ЛЕКЦИЯ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

1.1 Электрический заряд и его свойства. Закон Кулона

Электрический заряд

- **Электростатика** – раздел учения об электричестве, изучающий взаимодействие неподвижных электрических зарядов и свойства постоянного электрического поля.

- **Электрический заряд** – это внутреннее, индивидуальное *свойство* тел или частиц, характеризующее их способность к электромагнитному взаимодействию.

- **Электрический заряд** q – *физическая величина*, которая определяет интенсивность электромагнитного взаимодействия.

- Единица электрического заряда – **кулон** (**Кл**) – электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А (ампер) за 1 с.

Свойства электрического заряда

- 1. **Носители электрического заряда** – заряженные элементарные частицы:
  - **протон** и **электрон**;
  - их античастицы – **антипротон** и **позитрон**;
  - нестабильные частицы - **π-мезоны**, **μ-мезоны** и т.д.

Заряженные частицы взаимодействуют друг с другом с силами, которые убывают с расстоянием так же медленно, как гравитационные, но во много раз превышающими их по величине.

Свойства электрического заряда

- 2. Электрический заряд *аддитивен*: заряд любой системы тел (частиц) равен сумме зарядов тел (частиц), входящих в систему:

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_i + \ldots + q_N = \sum_{i=1}^{N} q_i$$

- Здесь i-номер заряда (тела или частицы); N – количество тел (частиц) в системе.

Свойства электрического заряда

- 3. Электрический заряд *дискретен*: заряд q любого тела кратен элементарному заряду e:

$$q = Ne$$

- Элементарный заряд: $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл.
- Поскольку тело не может приобрести или потерять долю электрона, суммарный заряд тела должен быть целым кратным элементарного заряда. Говорят, что *заряд квантуется* (т.е. может принимать лишь *дискретные* значения).
- Однако, поскольку заряд электрона очень мал, мы обычно не замечаем дискретности макроскопических зарядов (заряду 1 мкКл соответствуют примерно 10^{13} электронов) и считаем заряд непрерывным.

Свойства электрического заряда

- 4. Электрический заряд существует в двух видах – *положительный* и *отрицательный*. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные заряды притягиваются.

- За положительный заряд принят заряд протона ($+e$). Заряд электрона – отрицательный ($-e$).

- Если в состав макроскопического тела входит различное количество протонов N_p и электронов N_e, то оно оказывается *заряженным*. Заряд тела:

$$q = e(N_p - N_e)$$

Свойства электрического заряда

- 5. Электрический заряд *инвариантен*: его величина не зависит от системы отсчета, т.е. от того, движется он или покоится:

$$q = \mathrm{inv}$$

Свойства электрического заряда

- 6. Электрический заряд подчиняется **закону сохранения электрического заряда**: *алгебраическая сумма электрических зарядов замкнутой системы остается неизменной, какие бы процессы не происходили внутри данной системы*

$$q = \sum_{i=1}^{N} q_i = \mathrm{const}$$

- (под **замкнутой системой** понимается система, которая не обменивается зарядами с внешними телами)

Закон Кулона

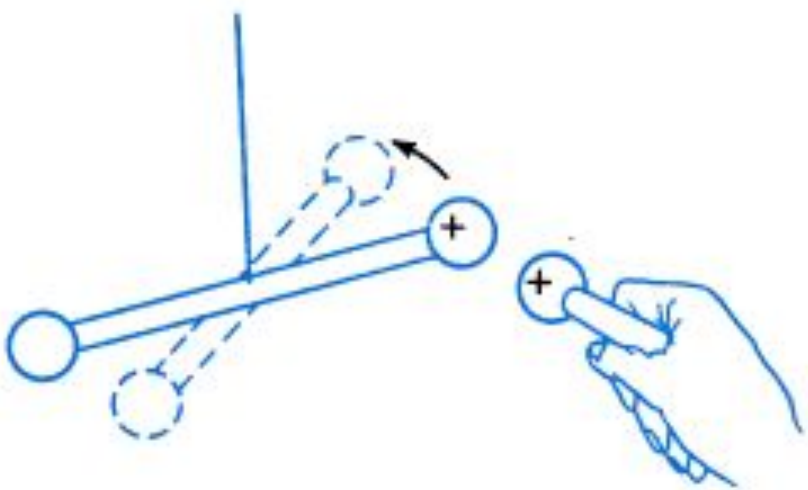
- **Точечные электрические заряды** – элементарные частицы или заряженные тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними.

- **Закон Кулона.** *Сила взаимодействия F между двумя точечными зарядами q_1 и q_2, находящимися в вакууме, прямо пропорциональна произведению этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:*

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

- Величина $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – **электрическая постоянная**, относящаяся к числу фундаментальных физических констант.

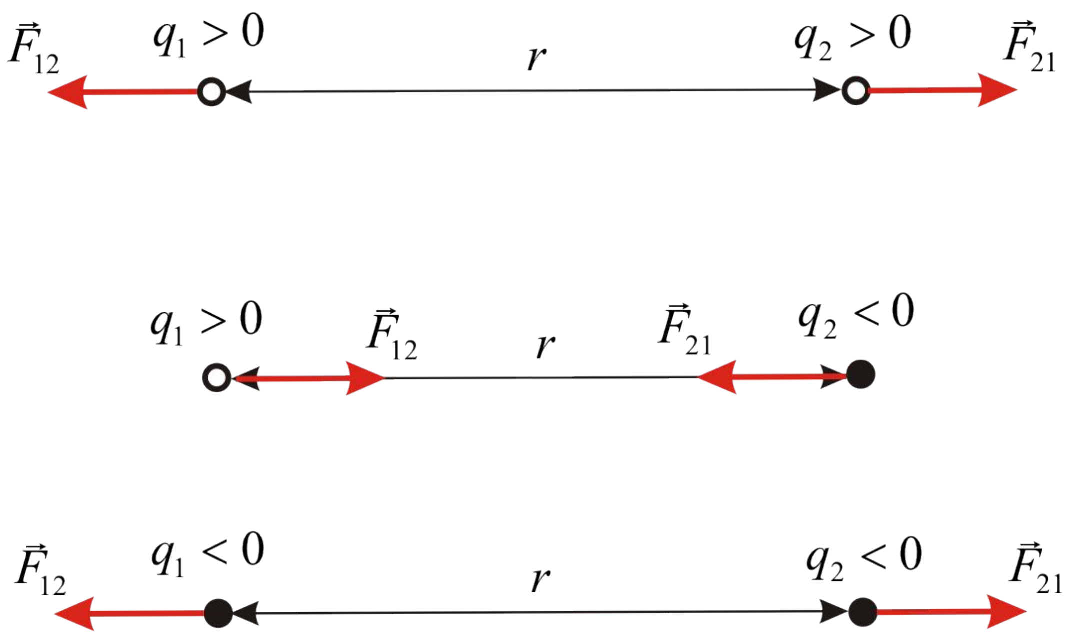
Схема опыта Кулона (1780 г.)



- Когда к шарику на конце стержня, подвешенного на нити, подносят заряд, стержень слегка отклоняется, нить закручивается, и угол закручивания нити пропорционален действующей между зарядами силе (крутильные весы).
- С помощью этого прибора Кулон определил зависимость силы от величины зарядов и расстояния между ними.

Закон Кулона

Сила **F** направлена вдоль прямой, соединяющей заряды q_1 и q_2, т.е. является **центральной силой**, и соответствует *притяжению*, если $q_1 q_2 < 0$ (заряды разноименные) и *отталкиванию*, если $q_1 q_2 > 0$ (заряды одного знака).

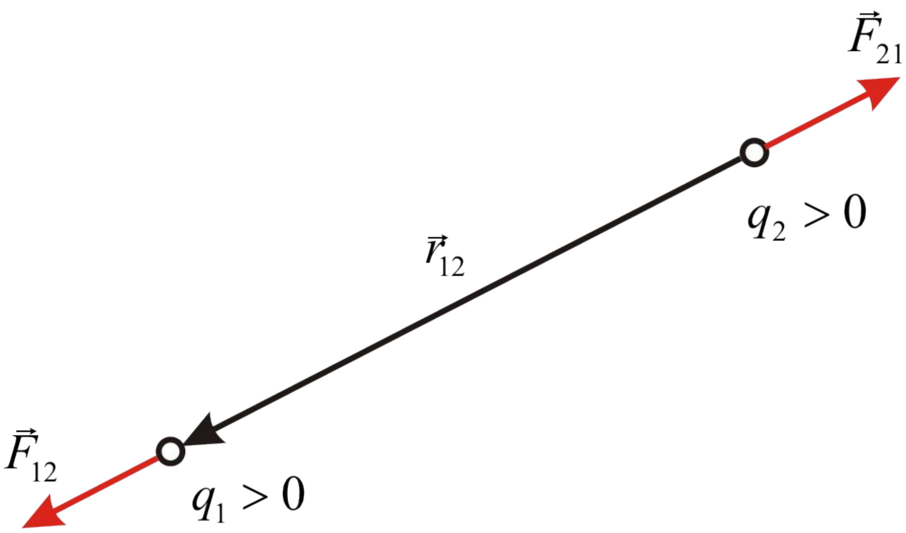


Закон Кулона в векторной форме

- Формула, выражающая закон Кулона, в векторной форме: сила $\mathbf{F}_{12}$, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

- Здесь **r** – радиус-вектор, проведенный из заряда q_2 к заряду q_1.



