ЕГЭ **2016**

ЗАДАНИЕ 16 (ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ, ВРЕМЯ – 2 МИН)

ТЕМА: КОДИРОВАНИЕ ЧИСЕЛ. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ.

Вишневская М.П.
МАОУ «Гимназия №3» Фрунзенского района г. Саратова
mpvish55@gmail.com
По материалам сайта http://kpolyakov.spb.ru

ДЕМО ВЕРСИИ **2014, 2015, 2016**

B7 Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись десятичного числа 30 имеет ровно три значащих разряда.

16 Сколько единиц содержится в двоичной записи значения выражения: $4^{2014} + 2^{2015} - 8$?

Ответ: ______________________________.

16 Значение арифметического выражения: $9^8 + 3^5 - 9$ – записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

Ответ: ______________________________.

ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ:

- принципы кодирования чисел в позиционных системах счисления;
- правила перевода из 10-ной в любую другую с.с. и соотношение между 2-ной, 8-ной и 16-ной с.с. ;
- чтобы перевести число 12345_N, из системы счисления с основанием N в десятичную систему, нужно умножить значение каждой цифры на в степени, равной ее разряду:

4 3 2 1 0 ← разряды

$1\,2\,3\,4\,5_N = 1 \bullet N^4 + 2 \bullet N^3 + 3 \bullet N^2 + 4 \bullet N^1 + 5 \bullet N^0$

- последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием N – это остаток от деления этого числа на N
- две последние цифры – это остаток от деления на N^2, и т.д.
- двоичная арифметика (сложение, вычитание, умножение)

Этого было достаточно для решения задач до 2015 года!

ЧТО НУЖНО ЗНАТЬ:

- число 2^N в двоичной системе записывается как единица и N нулей:

$$2^N = 1\underbrace{0000\ldots0}_{N}{}_2$$

- число 2^N-1 в двоичной системе записывается как N единиц:

$$2^N - 1 = \underbrace{11\ldots1}_{N}{}_2$$

- число $2^N–2^K$ при K < N в двоичной системе записывается как N–K единиц и K нулей:

$$2^N - 2^K = \underbrace{11\ldots1}_{N-K}\underbrace{00\ldots00}_{K}{}_2$$

- $2^N + 2^N = 2*2^N = 2^{N+1}$

$2^N = 2^{N+1} - 2^N$

$- 2^N = - 2^{N+1} + 2^N$

ЛЕГЧЕ ОБЪЯСНИТЬ:

- **число 10^N в десятичной (более привычной!) системе записывается как единица и N нулей:**

$$10^N = 1\underbrace{0000\ldots0}_{N}{}_{10}$$ **Пример: $10^4 = 10000$**

- **число $10^N - 1$ в десятичной системе записывается как N девяток (!):**

$$10^N - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{N}{}_{10}$$ **Пример: $10^4 - 1 = 9999$**

- **число $10^N - 10^K$ при K < N в десятичной системе записывается как N–K девяток и K нулей:**

$$10^N - 10^K = \underbrace{99\ldots9}_{N-K}\underbrace{00\ldots0}_{K}{}_{10}$$ **Пример: $10^5 - 10^2 = 100000 - 100 = 99900$**

$$\underbrace{999}_{5-2=3}\underbrace{00}_{2}$$

ПЕРЕХОД К ДРУГИМ С.С.:

- **число 3^N в троичной системе записывается как единица и N нулей:**

$$3^N = 1\underbrace{0000\ldots0}_{N}{}_3$$

- **число 3^N-1 в троичной системе записывается как N двоек:**

$$3^N - 1 = \underbrace{222\ldots2}_{N}{}_3$$

- **число $3^N – 3^K$ при $K < N$ в троичной системе записывается как N–K двоек и K нулей:**

$$3^N - 3^K = \underbrace{222\ldots2}_{N-K}\underbrace{00\ldots00}_{K}{}_3$$

ОБЩАЯ СХЕМА:

