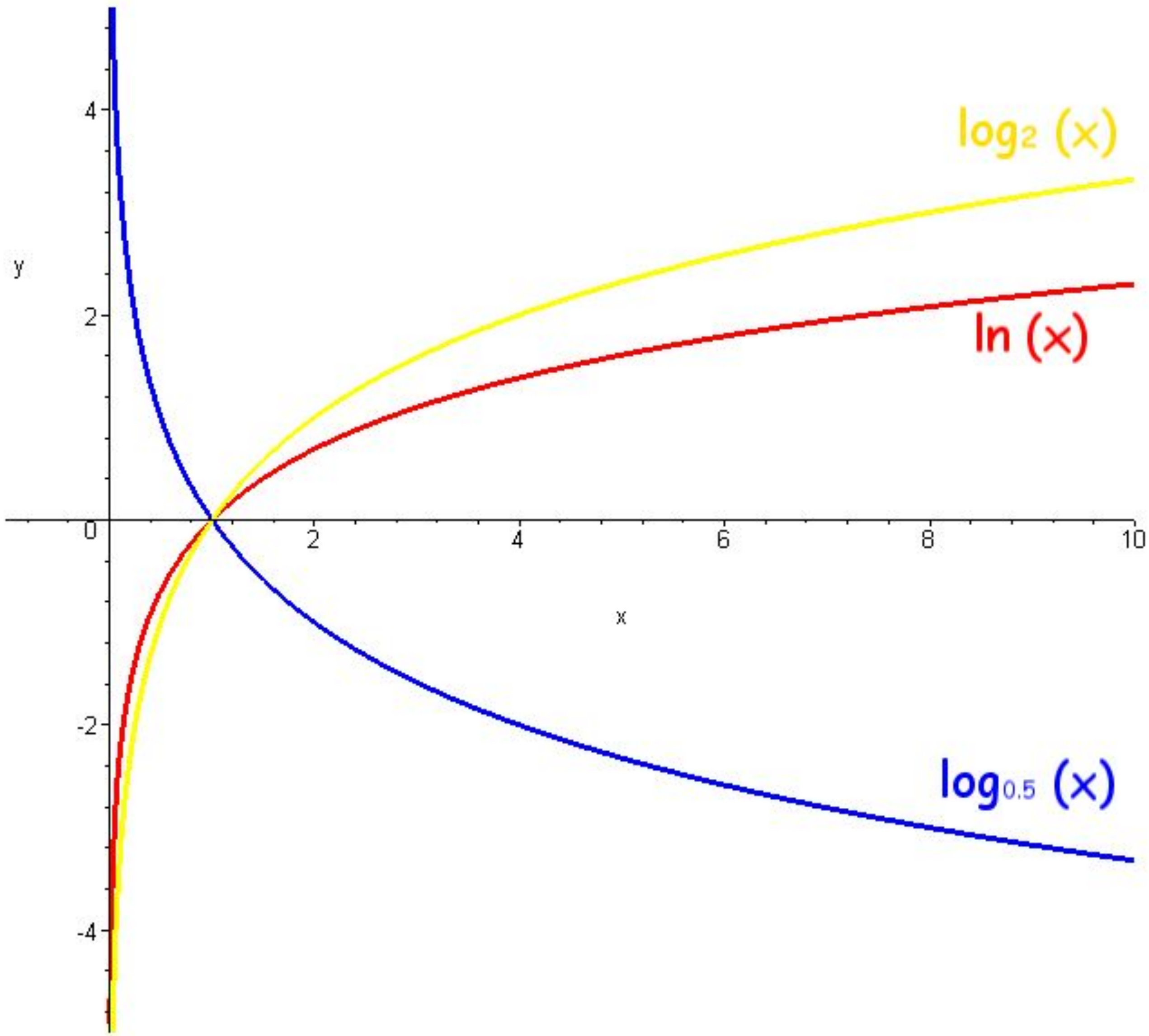
$y = \log_a x,\ a > 1$



$y = \log_a x,\ 0 < a < 1$



Графики логарифмической функции
$y = \log_a x,\ a \neq 1,\ a > 0$



Логарифмические уравнения

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a h(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют логарифмическими уравнениями

