Решения краевых задач для неоднородного нестационарного уравнения гиперболического типа
с неоднородными граничными условиями
методом разделения переменных (метод Фурье).

№1

Задача N1. Решить одномерную (по пространству) нестационарную краевую задачу для функции $u(x,t)$, описываемую ***линейным неоднородным*** уравнением второго порядка гиперболического типа с ***неоднородными граничными*** и неоднородными ***начальными*** условиями с двумя независимыми переменными x (координата) и t (время) на отрезке: $0 \le x \le \pi/2$ при $t \ge 0$ имеющая следующий общий вид:

$$u_{tt} = u_{xx} + 3u - \frac{1}{\pi}\left(3x^2 + 2\right)t + x\cos t\,,\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ \ t > 0, \qquad (1)$$

начальные условия:

$$\begin{cases} u(x,0) = \cos(2x), & (2) \\ u_t(x,0) = x^2/\pi, & (3) \end{cases}$$

граничные условия:

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0, & (4) \\ u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = t, & (5\,) \end{cases}$$

Решение.

1 этап . Решение задачи ищем в виде суммы (***делаем сдвиг***):

$$u(x,t) = V(x,t) + w(x,t), \qquad (6)$$

Здесь $w(x,t)$ – частное решение, удовлетворяющая заданным неоднородным краевым условиям; $V(x,t)$ – решение неоднородного уравнения с однородными граничными условиями.

Ищем частное решение $w(x,t)$, удовлетворяющая заданным неоднородным краевым условиям.

Воспользуемся ***рекомендацией*** для краевой задачи **(II – II):**

$$w(x,t) = \frac{(x-b)^2}{2(a-b)}\nu_1(t) + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)}\nu_2(t) \quad = \quad \frac{(x-\pi/2)^2}{2(0-\pi/2)}\,0 + \frac{(x-0)^2}{2(\pi/2-0)}\,t.$$

Имеем:

$$w(x,t) = \frac{x^2 t}{\pi} \quad \to \quad w_{tt} = 0, \quad w_{xx} = \frac{2t}{\pi}. \qquad (7)$$

2 этап. ***Определим задачу с однородными ГУ для функции*** $V(x,t)$.

1) Получим уравнение для $V(x,t)$. С учётом **(7)** подставим **(6)** в **(1)**: $V_{tt} + w_{tt} = V_{xx} + w_{xx} + 3V + 3w + F(x,t) \to$

$$V_{tt} - 3V = V_{xx} + x\cos t, \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad t > 0 \qquad (8)$$

2) Запишем начальные условия для $V(x,t)$:

$$V(x,0) = \cos(2x); \quad V_t(x,0) = 0. \qquad (9)$$

3) Запишем граничные условия для $V(x,t)$:

$$V_x(0,t) = 0; \quad V_x(\pi/2,t) = 0. \qquad (10)$$

Получили краевую задачу для неоднородного уравнения, но с однородными краевыми условиями. Это даёт возможность использовать для решения метод Фурье.

3 этап. ***Ищем решение краевой задачи* (8) – (10) *с однородными КУ*.** Проводим его в два этапа.

3.1 Применим метод разделения переменных (метод Фурье), **но** для решения задачи с ***однородным уравнением***:

$$v_{tt} - 3v = v_{xx}, \qquad 0 \le x \le \pi/2, \quad t > 0 \qquad (8A)$$

Внимание! Мы записываем уравнение не для функции $V(x,t)$, а для $v(x,t)$, которая отвечает другому – ***однородному*** уравнению **(8А)**. Это разные функции! Пусть:

$$v(x,t) = X(x)T(t). \qquad (11)$$

Для функции $X(x)$ решим спектральную задачу Штурма-Лиувилля в нашем случае с простейшим оператором:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X'(0) = 0; \\ X'(\pi/2) = 0; \end{cases}$$

Для λ^2 возможны только два варианта: $\lambda = 0$ и $\lambda^2 > 0$.