На электрический заряд q_2, согласно третьему закону Ньютона, действует сила $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

Принцип суперпозиции сил

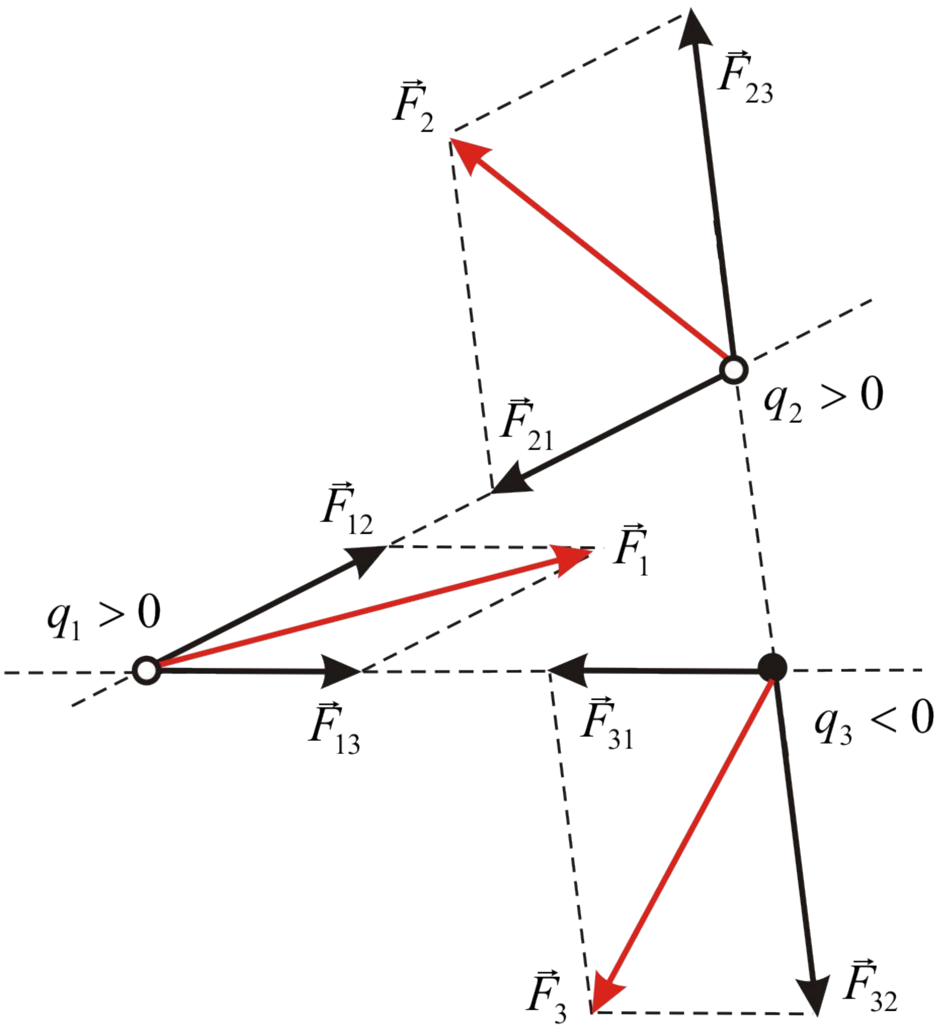
- К кулоновским силам применим рассмотренный в механике **принцип суперпозиции сил**: *результирующая сила, действующая со стороны нескольких точечных зарядов* q_1, q_2, …, q_i, …, q_N, *на точечный заряд* q, *равна векторной сумме сил, приложенных к нему со стороны каждого из зарядов в отдельности:*

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_i}{r_i^3} \vec{r}_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^3}$$

- Здесь $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор, проведенный из заряда q к заряду q_i; r_i – расстояние между зарядами q и q_i.

Принцип суперпозиции сил



Пример применения принципа суперпозиции сил Кулона при определении сил взаимодействия трех точечных зарядов

Плотности заряда

- Часто бывает значительно удобнее считать, что заряды распределены в заряженном теле *непрерывно*:
  - вдоль некоторой линии (например, в случае заряженного тонкого стержня, нити);
  - по поверхности (например, в случае заряженной пластины, сферы);\
  - в объеме (например, в случае заряженного шара).

Плотности заряда

Распределение электрического заряда q по пространству объемом V	Распределение электрического заряда q по поверхности площадью S	Распределение электрического заряда q по линии длины l
Объемная (пространственная) плотность заряда $\rho(\mathbf{r})$, Кл/м^3	**Поверхностная плотность заряда** $\sigma(\mathbf{r})$, Кл/м^2	**Линейная плотность заряда** $\lambda(\mathbf{r})$, Кл/м
$dq = \rho dV$	$dq = \sigma dS$	$dq = \lambda dl$

ЛЕКЦИЯ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

1.2 Электрическое поле. Напряженность

Электромагнитное поле

- **Электромагнитное поле** – особый вид материи, посредством которого осуществляется взаимодействие заряженных частиц. Это означает, что:
  - **заряженные частицы создают в окружающем пространстве электромагнитное поле;**
  - **на заряженную частицу действует электромагнитное поле, существующее в данной точке пространства и в данный момент времени.**

  - Поле, создаваемое точечным источником, пропорционально его заряду; воздействие поля на заряженную частицу пропорционально заряду этой частицы.

Источники электромагнитного поля

Неподвижные заряды

Электрическое поле

Движущиеся заряды

Электрическое и магнитное поля

Действие электромагнитного поля на заряды

Пробный заряд

- Для определения характеристик электромагнитного поля используется понятие **пробного заряда**, внесение которого в исследуемое поле его не искажает (т.е. не приводит к смещению источников поля). Для этого величина пробного заряда должна быть достаточно малой.

- Сила, действующая на неподвижный пробный заряд q_0, пропорциональна его величине и определяется только электрическим полем:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

Напряженность электрического поля

- **Напряженность электрического поля E** – векторная физическая величина, определяемая силой, действующей на единичный положительный заряд q_0, помещенный в данную точку поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- Единица напряженности электростатического поля – **вольт на метр (В/м)**, или **ньютон на кулон (Н/Кл)**.

Напряженность электрического поля точечного заряда

- **Напряженность электростатического поля точечного заряда** q в вакууме в скалярной и векторной формах соответственно:

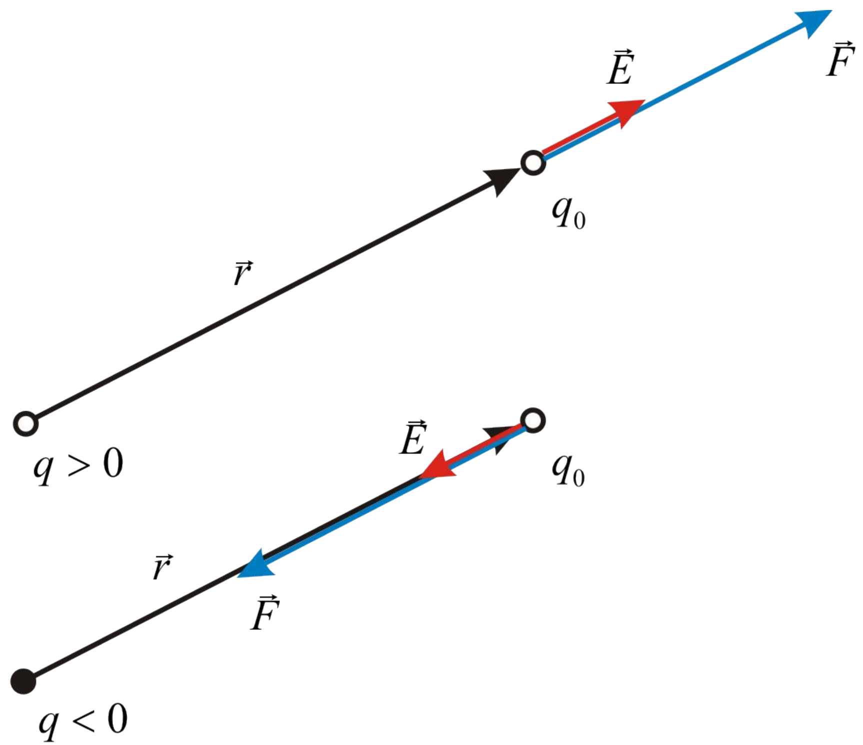
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

- Здесь **r** – радиус-вектор, проведенный в данную точку поля из заряда q, создающего поле; r – расстояние между зарядом q и точкой, в которой определяется вектор **E**.

Напряженность электрического поля точечного заряда

- Направление вектора **E** совпадает с направлением вектора силы **F**, действующей на положительный заряд.

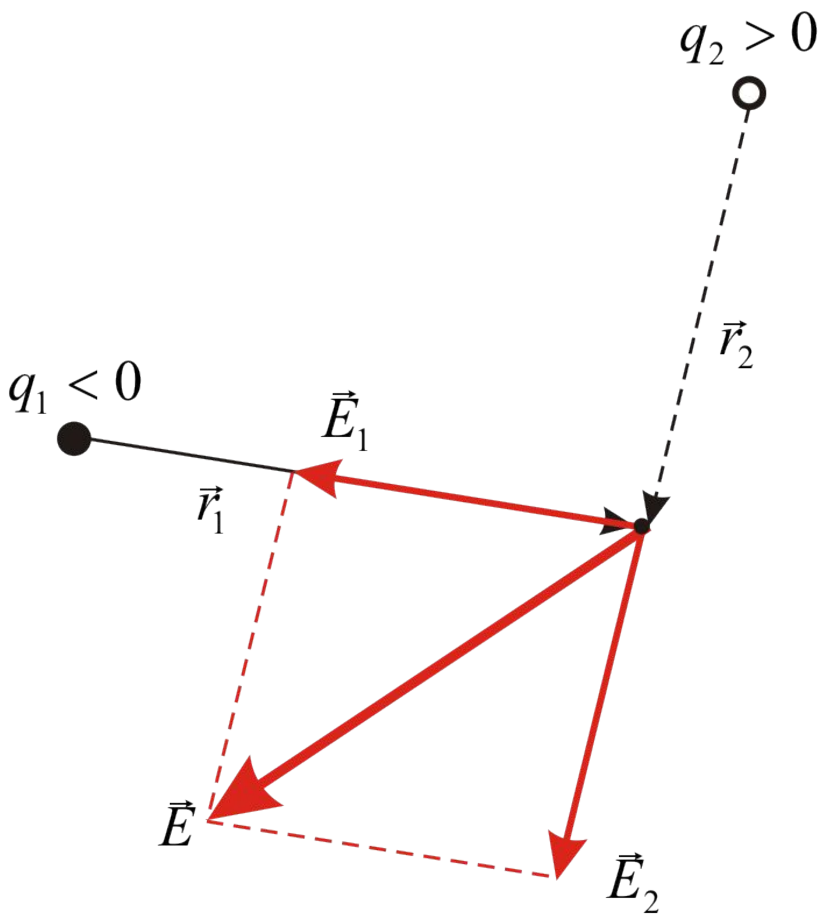
- Если поле создано *положительным* зарядом, то вектор **E** направлен вдоль радиуса-вектора **r** от заряда q во внешнее пространство (*отталкивание* пробного положительного заряда q_0).
- Если поле создается *отрицательным* зарядом, то вектор **E** направлен к заряду (*притяжение* пробного положительного заряда q_0).



Принцип суперпозиции электрических полей

- **Принцип суперпозиции электрических полей**: *напряженность результирующего поля, создаваемого системой зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:*

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$



Напряженность электрического поля системы точечных зарядов

- Из принципа суперпозиции электрических полей следует, что **напряженность электростатического поля системы точечных зарядов** $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_N$:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

- где $\mathbf{E}_i$ – напряженность электрического поля, создаваемая зарядом q_i в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}_i$, проведенным из заряда q_i; r_i – расстояние между зарядом q_i и точкой пространства, в которой вычисляется напряженность $\mathbf{E}_i$ поля.

