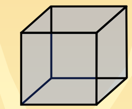
Объёмы тел

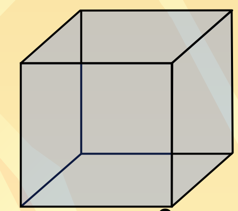
Понятие объёма

За единицу измерения объёмов примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром 1 см называют кубическим сантиметром и обозначают см^3. Аналогично определяются кубический метр (м^3), кубический миллиметр (мм^3).

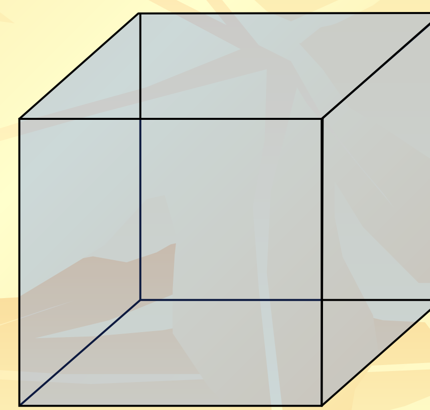
При выбранной единице измерения объём каждого тела выражается положительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения объёмов и частей единицы содержится в данном теле.



1 мм^3



1 см^3

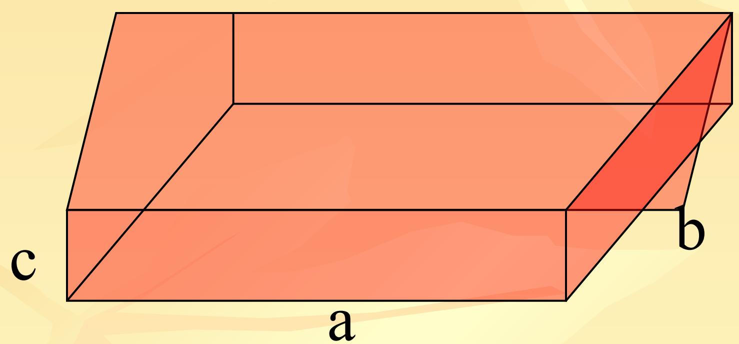


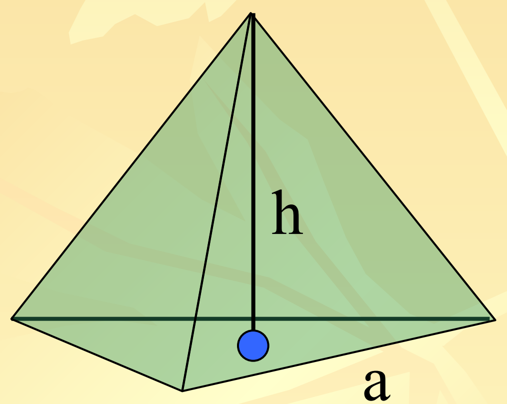
1 м^3

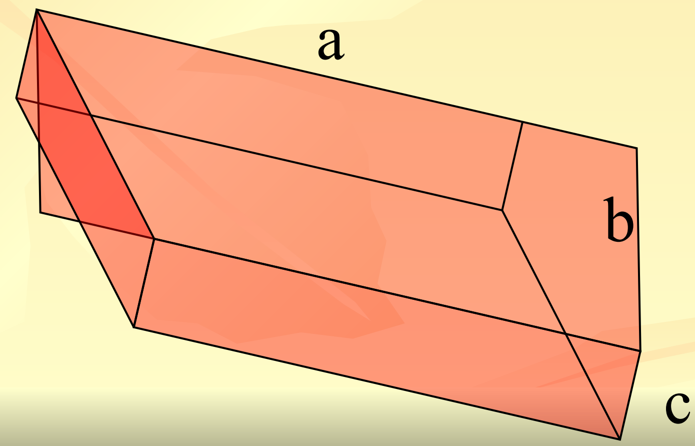
Свойства объёмов
I свойство

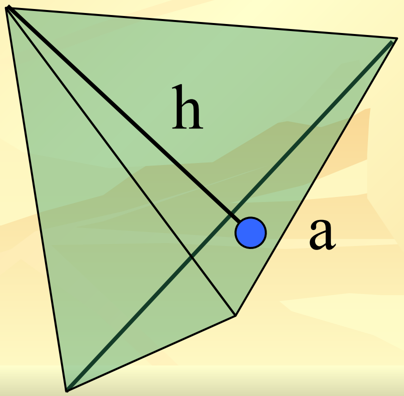
Равные тела имеют равные объёмы.

(Два тела называются равными, если их можно совместить наложением).



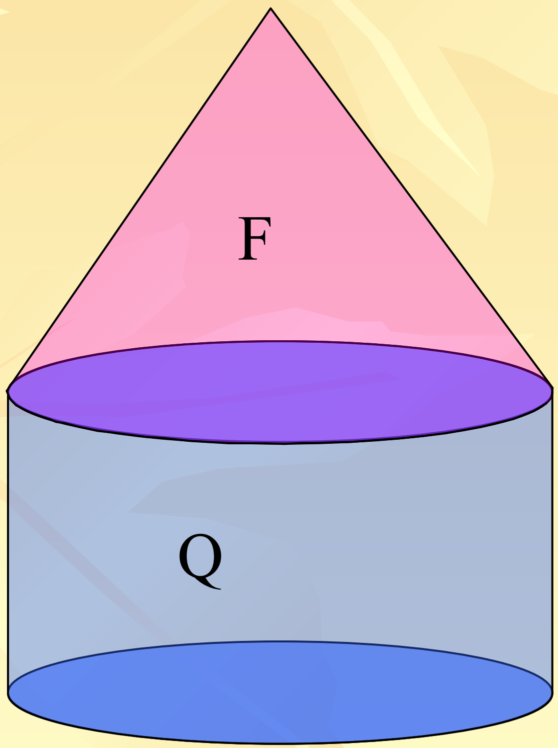




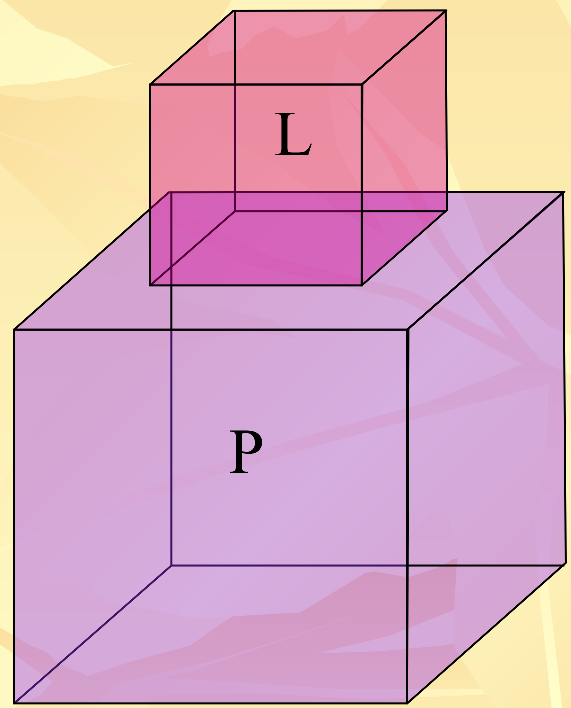


Свойства объёмов
II свойство

Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.