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a h(x)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}}$$

Методы решения логарифмических уравнений:

1. *Функционально-графический метод.*
2. *Метод потенцирования.*
3. *Метод введения новой переменной.*

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 1

$$\log_3\left(x^2-3x-5\right)=\log_3(7-2x)$$

$$\begin{cases} x^2-3x-5=7-2x \\ 7-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-12=0 \\ x<3{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{array}\right. \\ x<3{,}5 \end{cases}$$

$$x=-3$$

Ответ: -3.

Пример 2

$$\log_2(x+4)+\log_2(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\log_2(x+4)(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\begin{cases} (x+4)(2x+3)=(1-2x) \\ x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+13x+11=0 \\ x>-4 \\ x>-1{,}5 \\ x<0{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-5{,}5 \end{array}\right. \\ -1{,}5<x<0{,}5 \end{cases}$$

Ответ : -1.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 3

$$\log_{x+4}\left(x^2-1\right)=\log_{x+4}\left(5-x\right)$$

$$\begin{cases} x^2-1=5-x, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x-6=0, \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1; \end{array}\right. \\ -4<x<5, \\ x\neq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{array}\right. \\ x\neq -3 \\ \left[\begin{array}{l} -4<x<-1, \\ 1<x<5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2$$

Ответ: 2.

Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют *логарифмическими неравенствами*

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$a > 1$

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$0 < a < 1$

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

или

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

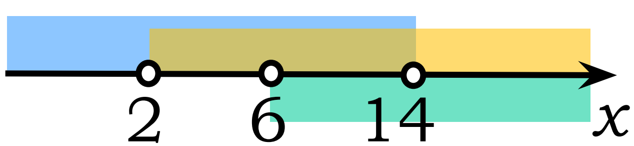
$$\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

т.к. $a = 3 > 1$, то

$$\begin{cases} 2x-4 > 14-x, \\ 2x-4 > 0, \\ 14-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}} 16$$

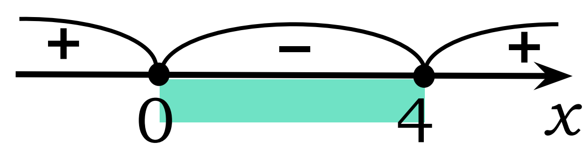
т.к. $a = \frac{1}{2} < 1$, то

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 \ge 16, \\ 16+4x-x^2 > 0; \end{cases}$$ – лишнее условие

$$4x - x^2 \ge 0$$

$$x^2 - 4x \le 0$$

$$x(x-4) \le 0$$



Ответ: [0; 4].

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 3

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2$$

$$\lg(x(45 - x)) < \lg 100 + \lg 2$$

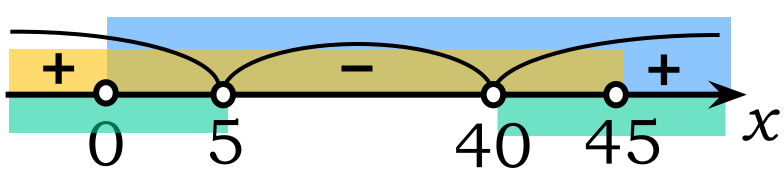
$$\lg(45x - x^2) < \lg 200$$

$т.к.\ a = 10 > 1,\ то$

$$\begin{cases} 45x - x^2 < 200, \\ 45 - x > 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 45x + 200 > 0, \\ x < 45, \\ x > 0; \end{cases} \quad н.ф.:\ x^2 - 45x + 200 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 5, \\ x_2 = 40; \end{array}\right.$$