Напряженность электрического поля пространственно распределенного заряда

- Если заряд q распределен в пространстве непрерывно, то напряженность **E** электрического поля в данной точке пространства с радиусом вектором **r** можно определить следующим образом:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{dq}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^3}\vec{r}$$

- Т.е. заряженное тело разбивается на части объемом dV, имеющие заряд dq; далее находится напряженность d**E** электрического поля точечного заряда dq в данной точке; затем с помощью принципа суперпозиции электрических полей вычисляется напряженность **E**.

Напряженность электрического поля заряда, распределенного по поверхности или по линии

- Аналогично, для зарядов, распределенных по поверхности S или длине L заряженных тел:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{dq}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{dq}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{r^3}\vec{r}$$

Силовые линии электрического поля

- Графически электростатическое поле изображают с помощью **линий напряженности (силовых линий)** – линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением вектора **E**.
- Линиям напряженности приписывается направление, совпадающее с направлением вектора **E**.
- Густота этих линий пропорциональная модулю E вектора напряженности.

- Так как в данной точке пространства вектор **E** имеет лишь одно направление, то линии вектора напряженности никогда не пересекаются.

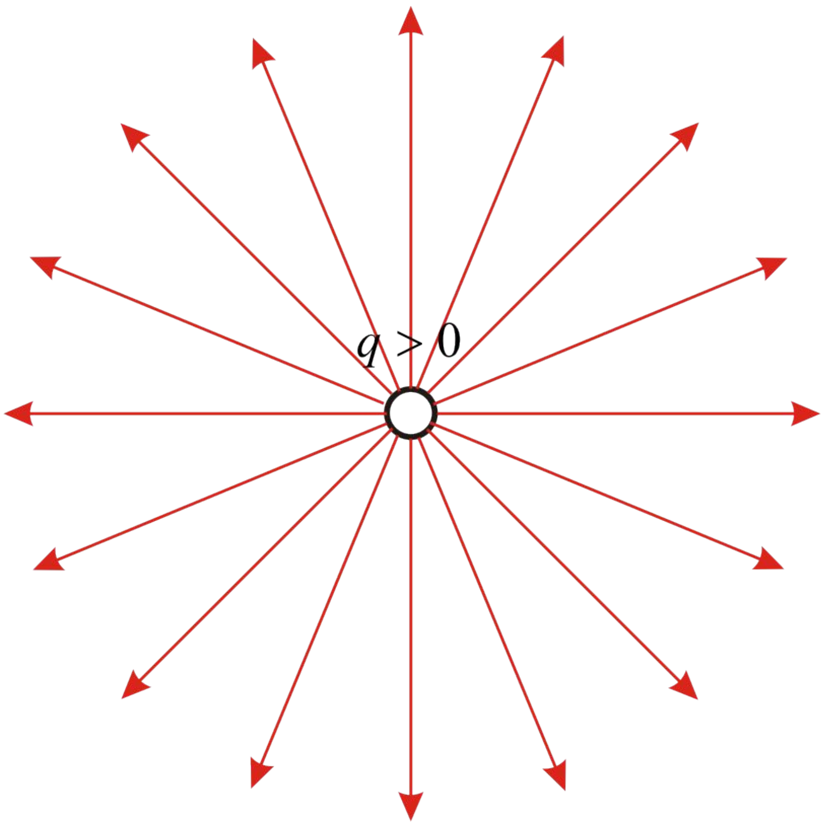
Свойства силовых линий электрического поля

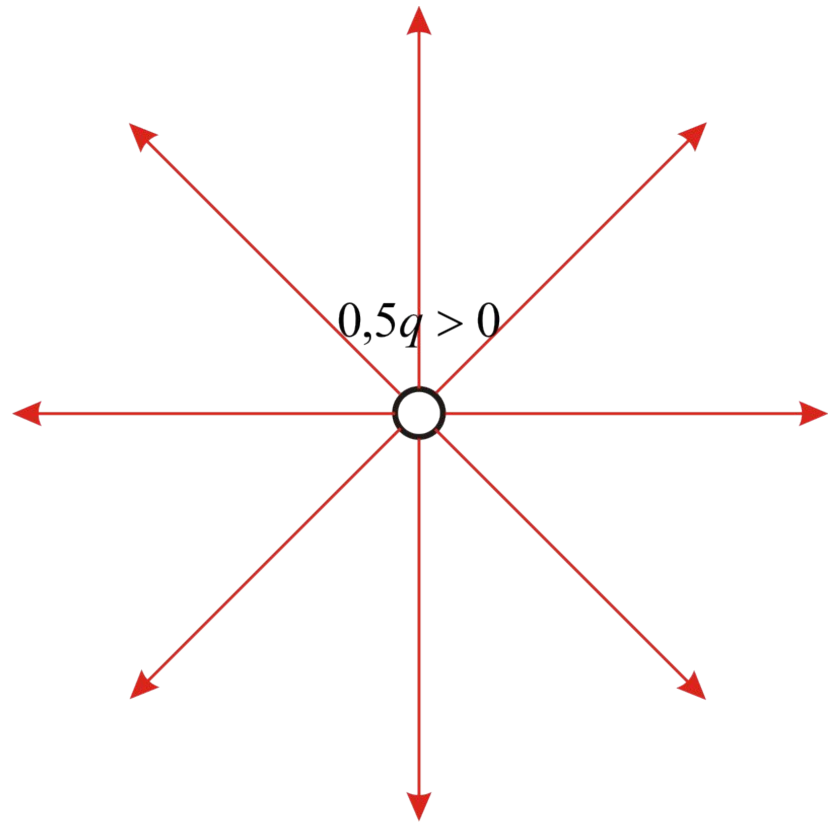
- 1. Силовые линии указывают направление напряженности электрического поля: в любой точке вектор напряженности **E** электрического поля направлена по касательной к силовой линии.

- 2. Силовые линии проводятся так, чтобы модуль вектора напряженности электрического поля E был пропорционален числу линий, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную линиям.

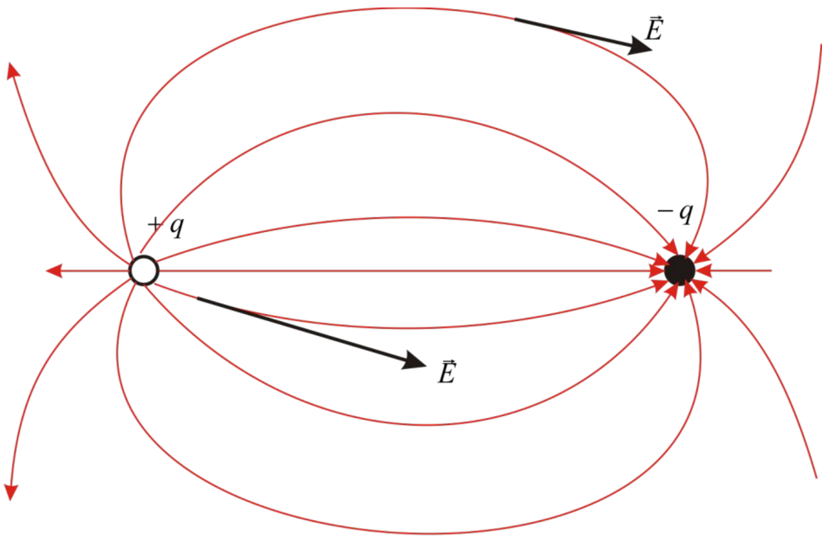
- 3. Силовые линии начинаются только на положительных зарядах и заканчиваются только на отрицательных зарядах; число линий, выходящих из заряда или входящих в него, пропорционально величине заряда.

Силовые линии электрического поля точечного заряда

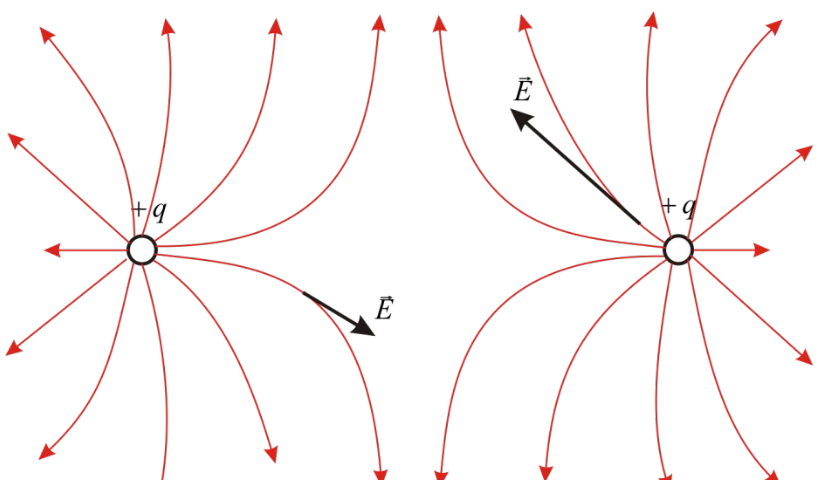




Силовые линии электрического поля



Силовые линии электрического поля системы из 2-х равных по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов.



Силовые линии электрического поля системы из 2-х равных по модулю и одинаковых по знаку точечных зарядов.

ЛЕКЦИЯ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

1.3 Консервативное электрическое поле

Консервативное электрическое поле

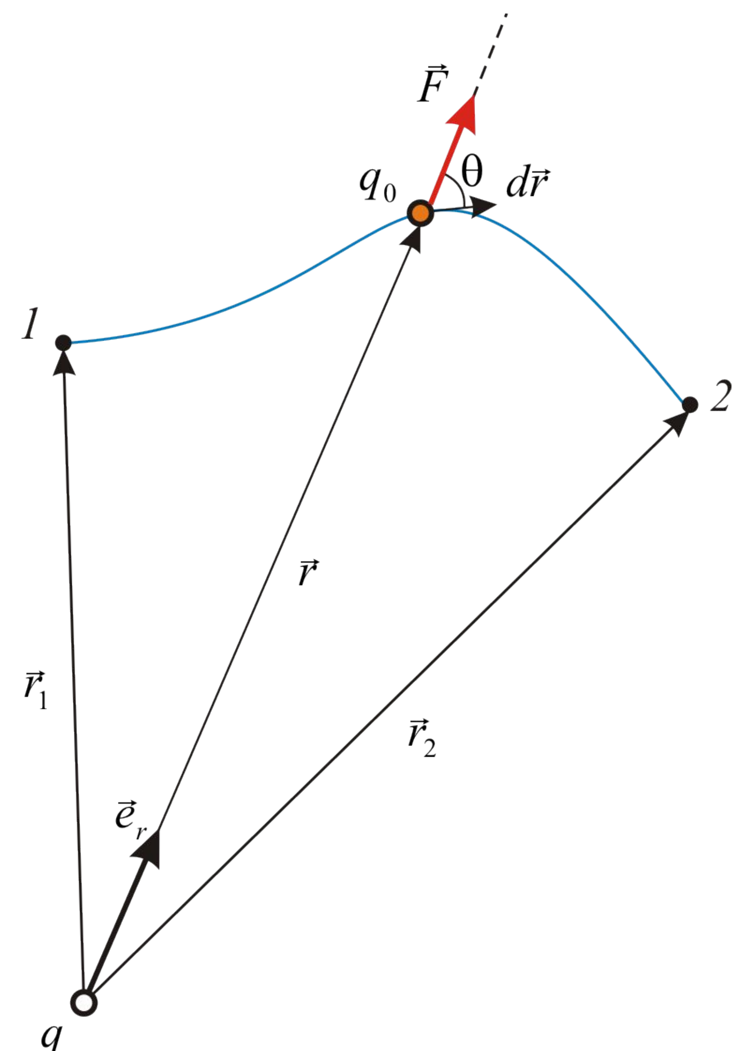
- Как и любое центральное поле, электростатическое поле является **консервативным (потенциальным)**.

