

Расчет неразветвленной электрической цепи синусоидального тока

Для расчета режима неразветвленной электрической цепи применяют комплексный метод. Представим все синусоидальные величины их комплексами:

$$\dot{E} = E \cdot e^{j\psi_e}; \quad \dot{I} = I \cdot e^{j\psi_i}; \quad \dot{U}_R = U_R \cdot e^{j\psi_{uR}};$$

$$\dot{U}_L = U_L \cdot e^{j\psi_{uL}}; \quad \dot{U}_C = U_C \cdot e^{j\psi_{uC}}.$$

Порядок расчета такой же, как на постоянном токе. Во-первых, стрелками изображаем положительные направления тока, ЭДС и напряжений. Во-вторых, выбираем направление обхода контура по направлению движения часовой стрелки и записываем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_L + \dot{U}_R + \dot{U}_C = j\omega L \dot{I} + R \dot{I} - j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = \dot{E}. \quad (1)$$

Выражения $R\dot{I}$, $j\omega L\dot{I} = jX_L\dot{I}$, $-j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = -jX_C\dot{I}$ отражают особенности проявления закона Ома для резистивного, индуктивного и емкостного элементов электрической цепи:

$$\dot{U}_R = R\dot{I}; \quad \dot{U}_L = jX_L\dot{I}; \quad \dot{U}_C = -jX_C\dot{I}.$$

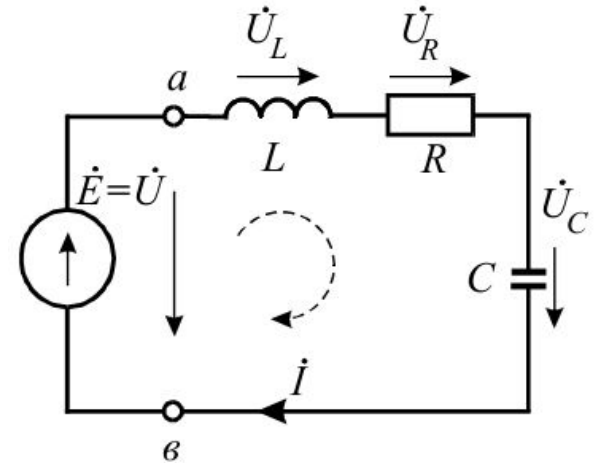
Здесь умножение на $+j$ означает, что напряжение \dot{U}_L опережает по фазе ток \dot{I} на 90° , умножение на $-j$ означает, что напряжение \dot{U}_C отстает по фазе от тока \dot{I} на 90° .

Из (1) находим комплексный ток в цепи:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

или (так как $\dot{E} = \dot{U}$)

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$



где $\dot{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} = \dot{E} = E \cdot e^{j\varphi_e}$ – напряжение между выводами *ав* неразветвленной цепи

Величина, стоящая в знаменателе,

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C),$$

называется *комплексным сопротивлением* (неразветвленной цепи).

Величина, обратная комплексному сопротивлению, называется *комплексной проводимостью*:

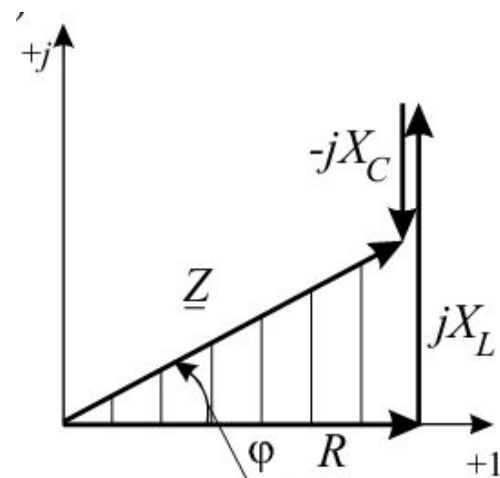
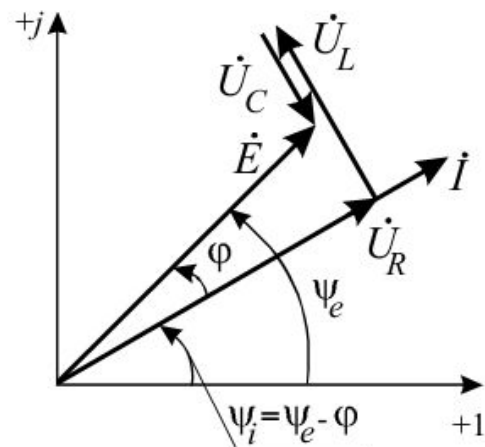
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

На рисунке построена векторная диаграмма тока и напряжений неразветвленной цепи для случая: $X_L > X_C$.