Ответ: $(0;\ 5) \cup (40;\ 45).$

Пример 4

$$\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x + 1 \le 0 \quad ОДЗ:\ x > 0$$

$$(2\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 1 \le 0$$

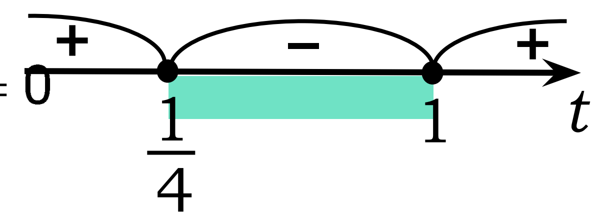
$$4\log_2^2 x - 5\log_2 x + 1 \le 0$$

$пусть\ \ \log_2 x = t,\ \ тогда$

$$4t^2 - 5t + 1 \le 0$$

$$н.ф.:\ 4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1}{4}, \\ t_2 = 1; \end{array}\right.$$



$$\frac{1}{4} \le t \le 1$$

Вернемся к исходной переменной

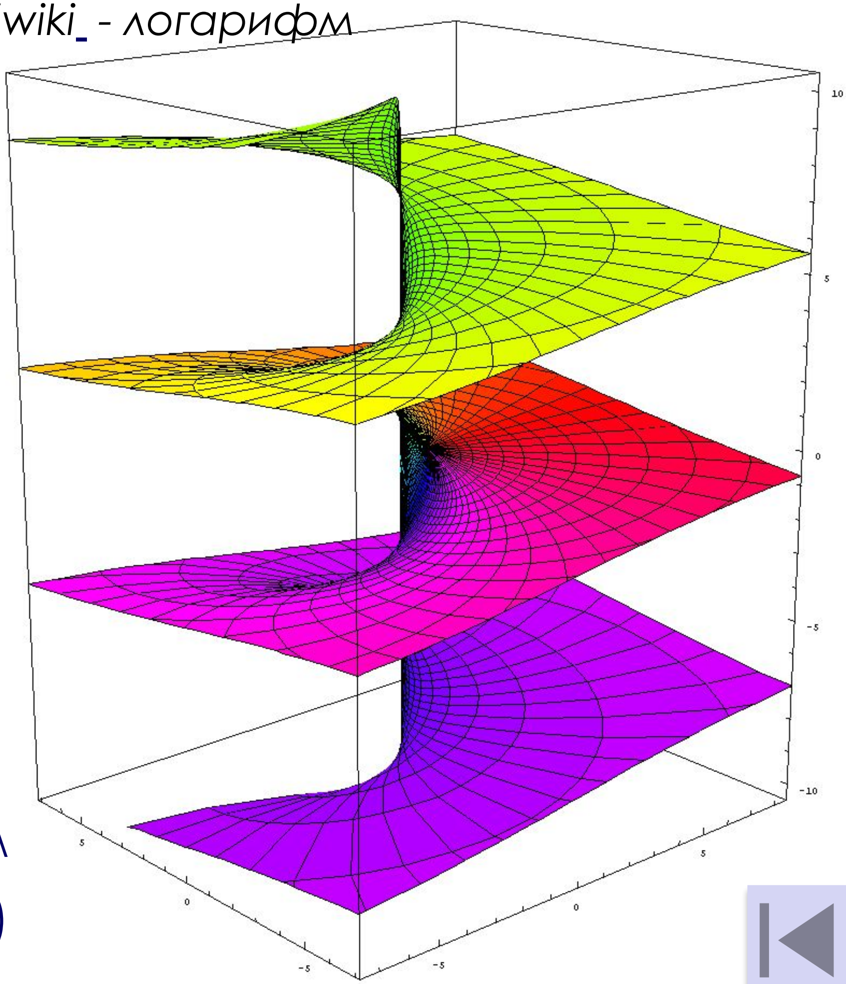
$$\frac{1}{4} \le \log_2 x \le 1,\ т.к.\ a = 2,\ то$$

$$\sqrt[4]{2} \le x \le 2$$

$Ответ:\ [\sqrt[4]{2};\ 2].$

Используемые материалы

1. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2008
2. *http://ru.wikipedia.org/wiki*http://ru.wikipedia.org/wiki - *логарифмические линейки*
3. *http://ru.wikipedia.org/wiki*http://ru.wikipedia.org/wiki - *логарифм*



Комплексный логарифм

(мнимая часть)