- Это означает, что *работа сил поля при перемещении пробного заряда из точки 1 в точку 2 не зависит от вида траектории и характера движения заряда*.

Работа по перемещению заряда в поле точечного неподвижного заряда *q*

- Пусть, например, точечный (пробный) заряд q_0 перемещается в электрическом поле, созданном неподвижным точечным зарядом q.

- Обозначим: $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ – радиусы-векторы точек *1* и *2*, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор заряда q_0 (все радиусы-векторы имеют начало в заряде q); $\mathbf{e}_r$ – единичный вектор, сонаправленный с $\mathbf{r}$.



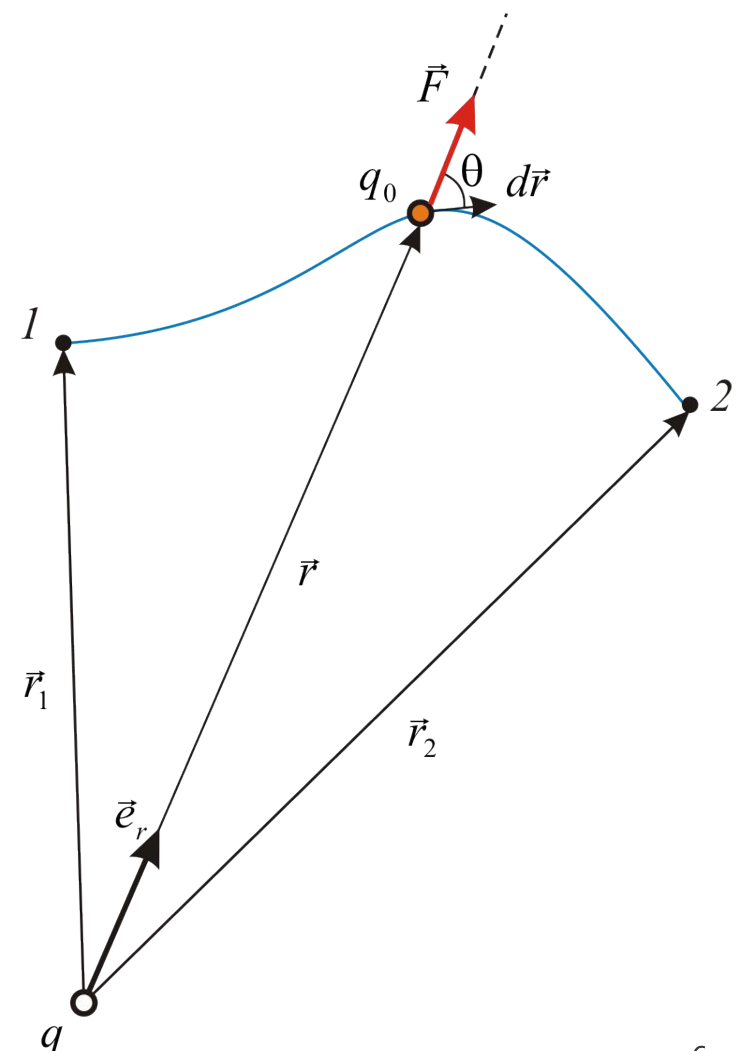
Работа по перемещению заряда q_0 в поле точечного неподвижного заряда q

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0 q}{r^3} \vec{r} d\vec{r} =$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_1^2 \frac{|\vec{r}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\theta}{r^3} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

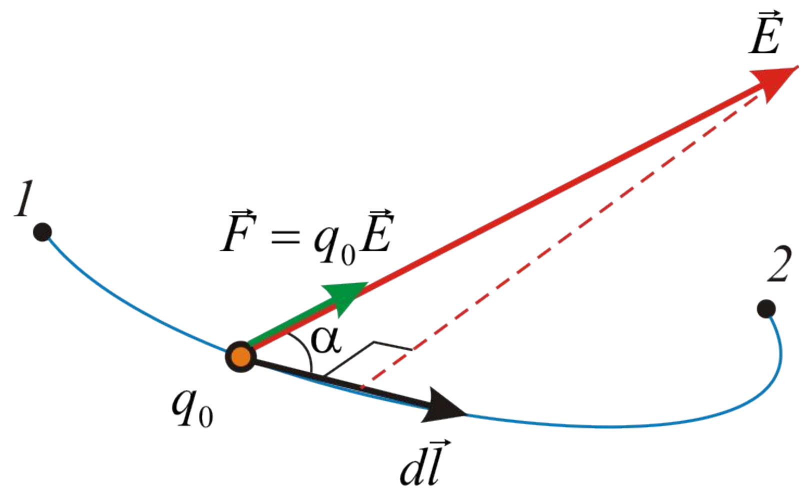
- В консервативном поле работа по перемещению электрического заряда вдоль *замкнутой* траектории равна нулю: $A = \oint_L \delta A = 0$



Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

Пусть единичный положительный заряд q_0 переносится под действием силы $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$ поля из точки *1* в точку *2*.

Элементарная работа:



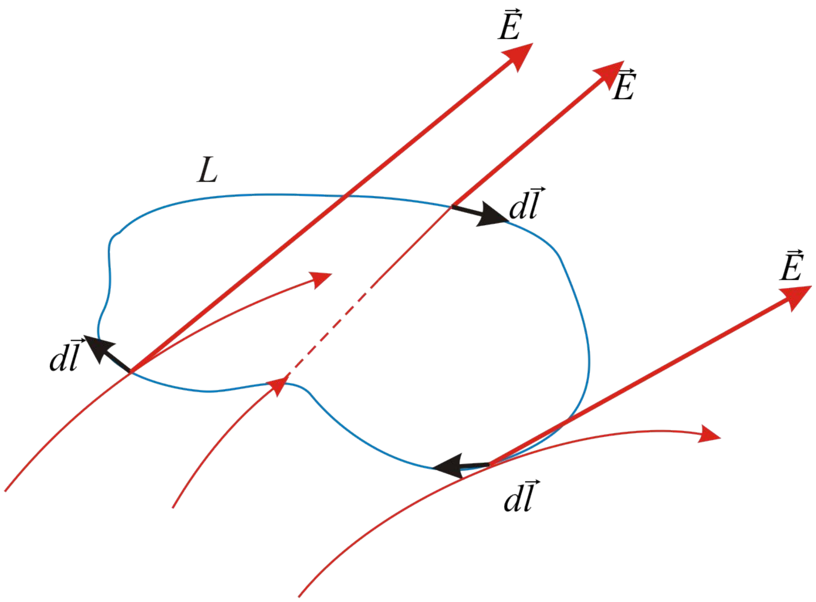
$$\delta A_{\text{ед}} = \frac{\delta A}{q_0} = \frac{1}{q_0}\vec{F}\cdot d\vec{l} =$$

$$= \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_l dl$$

Здесь $E_l = E\cos\alpha$ – проекция вектора **E** на вектор элементарного перемещения $d\mathbf{l}$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

- Предположим теперь, что точки *1* и *2* траектории заряда совпадают, т.е. траектория представляет собой замкнутую линию L (замкнутый контур).
- Тогда работа сил поля по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру, называется **циркуляцией** вектора **E** вдоль этого контура:



$$A_{\text{ед}} = \oint_L \delta A_{\text{ед}} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля

- Из свойства консервативности электростатического поля следует **теорема о циркуляции вектора E:** *циркуляция вектора напряженности* **E** *электростатического поля вдоль любого замкнутого контура L равна нулю:*

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0$$

- Силовое поле, обладающее таким свойством, называется **потенциальным**.

- Последняя формула справедлива только для полей, созданных неподвижными электрическими зарядами, т.е. для электростатических полей.

Потенциальная энергия заряда

- В потенциальном поле тела обладают потенциальной энергией и работа консервативных сил совершает за счет убыли потенциальной энергии тел.
- Работу консервативной силы Кулона при перемещении точечного заряда q_0 из точки *1* в точку *2* можно представить в виде разности потенциальных энергий заряда q_0 в начальной и конечной точках: $\delta A = -d\Pi$ (для элементарного перемещения),

$$A_{12} = -\Delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$$

- С другой стороны, известно, что

$$A_{12} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

Потенциальная энергия заряда

- Таким образом, потенциальная энергия П заряда q_0 во внешнем электростатическим поле точечного заряда q равна

$$\Pi = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{const}$$

- Считая, что при удалении заряда q_0 на бесконечность потенциальная энергия П обращается в ноль, получаем: const = 0, т.е.

$$\Pi = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Для *одноименных* зарядов, что соответствует *отталкиванию*, $\Pi > 0$ (если $q_0 q > 0$), для *разноименных* зарядов (*притяжение*) ($q_0 q < 0$) $\Pi < 0$.

Потенциальная энергия заряда q_0 в электрическом поле системы точечных зарядов

- Если поле создается системой N точечных зарядов, то потенциальная энергия заряда q_0, находящегося в этом поле, равна сумме его потенциальных энергий, создаваемых каждым из зарядов системы в отдельности в той точке пространства, где находится заряд q_0:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N} \Pi_i = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

Здесь r_i – расстояние между зарядом q_i системы и зарядом q_0.

ЛЕКЦИЯ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

1.4 Потенциал электрического поля

Потенциал электростатического поля

- **Потенциалом** ϕ электростатического поля в данной точке пространства называется скалярная физическая величина, численно равная потенциальной энергии П единичного пробного заряда q_0, помещенного в данную точку поля:

$$\varphi = \frac{\Pi}{q_0}$$

- Например, потенциал ϕ поля, созданного точечным зарядом q в вакууме на расстоянии r от него, равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Потенциал электростатического поля

- Из приведенного примера видно, что отношение $П/q_0$ не зависит от выбора пробного заряда, а характеризуется только зарядом, создающим поле.