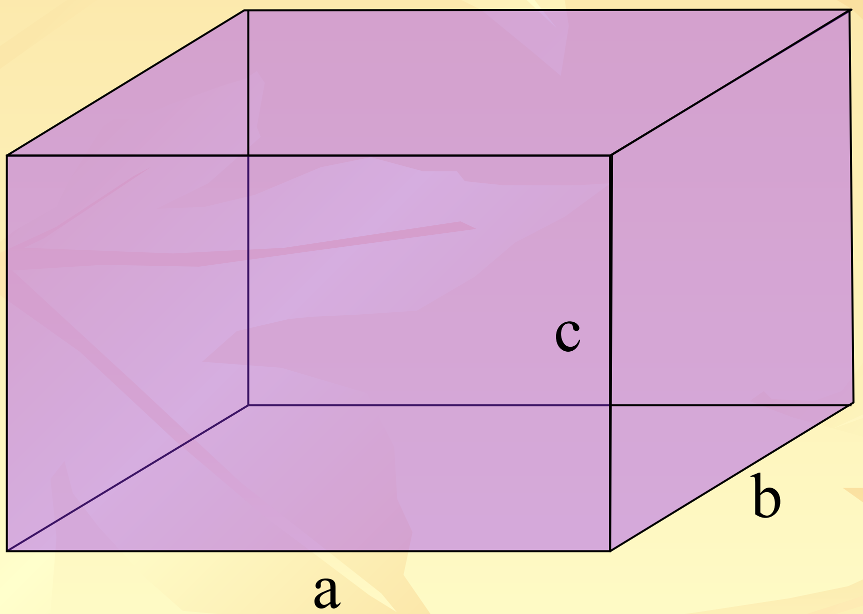
$V = V_F + V_Q$



$V = V_L + V_P$

Объём прямоугольного параллелепипеда

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

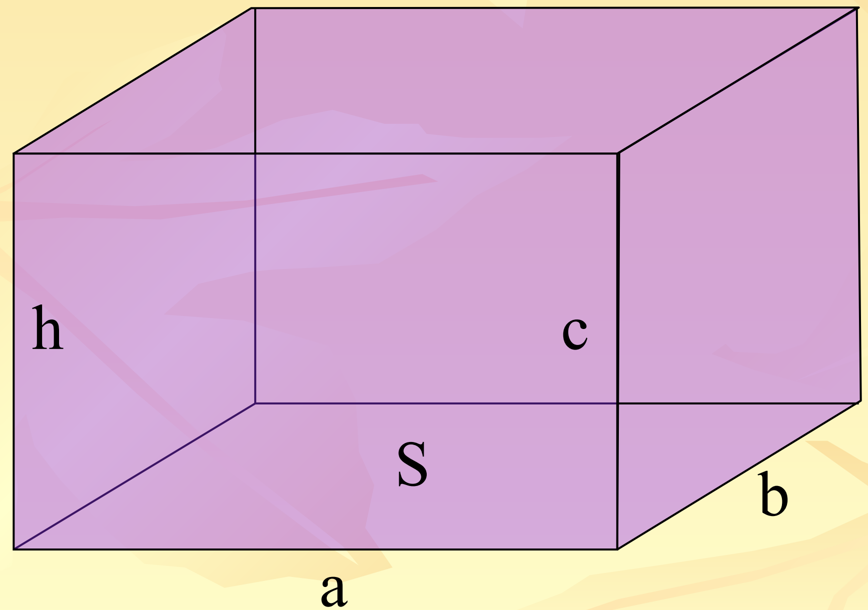


$V = abc$

Объём прямоугольного параллелепипеда

Следствие I

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.



