Математика

Определенный интеграл

Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, $a < b$. Выполним следующие действия.

1. С помощью точек $x_o=a$, x_1, x_2, ..., $x_n=b$ разобьем отрезок $[a; b]$ на n *частичных отрезков* $[x_o; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$.
2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i= 1,2,…, n$ выберем произвольную точку c_i €$[x_{i-1}; x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$.

Определенный интеграл как предел интегральных сумм

3. Умножим найденное значение функции $f(ci)$ на длину соответствующего частичного отрезка: $f(ci)$4. Составим сумму Sn всех таких произведений:

$$Sn = f(ci) + f(ci) + \ldots + f(ci) \qquad (1)$$

Сумма вида. (1) называется *интегральной суммой* функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: ($i = 1,2,\ \ldots\ ,n$).

Определенный интеграл как предел интегральных сумм

5. Найдем предел интегральной суммы (1), когда $n \to \infty$ что $\lambda \to 0$. Если при этом интегральная сумма *Sn* имеет предел *I*, который не зависит ни от способа разбиения отрезка [*a; b*] на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число *I* называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке [*a; b*] и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

Определенный интеграл как предел интегральных сумм

Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределом интегрирования*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, отрезок $[a; b]$ –*областью (отрезком) интегрирования*.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a; b]$ существует определенный интеграл , называется *интегрируемой* на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла из определения (2)

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: $\int_a^a \mathrm{f}(x)dx = 0$

3. Для любого действительного числа с: $\int_a^b cdx = c \cdot (b-a)$

Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

где α- некоторое число.

Свойства определенного интеграла

2. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Свойства определенного интеграла

3. Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей, т.е. при любых a, b, c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла

4. Если на отрезке [a, b], где $a<b$, $f(x) \leq g(x)$, то обе части неравенства можно почленно интегрировать:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

5.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a, b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

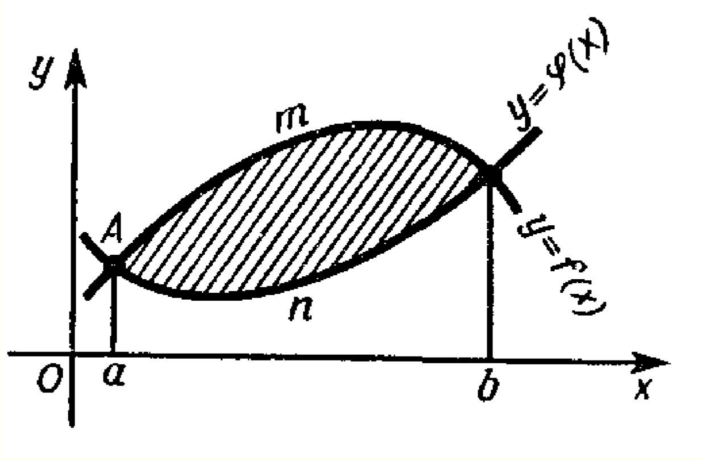
Приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур. Пусть функция *y=f(x)* неотрицательна и непрерывна на отрезке [*a*, *b*]. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла площадь *S* под кривой *y=f(x)* на [*a*, *b*] численно равна определенному интегралу, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Приложения определенного интеграла.

Если плоская фигура ограничена несколькими линиями (см рис.), то формула для вычисления площади такой фигуры имеет вид



$$S=\int_a^b\left(f\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right)dx$$