- Таким образом, *потенциал* ϕ *является скалярной (энергетической) характеристикой электростатического поля* (напряженность **E** – векторная (силовая) характеристика поля).

- Единица потенциала – **вольт** (**В**).
- Один вольт (1 В) есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж (1 В = 1Дж/Кл).

Разность потенциалов

- Работа A_{12}, совершаемая силами электрического поля при перемещении заряда q_0 из точки *1* в точку *2* может быть представлена как

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2) = q_0 \Delta\varphi$$

т.е. она равна произведению перемещаемого заряда q_0 на разность потенциалов $\Delta\varphi$ в начальной и конечной точках.

Разность потенциалов

- **Разность потенциалов** $\Delta\varphi$ двух точек *1* и *2* электростатического поля определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении единичного положительного заряда из точки *1* в точку *2*:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \frac{A_{12}}{q_0}$$

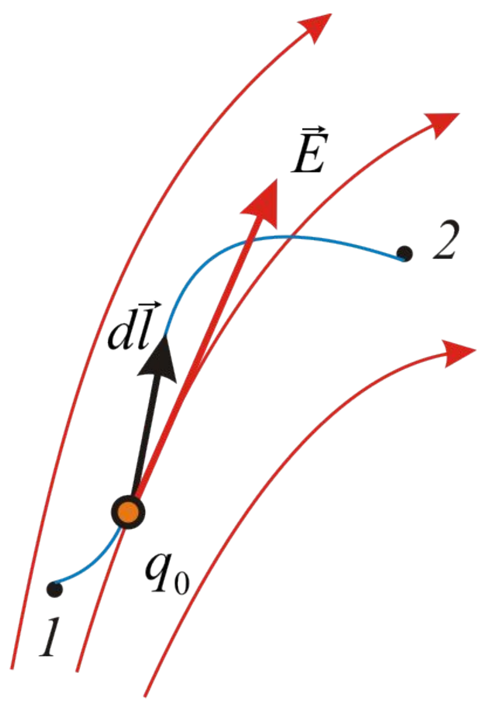
Связь между разностью потенциалов и напряженностью электростатического поля

- Пользуясь определением напряженности электростатического поля, выражение для работы можно переписать в виде:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = q_0 \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$$

откуда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl$$



Интегрирование может проводиться вдоль любой траектории, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории заряда q_0.

Еще одно определение потенциала

- Если перемещать заряд q_0 из произвольной точки поля за пределы поля (на бесконечность), где потенциальная энергия П = 0, а значит и потенциал $\phi = П/q_0 = 0$, то работа сил электростатического поля

$$A_\infty = q_0(\varphi - 0) = q_0\varphi$$

откуда

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}$$

Потенциал ϕ данной точки поля – физическая величина, определяемая работой сил электростатического поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

Свойства потенциала

- 1. *Потенциал электростатического поля ϕ в данной точке пространства является функцией только координат x, y, z этой точки*:

$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

Свойства потенциала

- 2. *Работа сил поля по перемещению единичного положительного заряда из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение 2, равна убыли потенциала*:

$$A_{\text{ед}} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$$

- Если при этом точки *1* и *2* расположены достаточно близко друг от друга, то напряженность **E** электрического поля можно считать приблизительно одинаковой между точками *1* и *2* и тогда

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -d\varphi$$

Свойства потенциала

- 3. *Потенциал* ϕ *электростатического поля определен с точностью до аддитивной постоянной величины*.

- Это означает, что при замене точки O – начала отсчета потенциала, на некоторую другую точку O' потенциал ϕ во всех точках пространства изменится на одну и ту же величину C, равную работе сил поля при перемещении единичного положительного заряда из точки O в точку O':

$$\varphi' = \varphi + C;$$

$$C = \int_{O}^{O'} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Принцип суперпозиции потенциалов

- **Принцип суперпозиции потенциалов электростатических полей:** *если электрическое поле создано несколькими зарядами, то потенциал электрического поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов электрических полей всех этих зарядов:*

$$\varphi = \sum_{i=1} \varphi_i$$

Потенциал системы неподвижных точечных зарядов

- Например, потенциал ϕ точки электрического поля, созданного системой N точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_N$ равен:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

- Здесь r_i – расстояние от данной точки поля до заряда q_i системы.

Потенциал поля пространственно распределенного заряда

- Если заряд q распределен в пространстве с объемной плотностью ρ, то:
  - мысленно разделим заряженное тело на элементарные части объемами dV и зарядами dq;
  - находим потенциал $d\varphi$ электрического поля, созданного в данной точке зарядом dq по формуле потенциала точечного заряда;
  - с помощью принципа суперпозиции потенциалов находим потенциал φ в данной точке поля:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho dV}{r}$$

Здесь r – расстояние между данной точкой поля и элементарным объемом dV, несущим заряд dq.

Потенциал поля зарядов, распределенных по поверхности или по линии

- Аналогично, для зарядов, распределенных по поверхности S или длине L заряженных тел потенциал в точке с радиусом-вектором **r** равен соответственно:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{r}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{r}$$

Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля

- Для консервативного поля связь между консервативной силой **F** и потенциальной энергией П имеет вид:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\Pi = -\nabla\Pi$$

Здесь $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ – оператор градиента

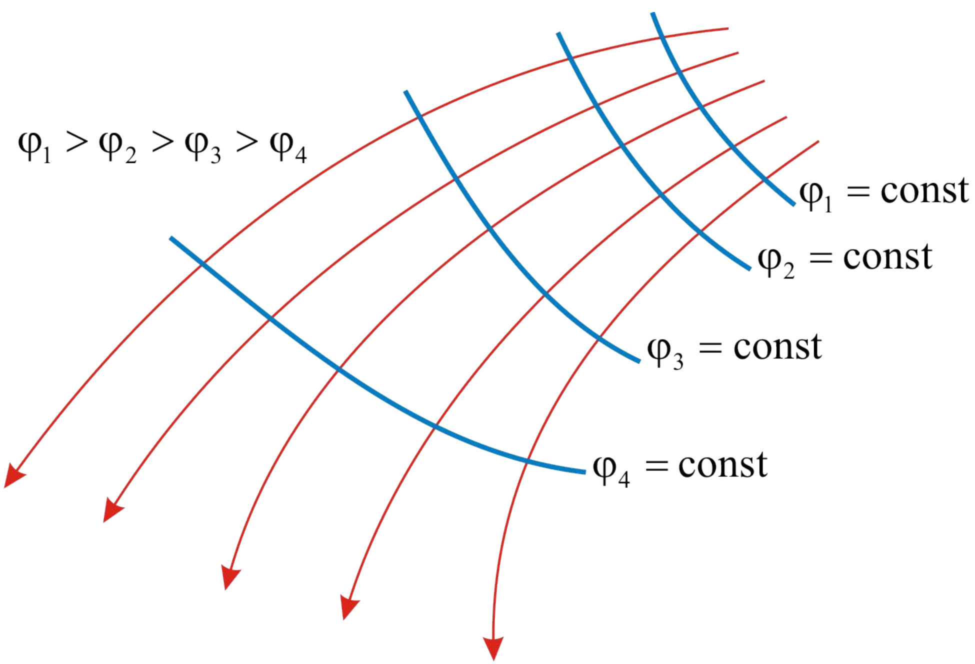
Поскольку $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ и $\Pi = q\phi$, то

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\nabla\varphi$$

Знак минус показывает, что вектор напряженности электростатического поля направлен в сторону убывания потенциала.

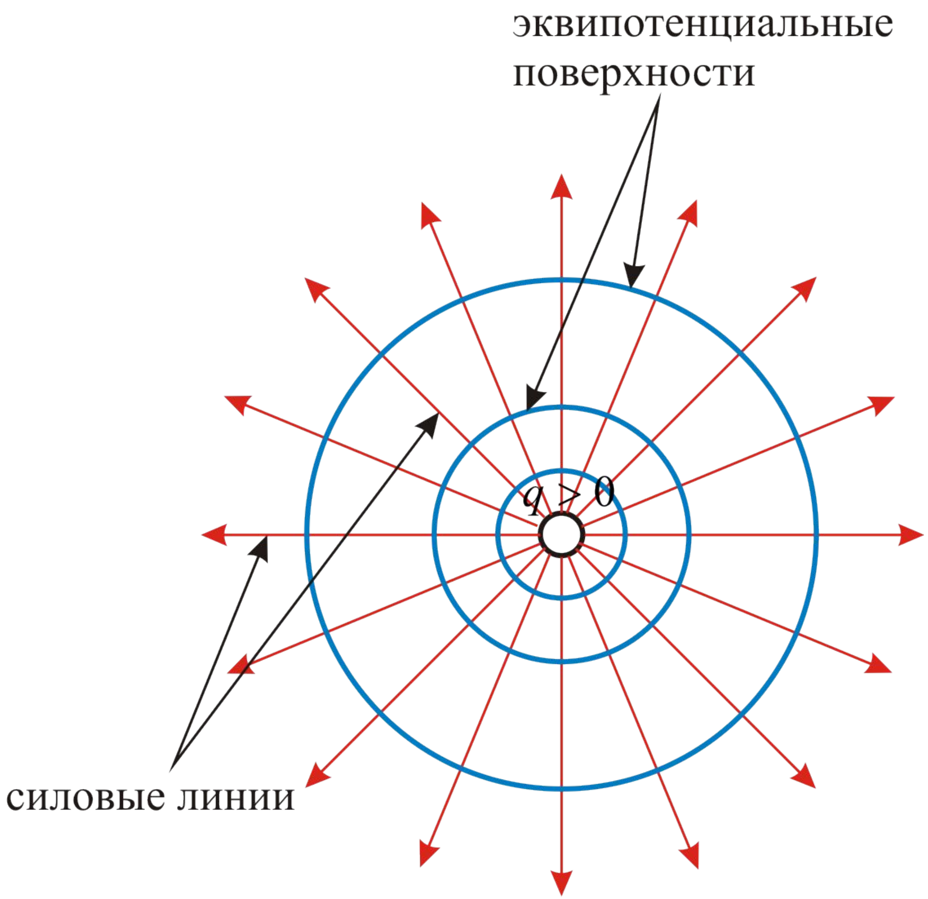
Эквипотенциальные поверхности

- Для графического изображения распределения потенциала используются **эквипотенциальные поверхности** – поверхности, во всех точках которых потенциал ϕ (и потенциальная энергия П заряда, помещенного в данную точку) имеет одно и то же значение.



Эквипотенциальные поверхности обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность электростатического поля в разных точках. Там, где поверхности расположены гуще, модуль вектора напряженности **E** электрического поля больше.