$ab = S$

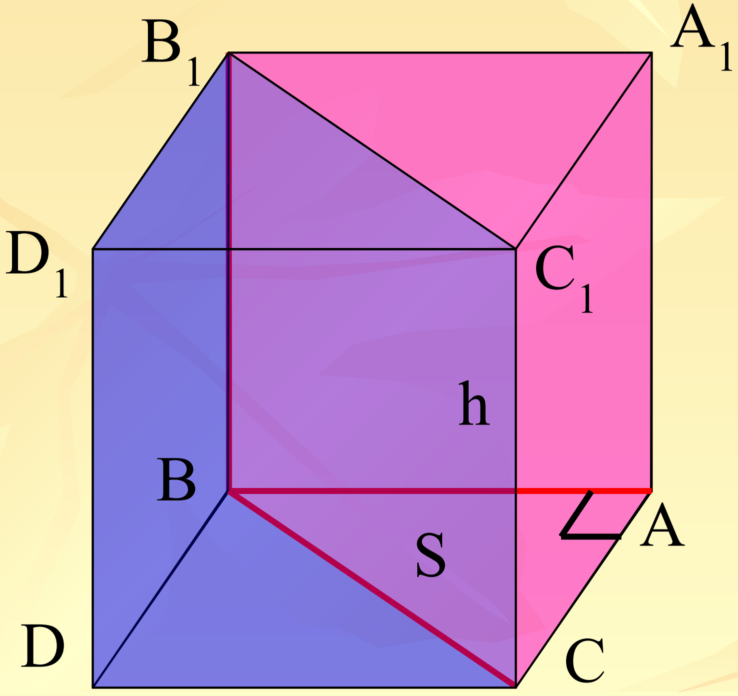
$c = h$

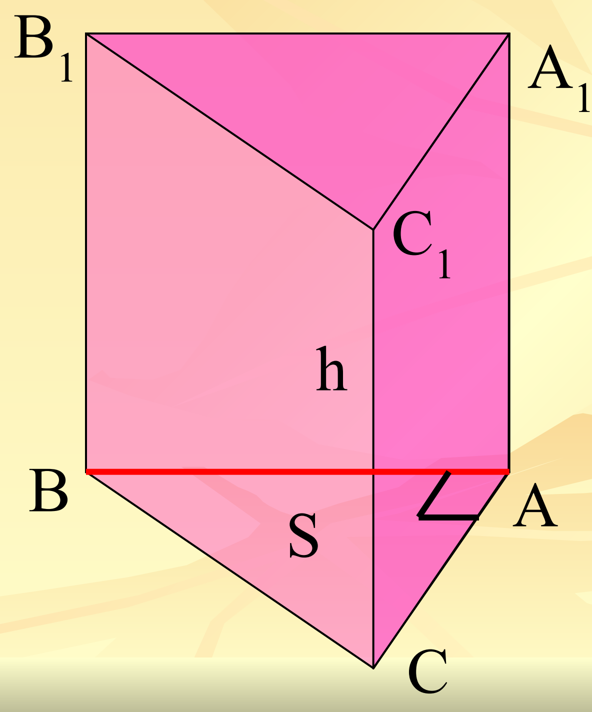
$$V = Sh$$

Объём прямоугольного параллелепипеда

Следствие II

Объём прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

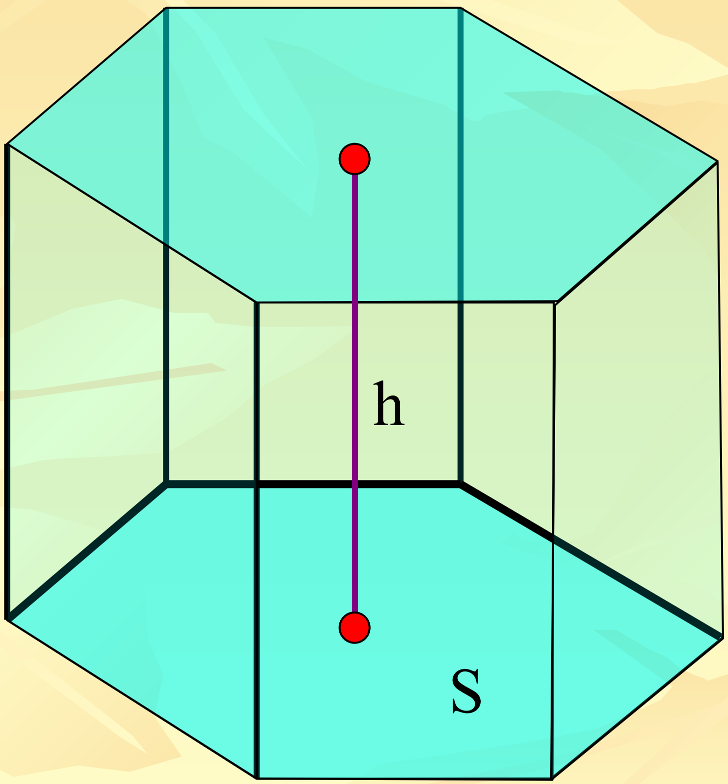




$$V = Sh$$

Объём прямой призмы

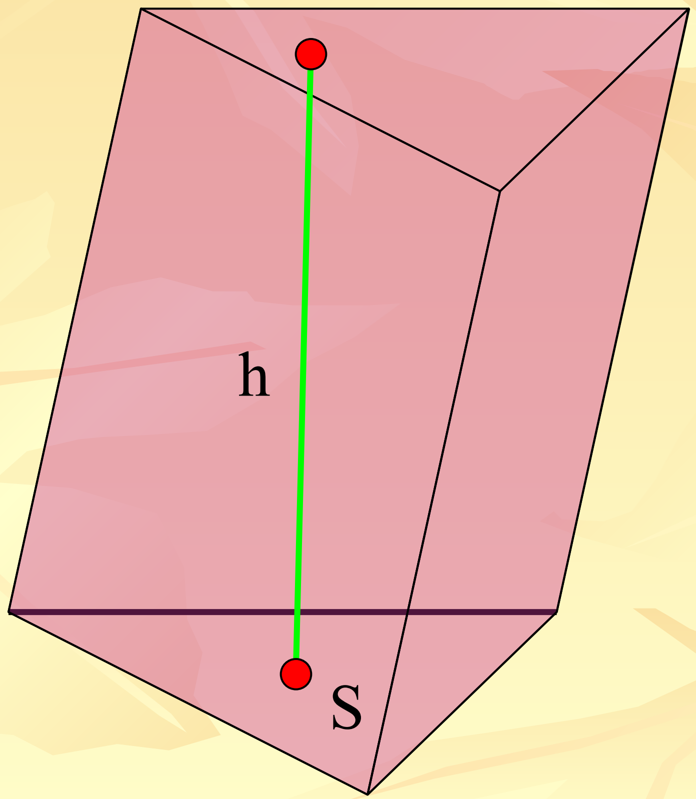
Объём прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.



$V = Sh$

Объём наклонной призмы

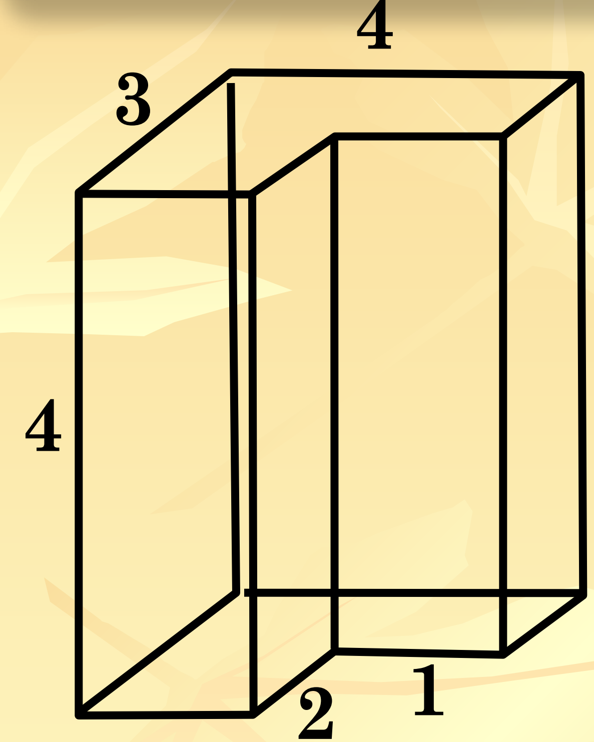
Объём наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.

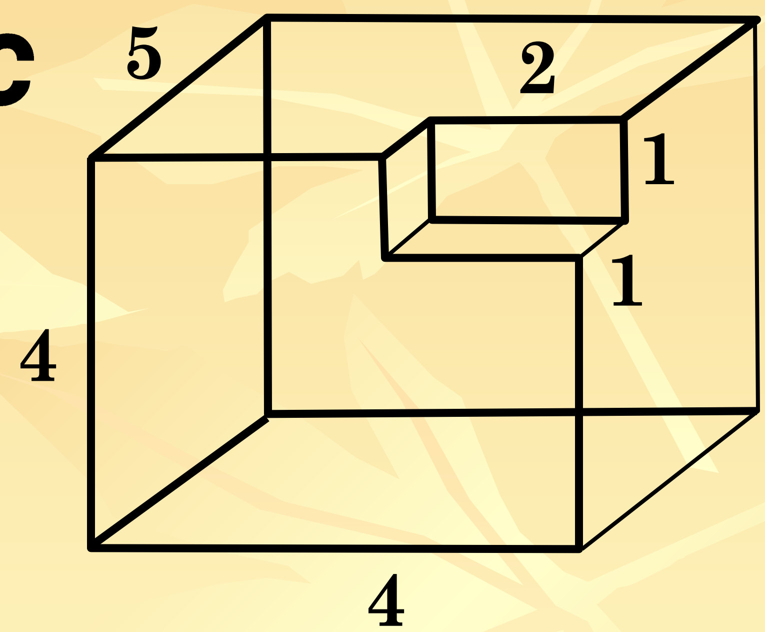


$$V = Sh$$

№ 25579. Найти объёмы составных многогранников.