- число a^N в с.с. с основанием a записывается как единица и N нулей:

$$a^N = \underbrace{10000\ldots.0}_{N}{}_a$$

- число a^N-1 в с.с. с основанием a записывается как N раз (a-1):

$$a^N - 1 = \underbrace{(a\text{-}1)(a\text{-}1)\ldots(a\text{-}1)}_{N}{}_a$$

- число a^N–a^K при K < N в с.с. основанием a записывается как N–K (a-1) и K нулей:

$$a^N - a^K = \underbrace{(a\text{-}1)(a\text{-}1)\ldots(a\text{-}1)}_{N\text{-}K}\underbrace{00\ldots00}_{K}{}_a$$

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Сколько значащих нулей содержится в двоичной записи числа, которое можно представить в виде

$$8^{510} + 4^{1500} - 16 ?$$

Алгоритм:

- **Все переводим в степени двойки;**
- **NB! Как представить 16?**
- **Выстраиваем всю запись по возрастанию степени (!!!);**

$$2^{3000} + 2^{1530} – 2^4 =$$

$$2^{3000} = 100000…000 \text{ (1 и 3000 нулей)}$$

$$2^{1534} - 2^4 = 11111…1111\ 0000 \text{ (1530 единиц и 4 нуля)}$$

Получаем в результате сложения: 100000…00011111….11110000

Нулей: 3000 – 1530 + 4 = 1474

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

- Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{1023} + 2^{1024} – 3$?

  $3 = 4-1$, $2^{3069} + 2^{1024} – 2^2 + 2^0$!!! Избегать большого количества «-»

- Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2016} + 2^{2018} – 6$?

  $6 = 8 – 2$, $2^{4032} + 2^{2018} – 2^3 + 2^1$

- Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2014} + 2^{2015} – 9$?

  $2^{4028} + 2^{2015} – 1001_2$

- Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2015} + 2^{2015} – 15$?

  $15 = 16 – 1$, $2^{4030} + 2^{2015} – 2^4 + 2^0$

- Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{2014} – 2^{614} + 45$?

  $45 = 101101_2$, $2^{6042} – 2^{614} + 101101_2$

- Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{1014} – 2^{530} – 12$?

  $12 = 1100_2$, $2^{3042} – 2^{530} – 1100_2$

ОТВЕТЫ:

1	1024
2	2017
3	2015
4	2013
5	5432
6	3038

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Сколько единиц в двоичной записи числа $2^{2014} - 4^{650} - 38$?

$$2^{2014} - 4^{650} - 38 = 2^{2014} - \left(2^2\right)^{650} - 2^5 - 2^2 - 2^1 =$$

$$= 2^{2014} - 2^{1300} - 2^5 - 2^2 - 2^1 =$$

$$= \underbrace{2^{2014} - 2^{1301}}_{\substack{\text{713 единиц,} \\ \text{1301 нуль}}} + \underbrace{2^{1300} - 2^6}_{\substack{\text{1294 единиц,} \\ \text{6 нулей}}} + \underbrace{2^5 - 2^3}_{\substack{\text{2 единицы,} \\ \text{3 нуля}}} + \underbrace{2^2 - 2^1}_{\substack{\text{1 единица,} \\ \text{1 нуль}}}$$

Итого: 713 + 1294 + 2 + 1 = 2010

Использование $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Значение арифметического выражения: $9^8 + 3^5 – 2$ – записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

$$9^8 + 3^5 - \underbrace{2}_{2 = 3 - 1} = \underbrace{3^{16}}_{\substack{\text{1 единица,} \\ \text{16 нулей}}} + \underbrace{3^5 - 3^1}_{\substack{\text{4 двойки,} \\ \text{1 нуль}}} + \underbrace{3^0}_{\text{1 единица}}$$

Итого: 4

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Значение арифметического выражения: $5 \cdot 36^7 + 6^{10} - 36$ записали в системе счисления с основанием 6. Сколько цифр «5» содержится в этой записи?