Эквипотенциальные поверхности



- Для точечного заряда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

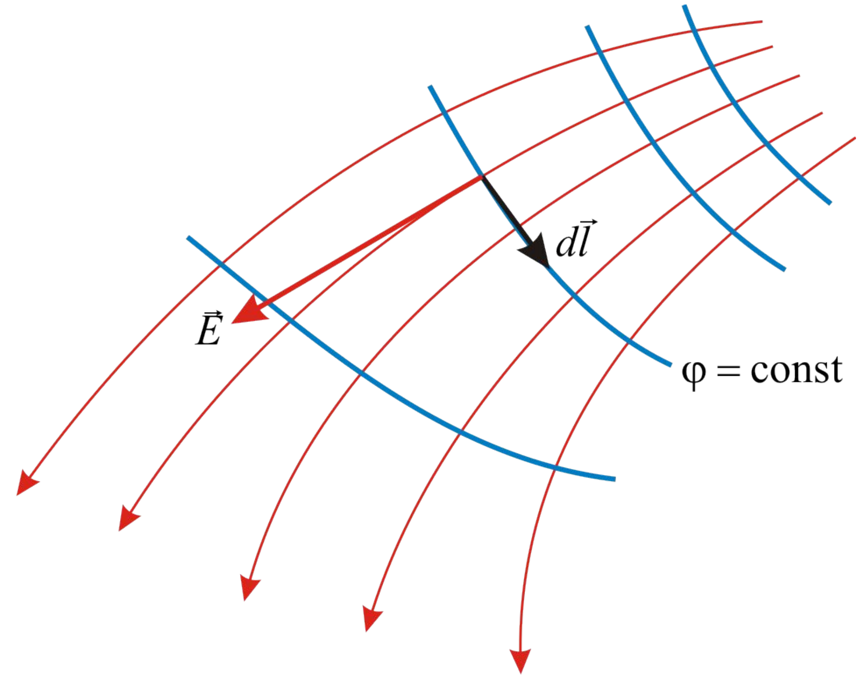
поэтому эквипотенциальные поверхности представляют собой концентрические сферы r = const. С другой стороны, линии напряженности **E** – радиальные прямые.

Эквипотенциальные поверхности

- Докажем, что **линии напряженности всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям**.
- Работа $A_{\text{ед}}$ по перемещению единичного положительного заряда *вдоль эквипотенциальной поверхности:*

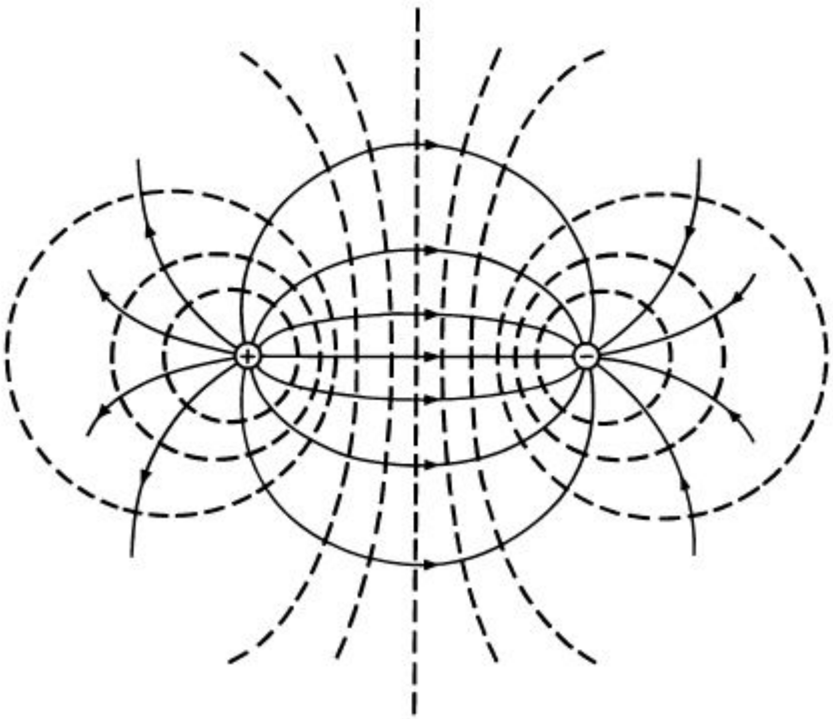
$$A_{\text{ед}} = \vec{E} \cdot d\vec{l} = -d\varphi = 0$$

- А так как $\mathbf{E}$, $d\mathbf{l} \neq 0$, то их скалярное произведение равно нулю только тогда, когда $\mathbf{E} \perp d\mathbf{l}$.



Эквипотенциальные поверхности

- На рисунке приведена картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей (обозначены пунктиром) для системы из двух одинаковых по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов.



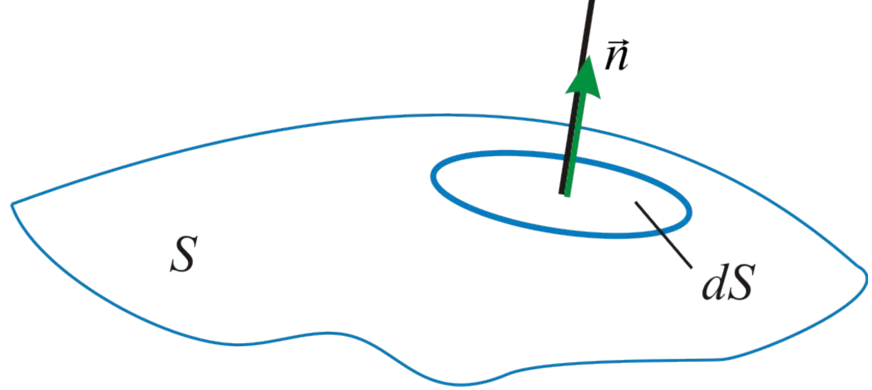
ЛЕКЦИЯ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПЛЕ В ВАКУУМЕ

1.5 Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса

Вектор элементарной площадки

- Пусть в пространстве имеется некоторая поверхность *S* произвольной формы. Рассмотрим участок этой поверхности, площадь *dS* которого бесконечно мала. Тогда сам участок можно считать плоским.
- Пусть **n** – вектор единичной длины, перпендикулярный к данной площадке (**единичный вектор нормали** к поверхности *S*).

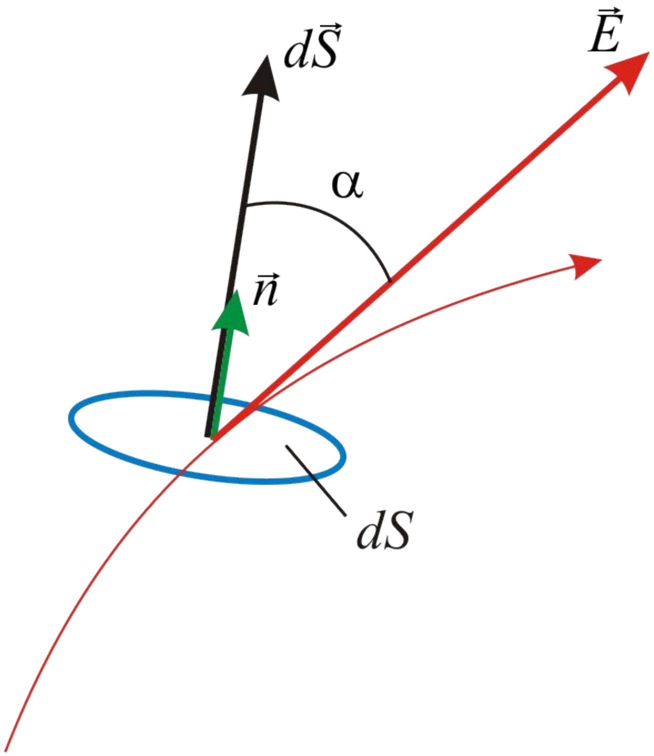
$$d\vec{S} = dS\vec{n}$$



Вектором элементарной площадки *d***S** называется вектор, длина которого равна площади *dS*, а направление совпадает с вектором **n**.

Поток вектора напряженности электрического поля

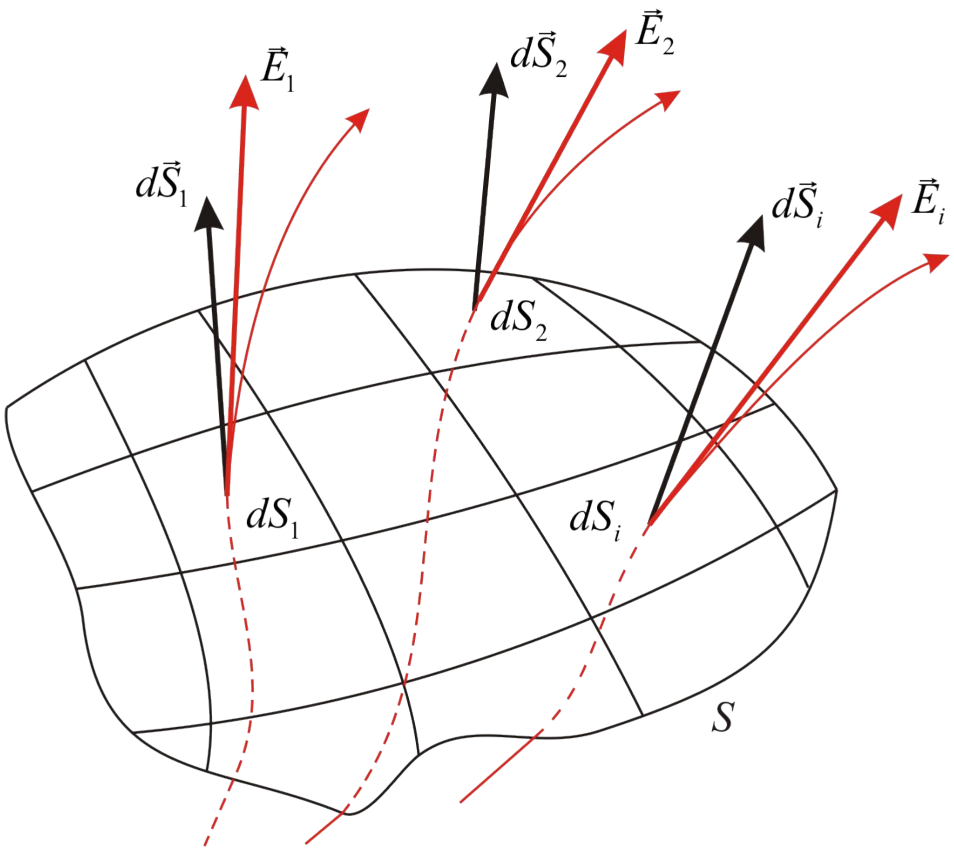
- Рассмотрим произвольную элементарную площадку dS в области пространства, где имеется электрическое поле.
- Ввиду малости dS считаем, что в любое ее точке **E** = const.
- Выберем единичный вектор нормали **n** к площадке. Обозначим α – угол между векторами **E** и **n** (d**S**).
- **Потоком** dΦ вектора напряженности электрического поля **E** через элементарную площадку называется скалярное произведение векторов **E** и d**S**.