$V = abc$





$V=4\cdot3\cdot3+1\cdot1\cdot4=36+4=40$

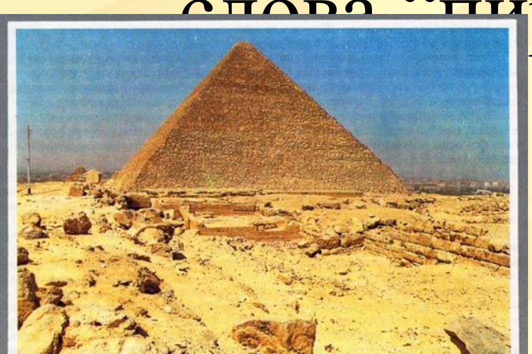
$V=4\cdot4\cdot3 - 2\cdot1\cdot4=48-8=40$

$V=4\cdot4\cdot5-2\cdot1\cdot1=78$

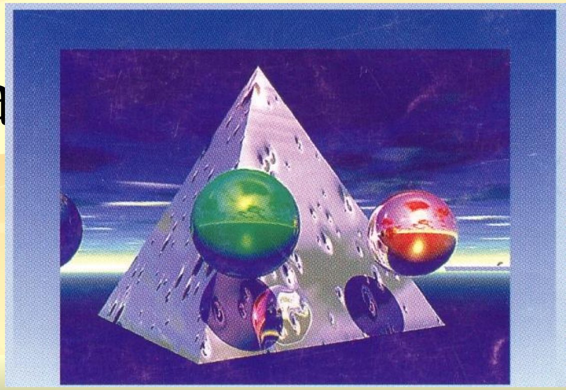
B13	4	0				

B13	7	8				

Термин “пирамида” заимствован из греческого “пирамис” или “пирамидос”. Греки в свою очередь позаимствовали это слово, как полагают, из египетского языка. В папирусе Ахмеса встречается слово “пирамус” в смысле ребра правильной пирамиды. Другие считают, что термин берет свое начало от форм хлебцев в Древней Греции “пирос” - рожь). В связи с тем, что форма пламени иногда напоминает образ пирамиды, некоторые средневековые ученые считали, что термин происходит от греческого слова “пир” - огонь. Вот почему ... геом... пира... “о... ело”

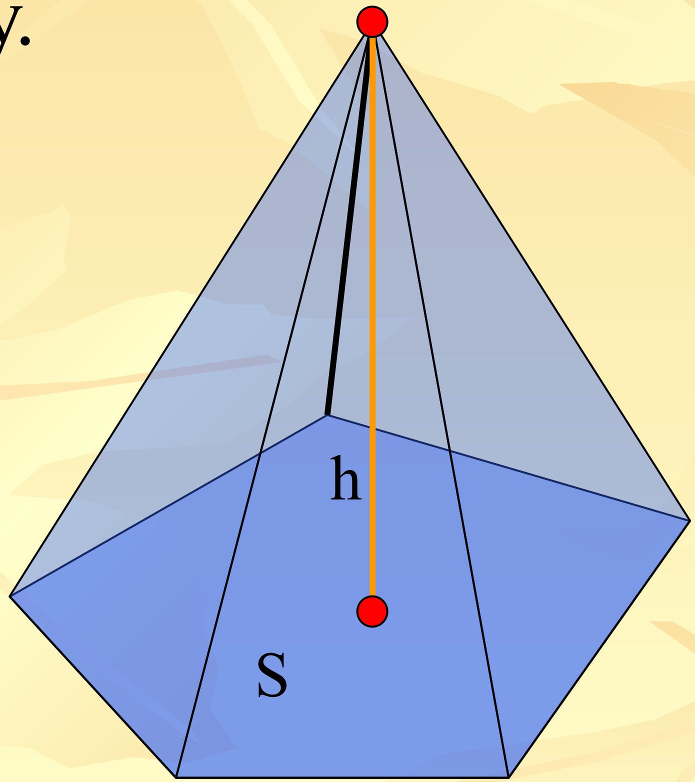


Пирамида фараона Хуфу, или Хеопса.
Первая половина III тыс. до н. э.



Объём пирамиды

Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.



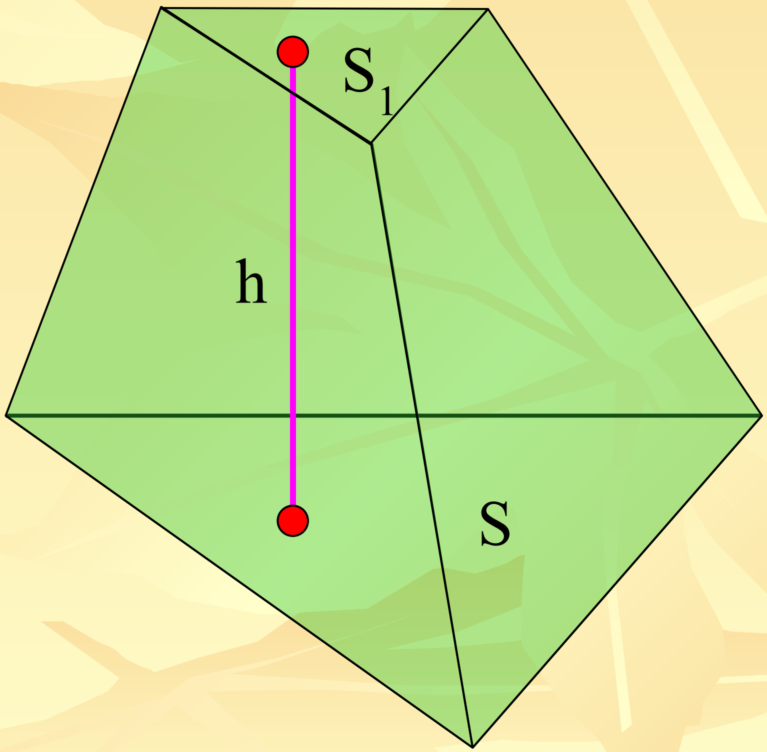
$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} h$$

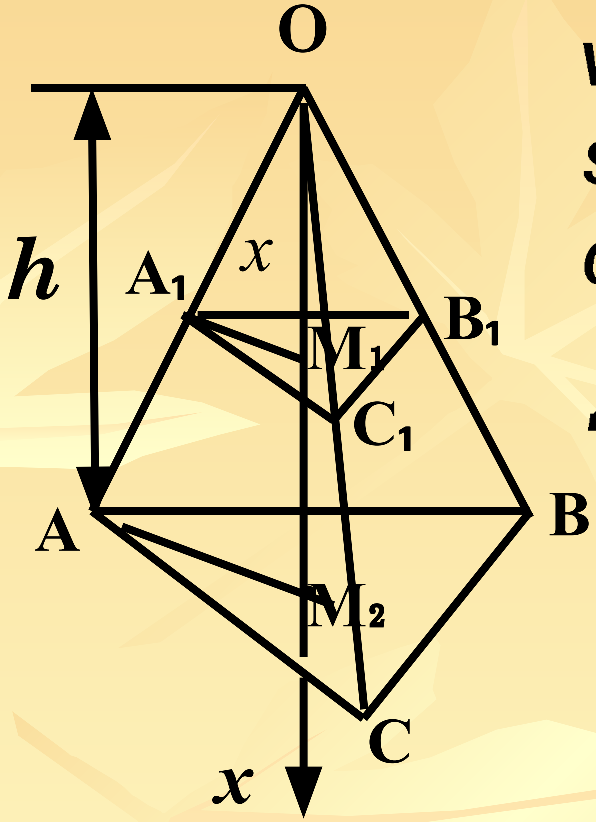
Объём пирамиды

Следствие

Объём V усечённой пирамиды, высота которой равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$





I. Дано: $OABC$ - пирамида,

V - объём,

S - площадь ΔABC,

$OM_2 = h$ (высота пирамиды).

Доказать: $V = \frac{1}{3} S_{осн.} h$.