1. При $\lambda = 0$ имеем: $X''(x) = 0 \rightarrow X(x) = C_1 x + C_2$. Из $X'(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow X(x) = C_2$.

   Условие $X'(\pi/2) = 0 \rightarrow 0 = 0$. Положим для простоты $C_2 = 1$. Тогда имеем следующее решение:

$$X_0 = 1\,; \quad \lambda_0 = 1.$$

2. При $\lambda^2 > 0$ из уравнения: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \rightarrow X(x) = C_1 cos(\lambda x) + C_2 sin(\lambda x) \rightarrow$

$$X'(x) = -\lambda C_1 sin(\lambda x) + \lambda C_2 cos(\lambda x).$$

Тогда из **ГУ**: $X'(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \rightarrow X(x) = C_1 cos(\lambda x)$. Из **ГУ**: $X'(\pi/2) = 0 \rightarrow -\lambda C_1 sin(\lambda x) = 0$.

Но, поскольку $\lambda \neq 0$ и $C_1 \neq 0$ (мы исключаем тривиальное решение), следовательно имеем:

$$sin(\lambda x) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda \frac{\pi}{2} = \pi k, \qquad k = 1, 2, 3, \ \dots$$

Тогда, полагая $C_1 = 1$ (нормируем на 1) и учитывая полученное решение при $\lambda = 0$, имеем следующее решение спектральной задачи Штурма-Лиувилля для однородного уравнения **(8А)**:

$$\lambda_n = 2k; \quad X_k = cos(2kx);$$

Система найденных собственных функций $\{cos(2kx)\}$ ортогональна и полна в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций $\mathcal{L}_2[0, \pi/2]$, то есть она образует базис, по которому согласно теореме Стеклова может быть разложена любая функция, заданная в этом пространстве.

3.2 ***Ищем решение задачи (8) – (10) с неоднородным уравнением и однородными ГУ***.

Представим искомое решение в виде разложения в ряд по найденному полному набору $\{X_n \equiv cos(2nx)\}$ с коэффициентами $T_n(t)$, зависящими от t:

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \qquad (12)$$

Подставляем это решение в уравнение для $V(x,t)$:

$$\sum_{n}^{\infty} T_n'' X_n(x) - 3\sum_{n}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = -\sum_{n}^{\infty} T_n(t) \lambda_n{}^2 X_n(x) + x\cos(t).$$

Чтобы получить уравнение для нахождения функций $T_n(t)$, разложим в ряд Фурье по $\{X_n\}$сомножитель x:

$$x = \sum_{n}^{\infty} a_n X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n cos(2nx)$$

Коэффициенты ищем в виде: $a_n = I_n/\|X_n\|^2$, $n \neq 0, n \in N$, $a_0 = \pi/4$, где

$$I_n = \int_0^{\pi/2} x\cos(2nx)dx = \frac{(-1)^n - 1}{4n^2}; \quad \|X_n\|^2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(2nx)dx = \frac{\pi}{4}; \quad n \neq 0, n \in N$$

В результате получаем: $a_n = [(-1)^n - 1]/\pi n^2$, $n \neq 0, n \in N$, $a_0 = \pi/4.$

Тогда уравнение примет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n''(t)X_n(x) - 3\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\lambda_n{}^2 X_n(x) = cos(t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n(x).$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n''(t) - 3T_n(t) - \lambda_n{}^2 T_n(t)\right]X_n(x) = cos(t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n(x).$$

Приравнивая выражения под знаком суммы, опуская общий множитель $X_n(x)$ и учитывая, что $\lambda_n{}^2 = 4n^2$, получим уравнение для $T_n(t)$:

$$T_n''(t) + \left[4n^2 - 3\right]T_n(t) = a_n cos(t)$$

Теперь преобразуем начальные условия. Так как

$$V(x,0) = cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)cos(2nx),$$

то из этого с очевидностью следует, что $T_n(0) = \delta_{n,1}$ (δ − символ Кронекера)