$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos\alpha$$

Поток вектора напряженности через поверхность конечных размеров

- Для нахождения потока вектора **E** через произвольную поверхность конечных размеров:
  - разбиваем мысленно поверхность S на элементарные площадки dS_i так, чтобы в пределах каждого участка вектор напряженности $\mathbf{E}_i$ был постоянен;
  - каждому участку сопоставим вектор нормали **n** и вектор элементарной площадки $d\mathbf{S}_i$.

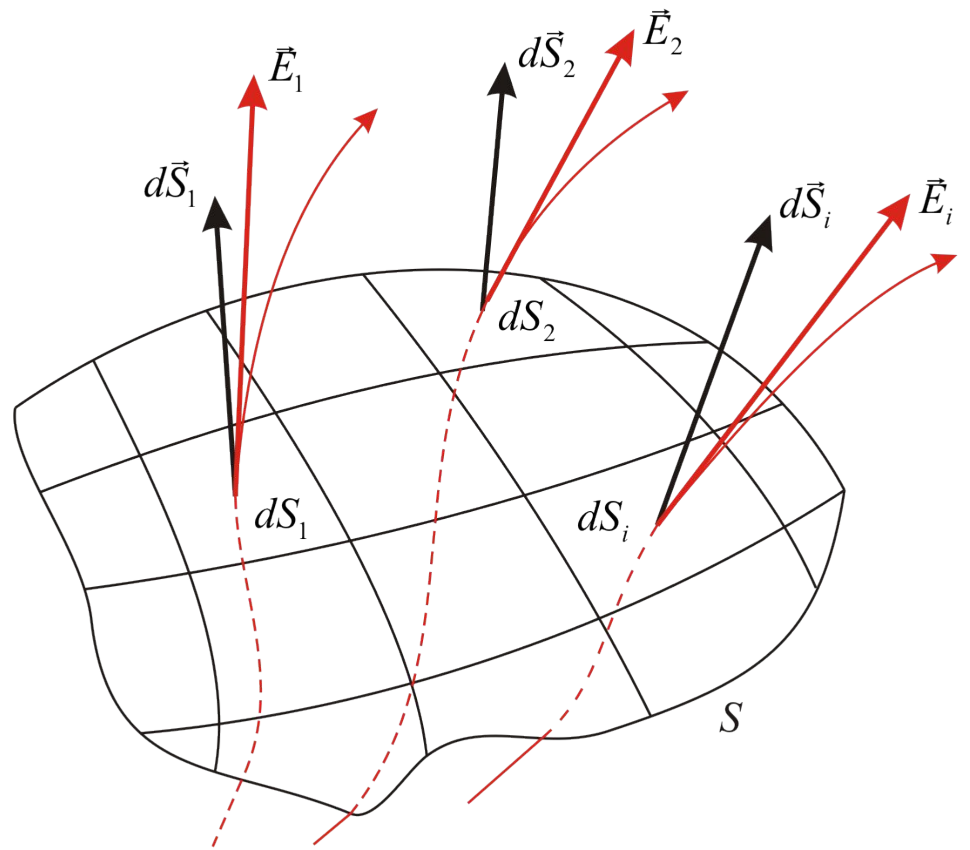


Поток вектора напряженности через поверхность конечных размеров

- *Поток Ф вектора напряженности* **E** *электрического поля через поверхность S конечных размеров равен пределу при N → ∞ суммы потоков через все элементарные площадки, на которые мысленно разбита рассматриваемая поверхность:*

$$\Phi = \lim_{N\to\infty}\sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

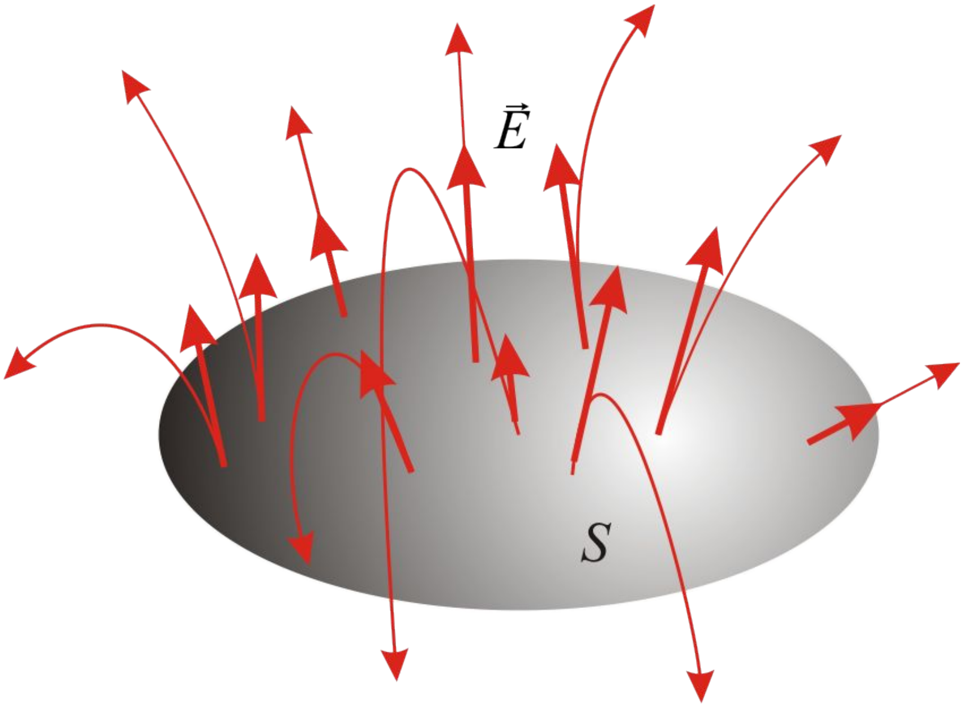
N – число элементарных площадок



Поток вектора напряженности через поверхность конечных размеров

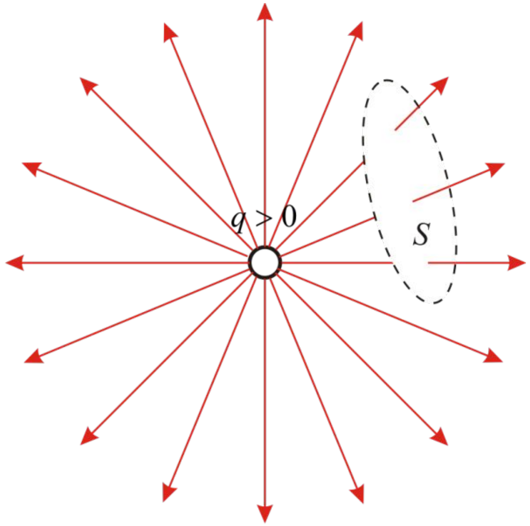
- Аналогично можно определить и поток вектора напряженности через замкнутую поверхность S.
- При этом принято выбирать *внешнюю* нормаль к поверхности:

$$\Phi = \lim_{N\to\infty} \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

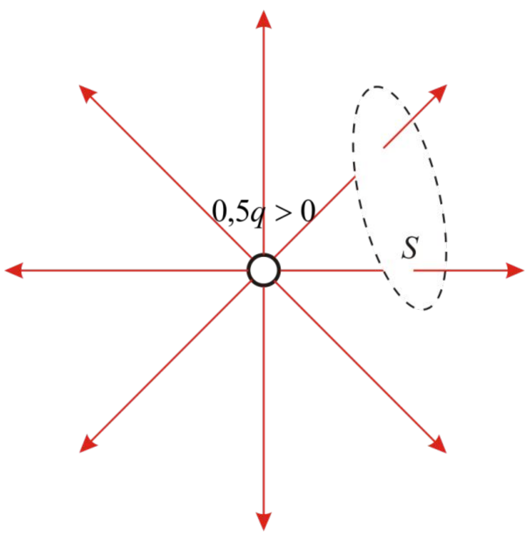


Поток вектора напряженности электрического поля

- Из определения потока Ф следует, что он пропорционален модулю вектора напряженности электрического поля **E**, т.е. при увеличении модуля **E** во всех точках пространства в *k* раз поток Ф тоже возрастет в *k* раз.



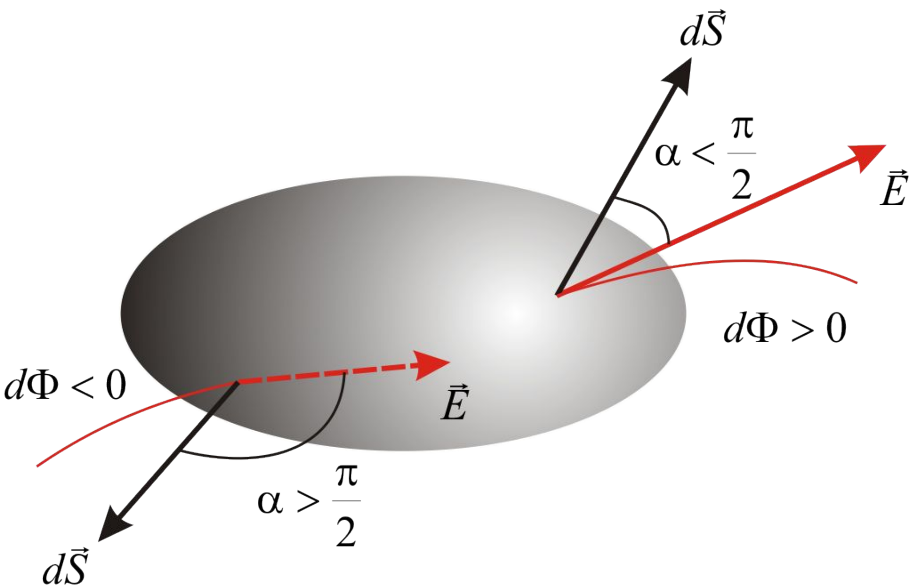
- Таким образом, можно утверждать, что поток Ф вектора напряженности электрического поля **E** пропорционален числу силовых линий, пронизывающих эту поверхность.



Знак потока

- Знак потока $d\Phi$ определяется углом α между нормалью **n** к элементарной площадке и вектором напряженности **E** электрического поля в этой же точке.