Доказательство:

$$1)\ V = \int_0^h S(x)\,dx$$

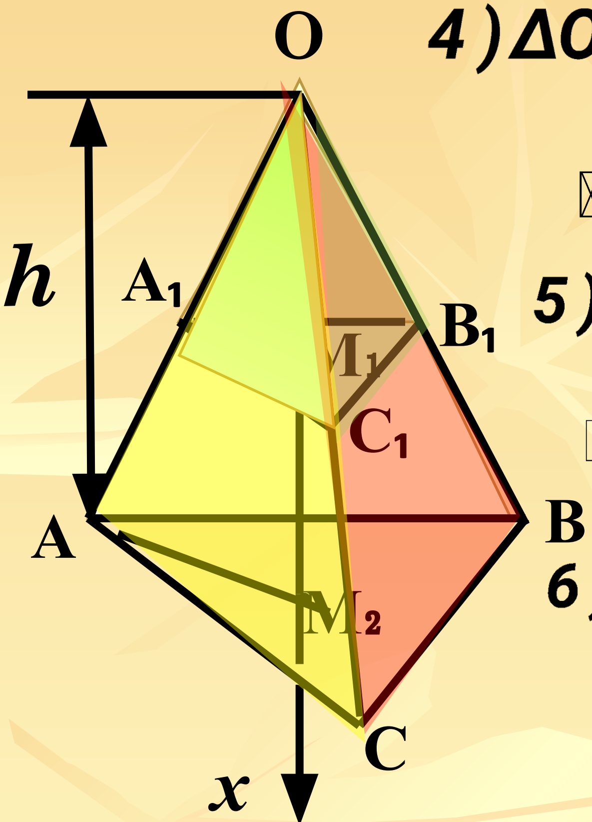
$2)\ OX: h \perp OX$

$A_1B_1C_1 \parallel ABC$

$OM_1 = x,\ M_1 \in \Delta A_1B_1C_1$

$S(x)$ - площадь сечения

$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$



4) $\Delta OAB: AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$$

5) $\Delta OAC: A_1C_1 \parallel AC \Rightarrow \Delta OA_1C_1 \sim \Delta OAC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{OC_1}{OC}$$

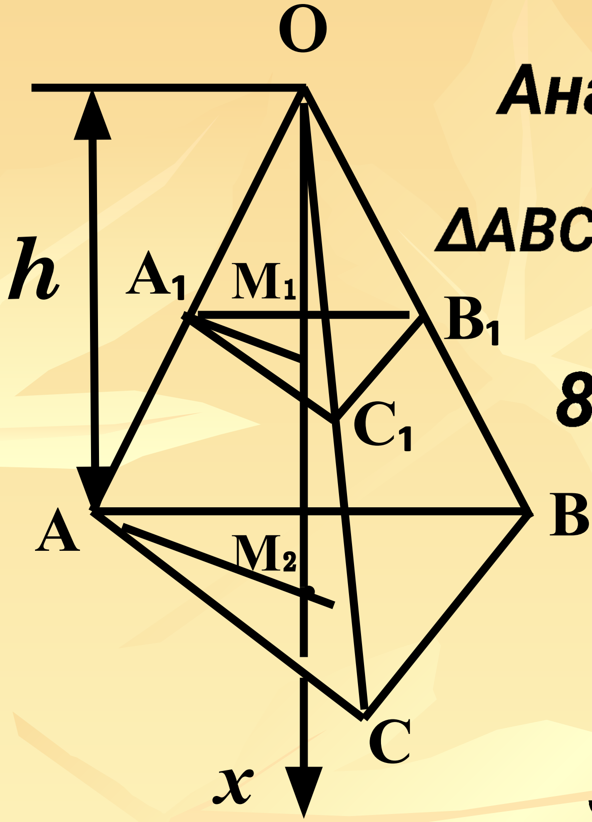
6) $\Delta OCB: B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow \Delta OB_1C_1 \sim \Delta OBC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{OB_1}{OB}$$

7) ΔOA_1M_1 и ΔOAM_2: $\angle M = \angle M_1 = 90^\circ$, $\angle O$ - общий $\Rightarrow$

$$\Delta OA_1M_1 \sim \Delta OAM_2 \Rightarrow \frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{x}{h}$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA} = \frac{x}{h} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{x^2}{h}$$



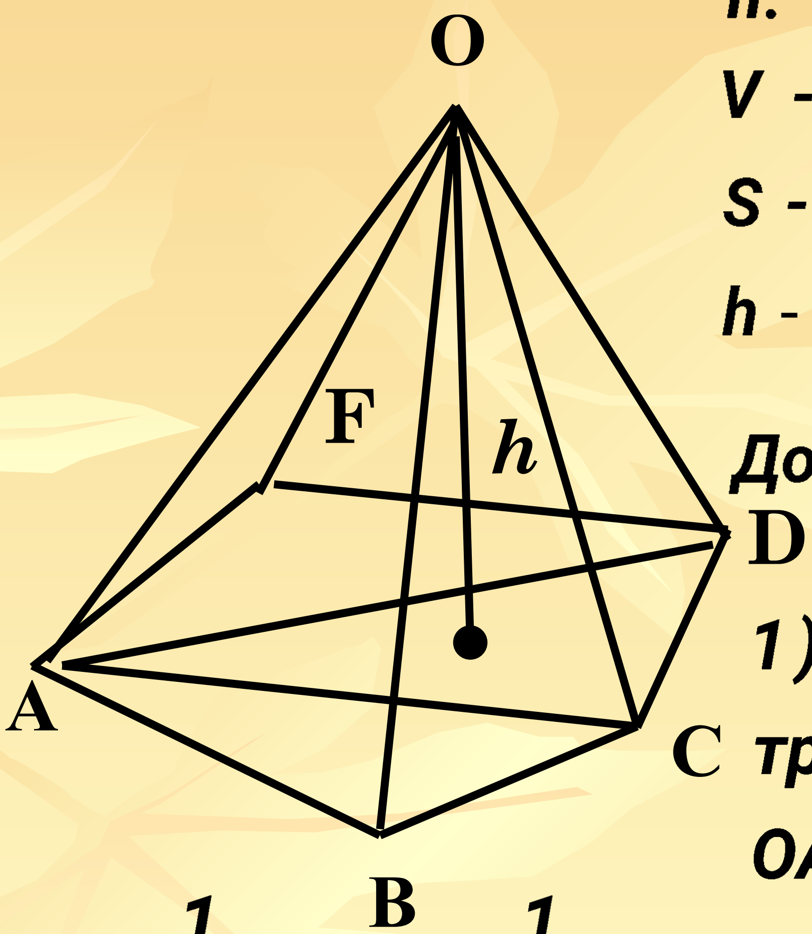
Аналогично $: \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{x}{h}; \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 : \frac{x}{h}$ - коэффициент подобия

$$8)\ \frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$$

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx =$$

$$= \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \boxed{\frac{1}{3}Sh}$$



II. Дано: OABCDF – пирамида,

V – объём,

S – площадь ABCDF,

h – высота пирамиды.

Доказать: $V = \frac{1}{3}S_{осн.}h$.