Обычно векторная диаграмма строится в конце расчета по полученным значениям тока и напряжений. При этом проверяется правильность расчета.

Поделив все составляющие векторной диаграммы на \dot{I} , получаем значения комплексных сопротивлений R , jX_L , $-jX_C$, \underline{Z} и изображаем комплексные сопротивления на комплексной плоскости получаем диаграмму, подобную диаграмме тока и напряжений.

“Треугольник сопротивлений” (заштрихованная площадь), стороны которого соответствуют сопротивлениям $X = X_L - X_C$, R и \underline{Z} .



Анализ диаграммы сопротивлений позволяет перейти от алгебраической формы записи комплексного сопротивления к тригонометрической и показательной формам:

$$\underline{Z} = z \cdot \cos \varphi + jz \cdot \sin \varphi;$$

$$\underline{Z} = z \cdot e^{j\varphi},$$

где $z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ – модуль комплексного сопротивления или полное сопротивление;

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R}$ – аргумент комплексного сопротивления.

В зависимости от знака величины $(X_L - X_C)$ аргумент комплексного сопротивления может быть либо положительным (индуктивный характер), либо отрицательным (емкостный характер).

Подставив комплексное сопротивление в формулу комплексного тока, получим закон Ома для неразветвленной цепи:

$$\underline{\dot{I}} = \frac{\underline{\dot{E}}}{\underline{Z}} = \left(\frac{E}{z} \right) \cdot e^{j(\psi_e - \varphi)}, \text{ или } \underline{\dot{I}} = I \cdot e^{j\psi_i} = \frac{\underline{\dot{U}}}{\underline{Z}} = \left(\frac{U}{z} \right) \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)}, \quad I = \frac{U}{z};$$

$$\psi_i = \psi_u - \varphi.$$

При нескольких последовательно соединенных элементах комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = \sum R + j\left(\sum X_L - \sum X_C\right) = R + jX,$$

где $R = \sum R$ – активное сопротивление цепи;

$X = \sum X_L - \sum X_C$ – реактивное сопротивление цепи.

В активном сопротивлении происходит *необратимое* преобразование электрической энергии в другие виды энергии, а в реактивном сопротивлении – не происходит.

Полное сопротивление и аргумент комплексного сопротивления можно рассчитывать по формулам:

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + X^2};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{R}\right).$$

Анализ разветвленных электрических цепей

Полная комплексная проводимость электрической цепи определяется согласно закону Ома

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G - j(B_L - B_C) = Y e^{-j\varphi}, \text{ Ом},$$

где G – активная проводимость цепи, См;

B_L – индуктивная составляющая проводимости, См;

B_C – емкостная составляющая проводимости, См,

причем модуль полной комплексной проводимости

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}, \text{ См},$$

а фаза $\varphi = \text{arctg} \frac{B_L - B_C}{G}$, град.

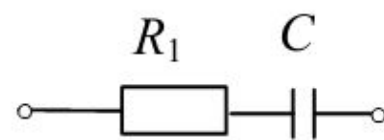
Величины G , B_L , B_C могут быть вычислены также исходя из заданных параметров электрической цепи. И в общем виде можно сказать, что величина проводимости какой-то ветви прямо пропорциональна соответствующему сопротивлению ветви и обратно пропорциональна квадрату модуля полного комплексного сопротивления этой же ветви.

Так для ветви, содержащей активное сопротивление и емкость величины проводимостей

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_C^2}, \quad B_C = \frac{X_C}{R_1^2 + X_C^2};$$

$$\underline{Y}_1 = G_1 - (-jB_C) = Y_1 \cdot e^{-j\varphi_1}; \quad Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_C^2},$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{-B_C}{G_1}.$$