Аналогично, так как

$$V_t(x,0) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)cos(2nx)$$

то отсюда следует, что

$$T_n'(0) = 0$$

4 этап. Мы пришли к следующей *задаче Коши* для ОДУ относительно коэффициентов $T_n(t)$:

$$T_n''(t) + \left[4n^2 - 3\right]T_n(t) = a_n cos(t)\,, \qquad (13)$$

$$T_n\,(0) = \delta_{n,1}\,, \qquad (14)$$

$$T_n'(0) = 0. \qquad (15)$$

Находим $T_n(t)$. При решении задачи следует выделить три разных случая.

Случай 1. $k = 0$. **Имеем следующую задачу Коши:**

$$T_0''(t) - 3T_0(t) = a_0 cos(t)\,, \qquad (13.1)$$

$$T_0\,(0) = 0\,, \qquad (14.1)$$

$$T_0'(0) = 0. \qquad (15.1)$$

Характеристическое уравнение однородного ОДУ $T_0''(t) - 3T_0(t) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad r_{1,2} = \pm\sqrt{3} \in R$

Общее решение однородного уравнения имеет вид: $Y_0(t) = C_0 ch\left(\sqrt{3}t\right) + D_0 sh\left(\sqrt{3}t\right)$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде: $Y_1(t) = \alpha\, cos(t) + \beta sin(t)$.

Подставив $Y_1(t)$ в (13.1) находим неизвестные коэффициенты: $\beta = 0$ и $\alpha = -\frac{a_0}{4}$. Тогда $Y_1(t) = -\frac{a_0}{4}\, cos(t)$. Следовательно, решение КЗ (13.1) – (15.1) с учётом, что $a_0 = -\pi/4$ имеет вид:

$$Y_0(t) = C_0 ch\left(\sqrt{3}t\right) + D_0 sh\left(\sqrt{3}t\right) - \frac{\pi}{16}\, cos(t).$$

Теперь, чтобы найти неизвестные коэффициенты C_0 и D_0, воспользуемся начальными условиями **(14.1)** и **(15.1):**

$$T_0(0) = 0 \;\Rightarrow C_0 = \frac{\pi}{16}. \qquad T_0'(0) = 0 \quad \Rightarrow D_0 = 0.$$

Окончательный вид решения следующий:

$$T_0(t) = \pi/16 \cdot \left[ch\left(\sqrt{3}t\right) - cos(t)\right]. \qquad (16)$$

Случай 2. $k = 1$. **Имеем следующую задачу Коши:**

$$T_1''(t) + T_1(t) = a_1 cos(t)\,, \qquad (13.2)$$

$$T_1\,(0) = 1\,, \qquad (14.2)$$

$$T_1'(0) = 0. \qquad (15.2)$$

Характеристическое уравнение однородного ОДУ $T_1''(t) + T_1(t) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad r_{1,2} = \pm i \in Z$

Общее решение однородного уравнения имеет вид: $Z_0(t) = C_1 cos(t) + D_1 sin(t)$. Поскольку в данном случае имеет место ***резонанс***, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$Z_1(t) = t[P_0 cos(t) + Q_0 sin(t)].$$

Найдём коэффициенты P_0 и Q_0. Для этого найдём $Z_1''(t)$ и подставим $Z_1(t)$ и $Z_1''(t)$ в (13.2) вместо $T_1(t)$ и $T_1''(t)$. Из сравнения левой правой частей находим: $P_0 = 0\,, Q_0 = a_1/2$. Так как $a_n = [(-1)^n - 1]/\pi n^2$, то $a_1 = -2/\pi$. Значит

$$Z_1(t) = -t\,sin(t)/\pi.$$

Т.о. общее решение неоднородного уравнения для $\boldsymbol{T_1(t)}$ имеет вид:

$$T_1(t) = C_1 cos(t) + D_1 sin(t) - t\,sin(t)/\pi.$$

Для нахождения коэффициентов C_1 и D_1 воспользуемся начальными условиями (14.2) и (15.2).