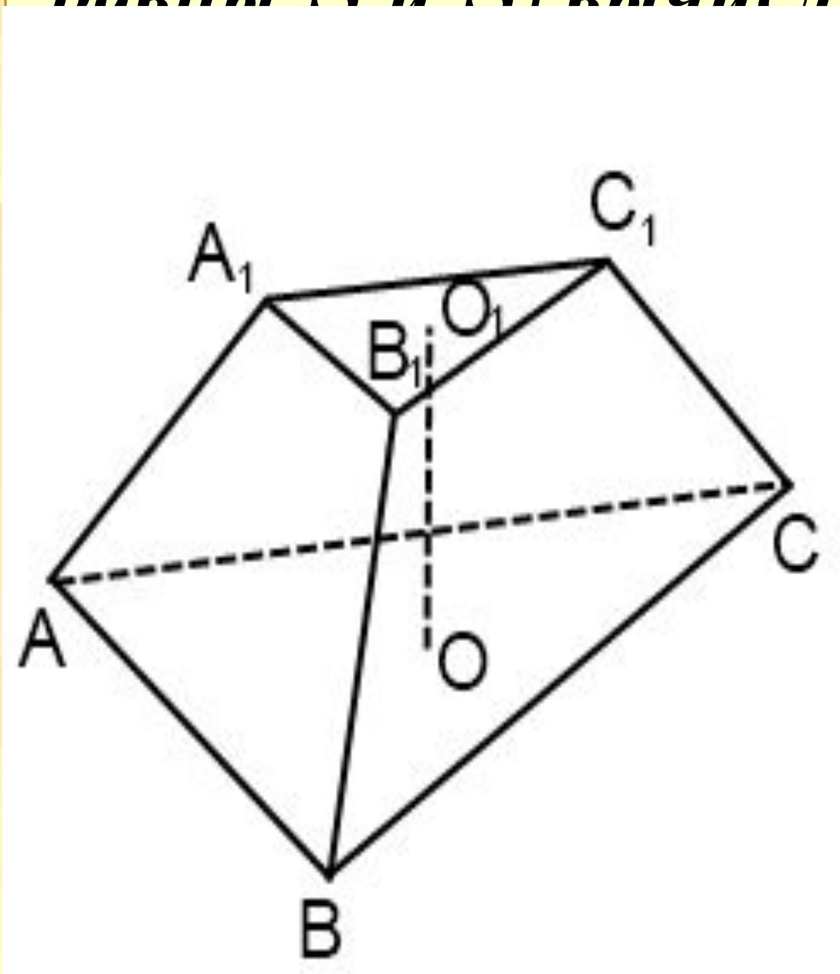
Доказательство:

1) Разобьём пирамиду на три треугольные: OABC, OACD, OADF;

2) $V = \frac{1}{3}S_{AFD}h + \frac{1}{3}S_{ADC}h + \frac{1}{3}S_{ABC}h =$

$= \frac{1}{3}h(S_{AFD} + S_{ADC} + S_{ABC}) = \boxed{\frac{1}{3}S_{осн.}h}$

Теорема: ***Объём усечённой пирамиды, высота которой h, а площади оснований равны S и S_1 вычисляется по формуле.***

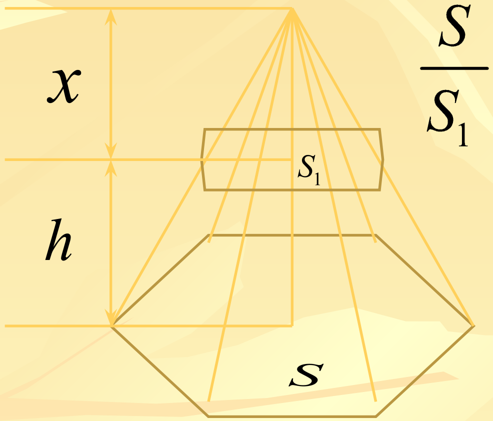


$$V = \frac{1}{3} h \cdot (S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$

- Объем усеченной пирамиды будем рассматривать как разность объемов полной пирамиды и той, что отсечена от нее плоскостью, параллельной основанию

Объем полной пирамиды $V=\frac{1}{3}Sh$

$$V=\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}Sx-\frac{1}{3}S_1x=\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}x(S-S_1) \quad (1)$$



$$\frac{S}{S_1}=\frac{(h+x)^2}{x^2} \rightarrow \sqrt{S}x=\sqrt{S_1}h+\sqrt{S_1}\,x \rightarrow$$

$$\sqrt{S}x-\sqrt{S_1}x=\sqrt{S_1}h$$

$$x=\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}$$

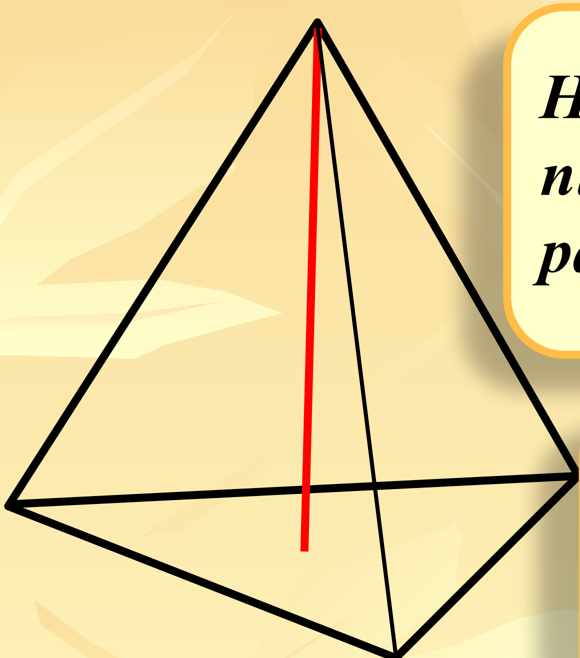
Подставляем в уравнение 1

$$V=\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}(S-S_1)\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}$$

$$\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}(\sqrt{S}-\sqrt{S_1})(\sqrt{S}+\sqrt{S_1})\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}S_1h+\frac{1}{3}h\sqrt{SS_1}=\frac{1}{3}h(S+S_1+\sqrt{SS_1})$$

Задачи по готовым чертежам



Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.

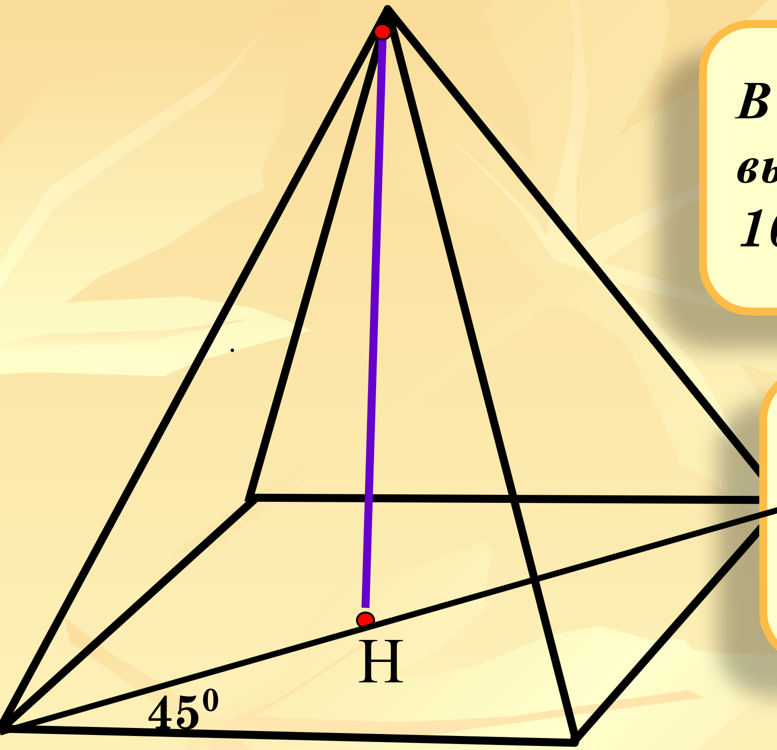
Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объем равен $\sqrt{3}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4}$$

$$h = \frac{V}{\frac{1}{3} S_{осн}} = \frac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 3$$

В 13 | 3

Задачи по готовым чертежам



В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, сторона основания равна 10. Найдите ее объем.