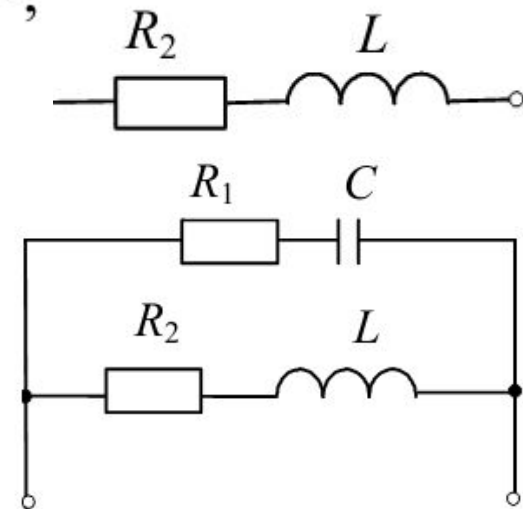


Для ветви, содержащей последовательно соединенные активное сопротивление и индуктивность, проводимости запишутся в виде

$$G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_L^2}, \quad \underline{Y}_2 = G_2 - jB_L = Y_2 \cdot e^{-j\varphi_2},$$

$$B_L = \frac{X_L}{Z_2^2} = \frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2}, \quad Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_L^2},$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{B_L}{G_2}\right).$$



Если эти ветви включены параллельно друг другу, то полная комплексная проводимость такой цепи запишется как

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = (G_1 + G_2) - j(B_L - B_C) = G - j(B_L - B_C) =$$

$$= \left(\frac{R_1}{R_1^2 + X_C^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_L^2} \right) - j \left(\frac{X_L}{R_2^2 + X_L^2} - \frac{X_C}{R_1^2 + X_C^2} \right).$$

Мощность в цепях переменного тока определяется независимо от способа соединения элементов.

Алгоритм решения задач (классический вариант):

- 1) определяется угловая частота сети;
- 2) вычисляются величины реактивных сопротивлений элементов электрической цепи и определяются:
 - комплексные сопротивления ветвей,
 - комплексные проводимости ветвей,
 - полная комплексная проводимость цепи,
- 3) ток на входе электрической цепи,
- 4) токи в ветвях цепи,
- 5) комплексное значение полной мощности;
- 6) по полученным данным строится векторная диаграмма напряжения и токов.

Мощность в линейных цепях синусоидального тока

В линейных цепях синусоидального тока имеют место три вида мощности:

- активная;
- реактивная;
- полная.

Активная мощность – это мощность необратимого преобразования электрической энергии в другие виды энергии в резистивных элементах цепи. В источниках электрической энергии активная мощность P рассчитывается по формулам:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi ,$$

$$P = \operatorname{Re}(\dot{U} \cdot \bar{I}),$$

где U – действующее значение напряжения в ИЭЭ, В;

I – действующее значение тока в ИЭЭ, А;

\dot{U} – комплекс действующего значения напряжения, В;

\bar{I} – комплексно-сопряженное значение тока, А;

φ – угол сдвига фаз между током и напряжением.

В резистивных элементах активная мощность определяется по формуле:

$$P = I^2 \cdot R$$

где R – сопротивление резистивного элемента, Ом;

I – сила тока через него, А.

В реактивных элементах *реактивная мощность* Q определяется по формулам:

$$Q = I^2 \cdot X$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

$$Q = \text{Im}(\dot{U} \cdot \bar{I})$$

Полная мощность определяется по формуле:

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \bar{I} = P + jQ,$$

где \bar{I} – комплексно-сопряженное значение тока, протекающего через соответствующий элемент, А;

\dot{U} – комплекс напряжения на этом элементе, В;

Резонансные явления в цепях синусоидального тока

Последовательное соединение приемников

Резонансом напряжений называется явление, возникающее в цепи, содержащей последовательно соединенные реактивные элементы (индуктивные и емкостные), при совпадении тока и напряжения по фазе ($\phi = 0$), он имеет место при отсутствии реактивного сопротивления ($X = 0$). При этом величины напряжений (по модулю) на идеальных реактивных элементах (емкости и индуктивности) равны друг другу, а, стало быть, напряжение на активном сопротивлении равно напряжению питания. Ток в цепи определяется только величиной активного сопротивления. При этом напряжения на реактивных элементах могут в несколько раз превышать напряжение питания. Если это не расчетный режим цепи, то превышение напряжения на реактивных элементах может привести к электрическому пробое и тепловому, необратимому, повреждению элементов. Параметр, показывающий превышение напряжениями на реактивных элементах напряжения питания, называется добротностью резонансного контура:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}.$$

Параллельное соединение приемников

При параллельном соединении реактивных элементов возникает резонанс токов, и аналогично резонансу напряжения токи реактивных элементов могут намного превысить ток в неразветвленной части схемы. Превышение тока также характеризуется добротностью резонансного контура

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}.$$

Условие возникновения резонанса токов: $B = 0$.