$$5 * 36^7 + 6^{10} - 36 = (6-1) * 6^{14} + 6^{10} - 6^2 =$$

$$= \underbrace{6^{15} - 6^{14}}_{\text{1 пятерка, 14 нулей}} + \underbrace{6^{10} - 6^2}_{\text{8 пятерок, 2 нуля}}$$

Итого: 8 + 1 = 9

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Какая первая цифра в шестнадцатеричной записи числа $2^{379}+2^{378}+2^{377}$?

$$\underbrace{2^{379}}_{\text{1 единица, 379 нулей}} + \underbrace{2^{378}}_{\text{1 единица, 378 нулей}} + \underbrace{2^{377}}_{\text{1 единица, 377 нулей}}$$

$\underbrace{11100000.........0000_2}_{\text{3 единицы, 377 нулей}}$ переводим в 16 с.с. с помощью тетрад: 377:4 = 94 и 1 «0» в остатке

Итого: $1110_2=E_{16}$

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Сколько единиц в двоичной записи числа $(2^{4400} – 1)\cdot(4^{2200} + 2)$?

$$(2^{4400} - 1) * (4^{2200} + 2) = (2^{4400} - 1) * (2^{4400} + 2) =$$

$$= \underbrace{2^{8800}}_{\text{1 единица, 8800 нулей}} + \underbrace{\underbrace{2^{4401} - 2^{4400}}_{\text{1 единица, 4400 нулей}} - \underbrace{2^{1}}_{\text{1 единица, 1 нуль}}}_{\mathbf{2^{4400}} \; - \; \mathbf{2^{1}} = \underbrace{1111111\ldots.11110}_{4399}}$$

Итого: 1 +4399 = 4400

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Сколько единиц в двоичной записи числа $(2^{4400} – 1)\cdot(4^{2200} + 2)$?

$$(2^{4400}-1)*(4^{2200}+2)=(2^{4400}-1)*(2^{4400}+2)=$$

$$=\underbrace{11111....1111}_{\text{4400 единиц}}*100000...010$$

$$\begin{array}{r} \times\ 1111 \\ 1010 \\ \hline 1111 \\ +\ 1111 \\ \hline 1001011 \end{array}$$

Количество единиц не меняется!

Итого: 4400

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Некоторое число *X* из десятичной системы счисления перевели в системы счисления с основаниями 16, 8, 4. Часть символов при записи утеряна. Позиции утерянных символов обозначены знаком *:

$$\mathbf{X = {*7*}_{16} = 5{*}6_8 = {***1*}_4}$$

Определите число *X*.

Представим все числа в 2 с.с.

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{{*7*}_{16}} & \mathbf{=} & \mathbf{* * * * 0111 * * * *_2} \\ \mathbf{5{*}6_8} & \mathbf{=} & \mathbf{101 * * * 1 1 0_2} \\ \mathbf{{***1*}_4} & \mathbf{=} & \mathbf{* * * * * * 0 1 * *_2} \\ \hline & & \mathbf{101110110_2} \end{array}$$

Итого: $\mathbf{101110110_2}$ = 374

ПРИМЕР С РЕШЕНИЕМ:

Некоторое число X из десятичной системы счисления перевели в системы счисления с основаниями 16, 8. Часть символов при записи утеряна. Позиции утерянных символов обозначены *:

$X = {*}5_{16} = {*}0{*}_8$.

Сколько чисел соответствуют условию задачи?

Представим все числа в 2 с.с.

$${*}5_{16} = \;{*}\,{*}\,{*}\,{*}01\;01_2$$
$${*}0{*}_8 = {*}\,{*}\,{*}\;000\;{*}\,{*}\,{*}_2$$

$$\underbrace{{*}\,{*}}\,000101_2$$

$\cancel{00}$

01

10

11

Итого: 3