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.

$$V = \frac{1}{3}\cdot 10^2 \cdot 6 = 200$$

$$\cos 45^0 = \frac{AB}{AC} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{16} \qquad AB = 8\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\left(8\sqrt{2}\right)^2 \cdot 6 = 256$$

В 13 | 2 | 5 | 6

Задачи (база)

Сторона основания правильной треугольной пирамиды р… образует с плоскостью ос… найдите объем пирамиды.

V =18

Высота правильной треугольной пирамиды равна … ет с плоскостью ос… найдите объем пирамиды.

V = 192

Задачи (профиль)

Объем треугольной пи ... частью правильной шестиуго ... равен 8. Найдите объем шестиугольн ... пирам ... ды.

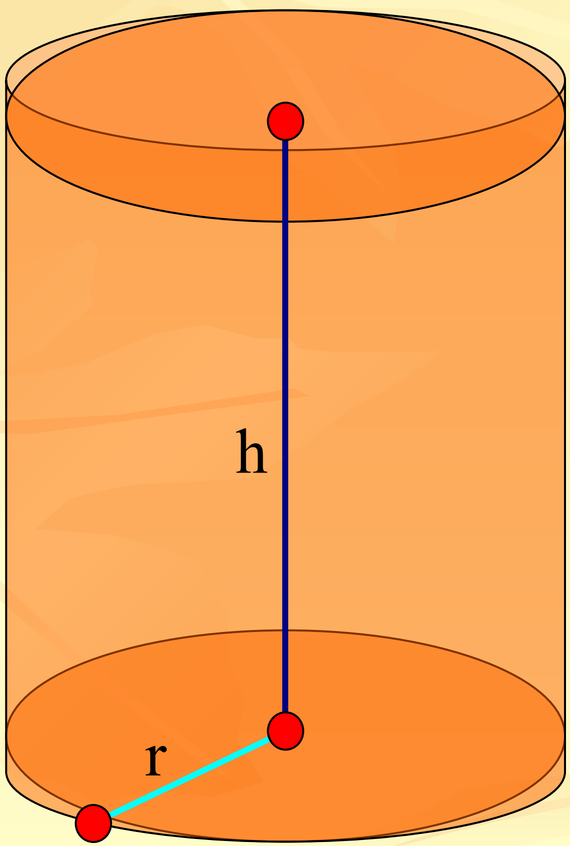
V = 48

От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треу ... ью, проходящей через верши ... о основания. Найдите объем отсечен ... й треугольной пирамиды.

V =3

Объём цилиндра

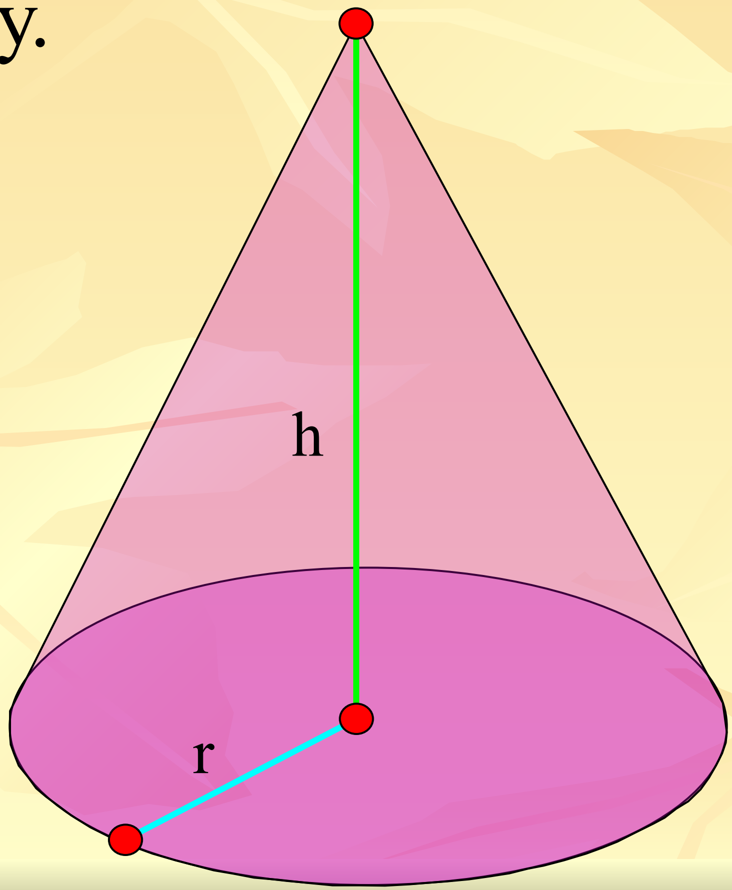
Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.



$$V = \pi r^2 h$$

Объём конуса

Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.



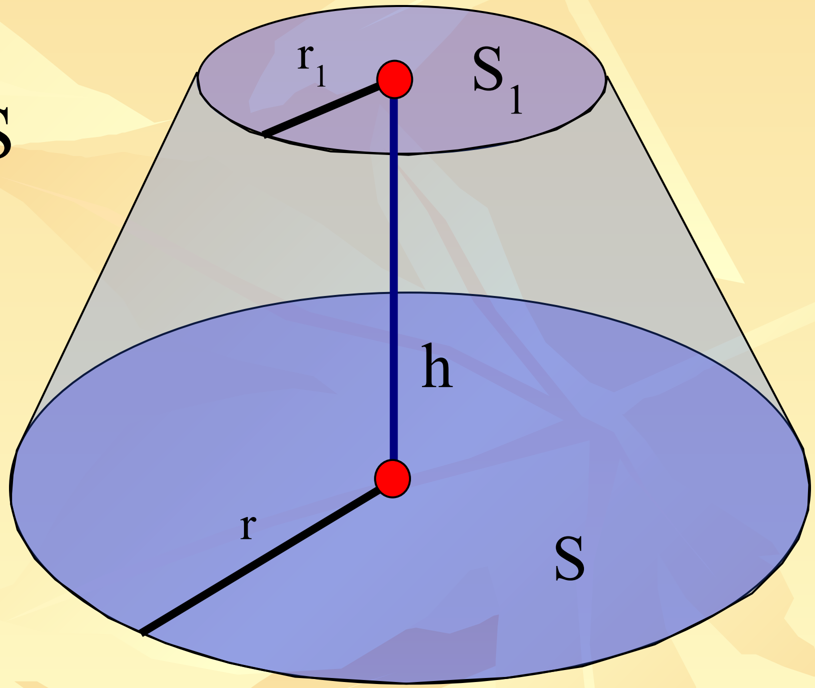
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Объём конуса