$$T_1(0) = 1 \;\Rightarrow C_1 = 1. \qquad T_0'(0) = 0 \quad \Rightarrow D_1 = 0.$$

Окончательный вид решения следующий:

$$T_1(t) = cos(t) - t\,sin(t)/\pi. \qquad (17)$$

Случай 2. $k = 1$. Имеем следующую задачу Коши:

$$T_n''(t) + \left[4n^2 - 3\right]T_n(t) = a_n cos(t)\,, \qquad (13.3)$$

$$T_n\,(0) = 0, \qquad (14.3)$$

$$T_n'\,(0) = 0. \qquad (15.3)$$

Характеристическое уравнение однородного ОДУ: $T_n''(t) + \left[4n^2 - 3\right]T_n(t) = 0 \quad r^2 + \left[4n^2 - 3\right] = 0$ → имеет мнимые корни $r_{1,2} = \pm i\sqrt{4n^2 - 3} \in Z\,, n \geq 3$. Значит общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$R_0(t) = C_n cos\left(\sqrt{4n^2 - 3}\,t\right) + D_n sin\left(\sqrt{4n^2 - 3}\,t\right).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$R_1(t) = P cos(t) + Q sin(t).$$

Подставляя это решение в (13.3) вместо $T_n(t)$, находим (путём сравнения полученных левой и правой частей) неопределённые коэффициенты: $Q = 0, \quad P = a_n/\left[\left(4n^2 - 3\right) - 1\right]$. Таким образом, частное решение принимает вид:

$$R_1(t) = \frac{a_n}{4[n^2-1]}cos(t) = \frac{[(-1)^n - 1]cos(t)}{4\pi n^2[n^2-1]}.$$

Общее решение неоднородного уравнения для $T_n(t)$ принимает следующий вид:

$$T_n(t) = C_n cos\left(\sqrt{4n^2-3}\,t\right) + D_n sin\left(\sqrt{4n^2-3}\,t\right) + \frac{[(-1)^n - 1]}{4\pi n^2[n^2-1]}cos(t).$$

Для нахождения коэффициентов C_nи D_n воспользуемся начальными условиями **(14.3)** и **(15.3)**.

$$T_n(0) = 0 \quad \Rightarrow C_n = -\frac{[(-1)^n-1]}{4\pi n^2[n^2-1]}. \qquad\qquad T'_n(0) = 0 \quad \Rightarrow D_n = 0.$$

Окончательный вид решения следующий:

$$T_n(t) = \frac{(-1)^n - 1}{4\pi n^2[n^2-1]}\left\{cos(t) - cos\left[\sqrt{4n^2-3}\,t\right]\right\}. \tag{18}$$

Теперь мы можем записать окончательное решение поставленной задачи:

$$u(x,t) = w(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$$

Оно имеет следующий вид:

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}x^2 t + \frac{\pi}{16}\left[ch(\sqrt{3}t) - cos(t)\right] + \left[cos(t) - \frac{1}{\pi}t\,sin(t)\right]cos(2x) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{4\pi n^2[n^2-1]}\left[cos(t) - cos\left[\sqrt{4n^2-3}\,t\right]\right]cos(2nx)$$

4 этап. Мы пришли к следующей ***задаче Коши*** для ОДУ относительно коэффициентов $T_n(t)$:

$$T_n''(t) + \left[4n^2 - 3\right]T_n(t) = a_n\,,$$

$$T_n(0) = \delta_{n,1}\,,$$

$$T_n'(0) = 0.$$

Находим $T_n(t)$. Процесс решения закончен. Подставляем найденные решения $w(x,t)$, $X_n(x)$ и $T_n(t)$ в формулу:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = \sum_{n}^{\infty} T_n(t)X_n(x) + w(x,t)$$

и записываем окончательный ответ.

БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