Следствие

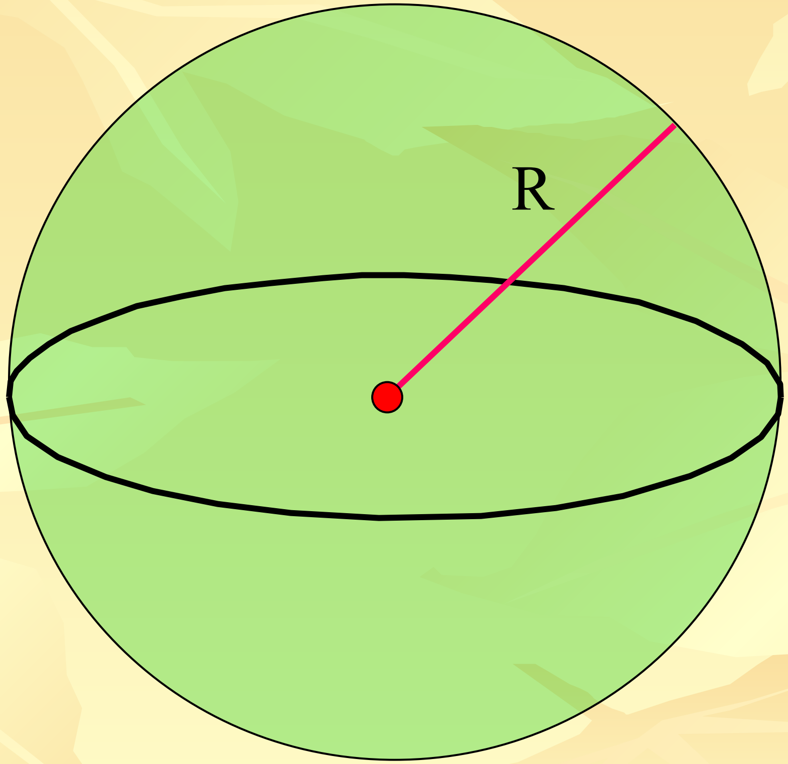
Объём V усечённого конуса, высота которого равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$



Объём шара

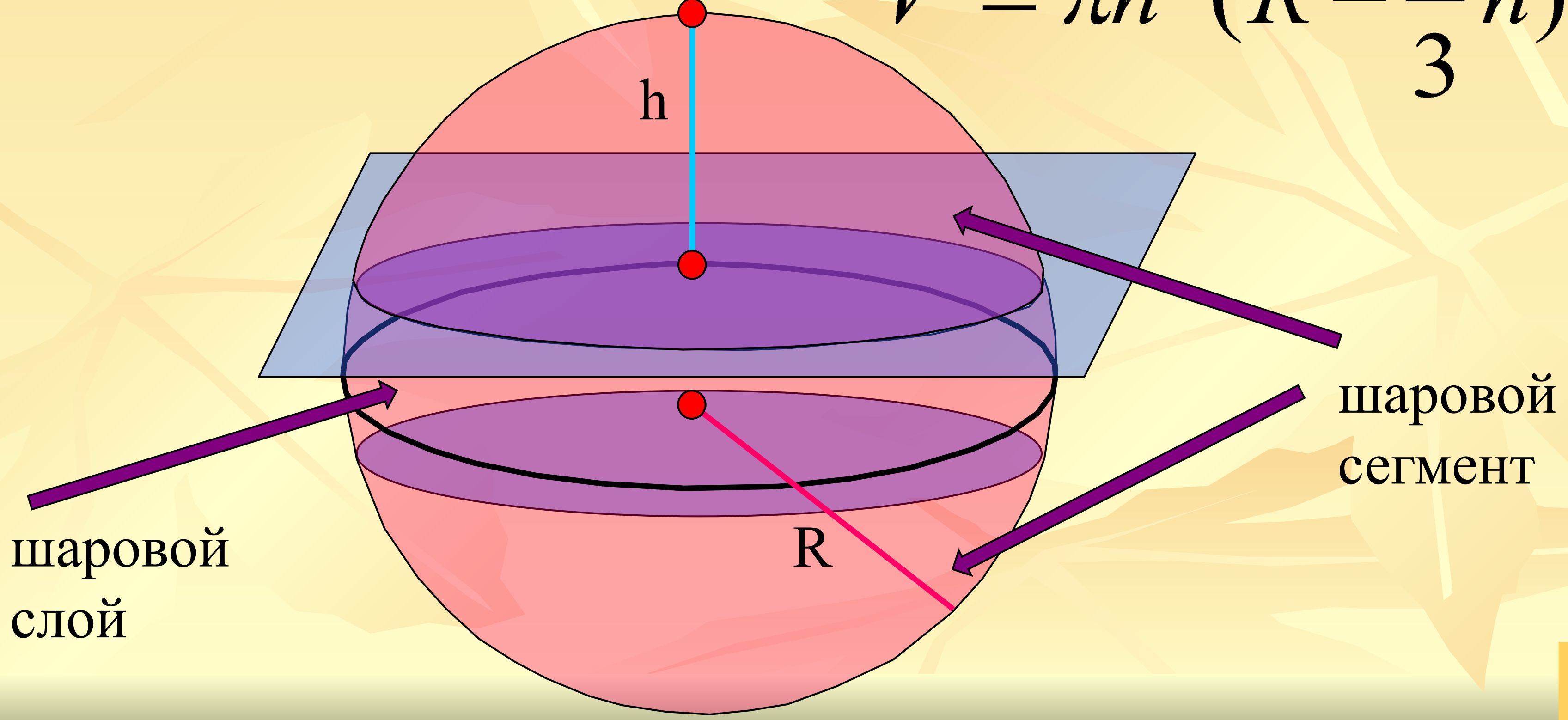
Объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.



Объём шарового сегмента

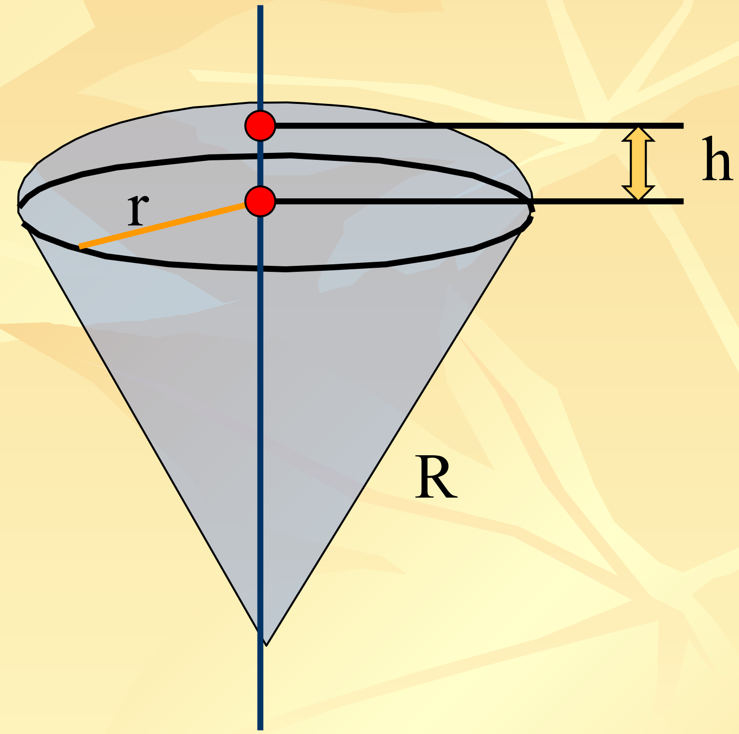
Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью.

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right)$$



Объём шарового сектора

Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим 90, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.



$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$