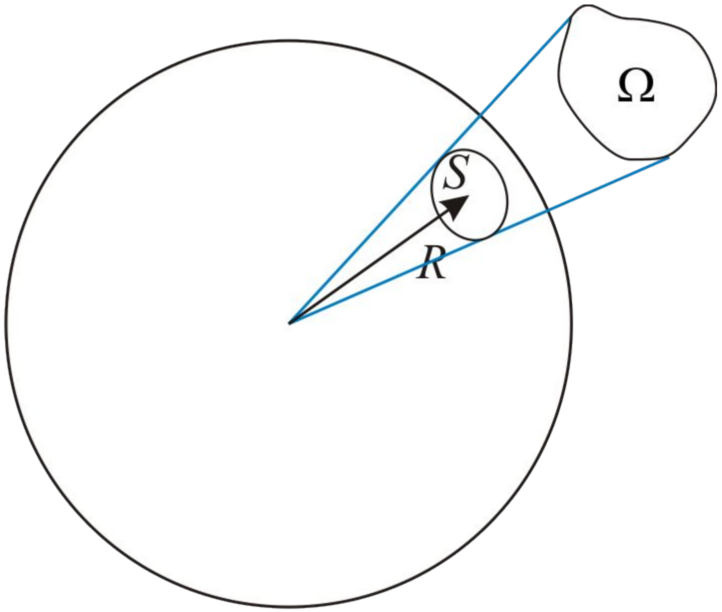
- Из рисунка видно, что поток, *входящий* в замкнутый объем, отрицателен ($\Phi < 0$), выходящий из него – *положителен* ($\Phi > 0$).



Таким образом, если число линий вектора **E**, входящих в данный объем и выходящих из него *одинаково*, то $\Phi = 0$.

Телесный угол и единицы его измерения

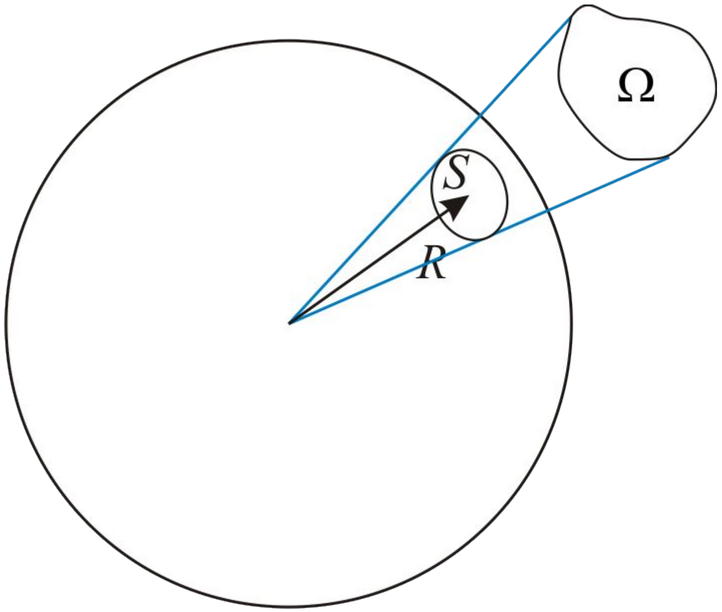
- **Телесный угол** – это область пространства, ограниченная конической поверхностью с замкнутой направляющей (бесконечная воронка).
- Единица измерения телесного угла – **стерадиан (ср)**.
- Телесный угол Ω в стерадианах равен отношению площади S, вырезаемой телесным углом на поверхности шара произвольного радиуса R, описанного из вершины телесного угла, к квадрату радиуса R^2 этого шара.



$$\Omega(\text{ср}) = \frac{S}{R^2}$$

Телесный угол и единицы его измерения

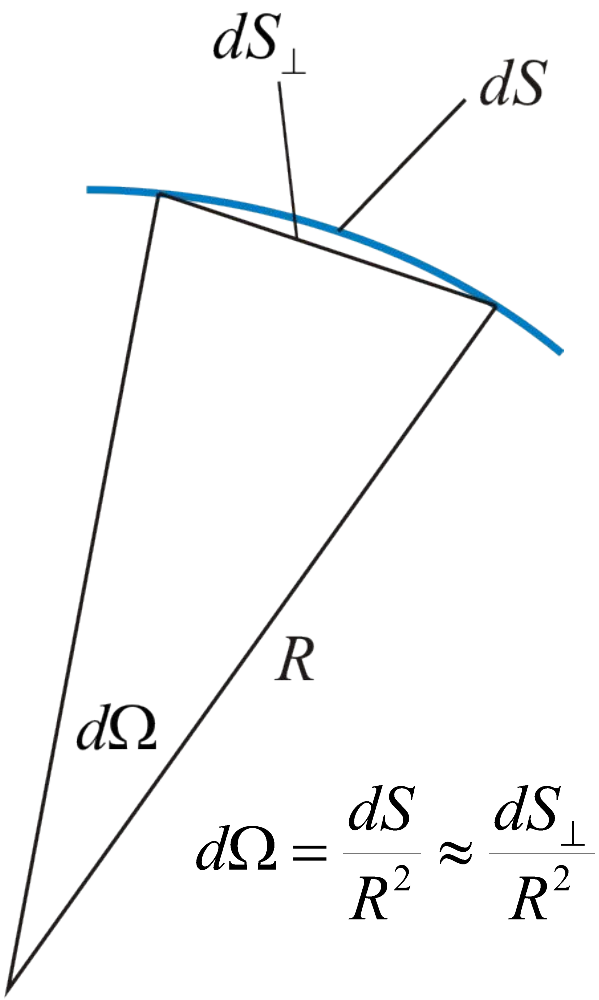
- Поскольку площадь поверхности шара составляет $4\pi R^2$, где R – радиус шара, то **полный телесный угол** Ω в стерадианах равен



$$\Omega(\text{ср}) = \frac{S}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

Элементарный телесный угол

- **Элементарный** (бесконечно малый) **телесный угол** $d\Omega$ – телесный угол, вырезающий на поверхности шара, описанного произвольным радиусом R из его вершины, бесконечно малый участок площади dS, величина которого приблизительно равна площади основания шарового сегмента $dS_{\perp}$, кривая поверхность которого совпадает с участком, вырезанным телесным углом.

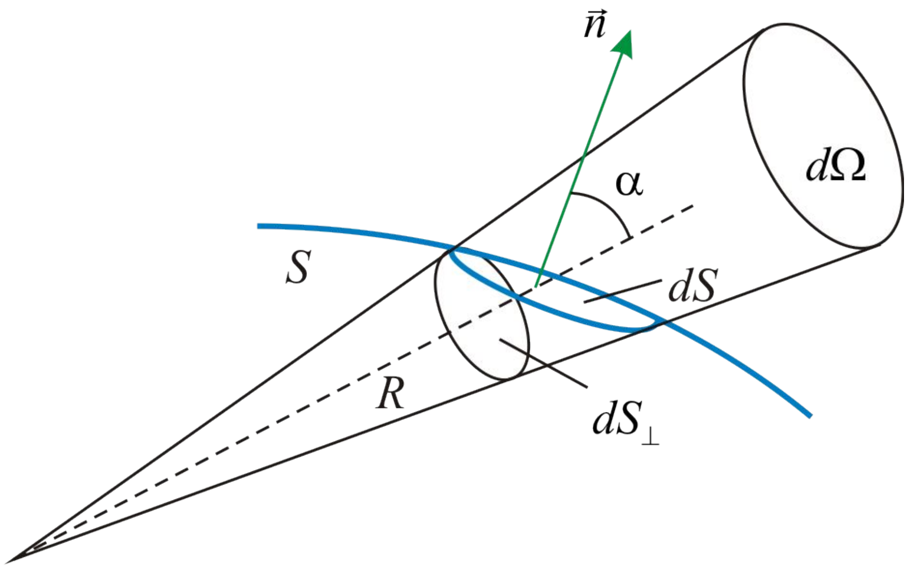


$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} \approx \frac{dS_{\perp}}{R^2}$$

Элементарный телесный угол

- Если элементарный угол $d\Omega$ вырезает на некоторой произвольной поверхности S элементарную площадку dS, вектор нормали **n** к которой образует угол α с осью телесного угла, то величина $d\Omega$ в стерадианах находится через площадь проекции dS на плоскость, перпендикулярную к оси телесного угла:

$$dS_{\perp} = dS\cos\alpha$$



$$d\Omega = \frac{dS_{\perp}}{R^2} = \frac{dS\cos\alpha}{R^2}$$

Теорема Гаусса

- Теорема Гаусса является важнейшей теоремой электростатики и формулируется следующим образом

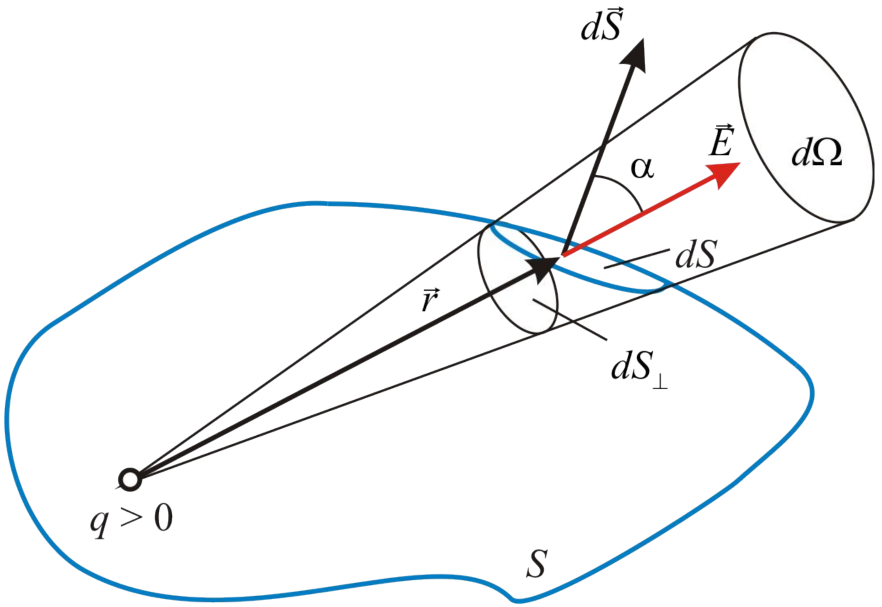
- **Теорема Гаусса:** *поток* Ф *вектора напряженности электрического поля* **E** *через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на* ε_0:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q}{\varepsilon_0}$$

- Докажем ее.

Теорема Гаусса

- Случай 1. Пусть внутри поверхности S расположен точечный заряд q.
- Элементарный поток вектора **E** через площадку dS:



$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS\cos\alpha =$$

$$= EdS_{\perp} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dS_{\perp} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Тогда поток Φ через поверхность S:

$$\Phi = \oint_S d\Phi = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Теорема Гаусса

- Случай 2. Пусть внутри поверхности S расположены точечные заряды или заряд, непрерывно распределенный в пространстве.

- Для потока вектора $\mathbf{E}_i$ каждого из зарядов q_i через поверхность S справедлива теорема Гаусса (см. случай 1):

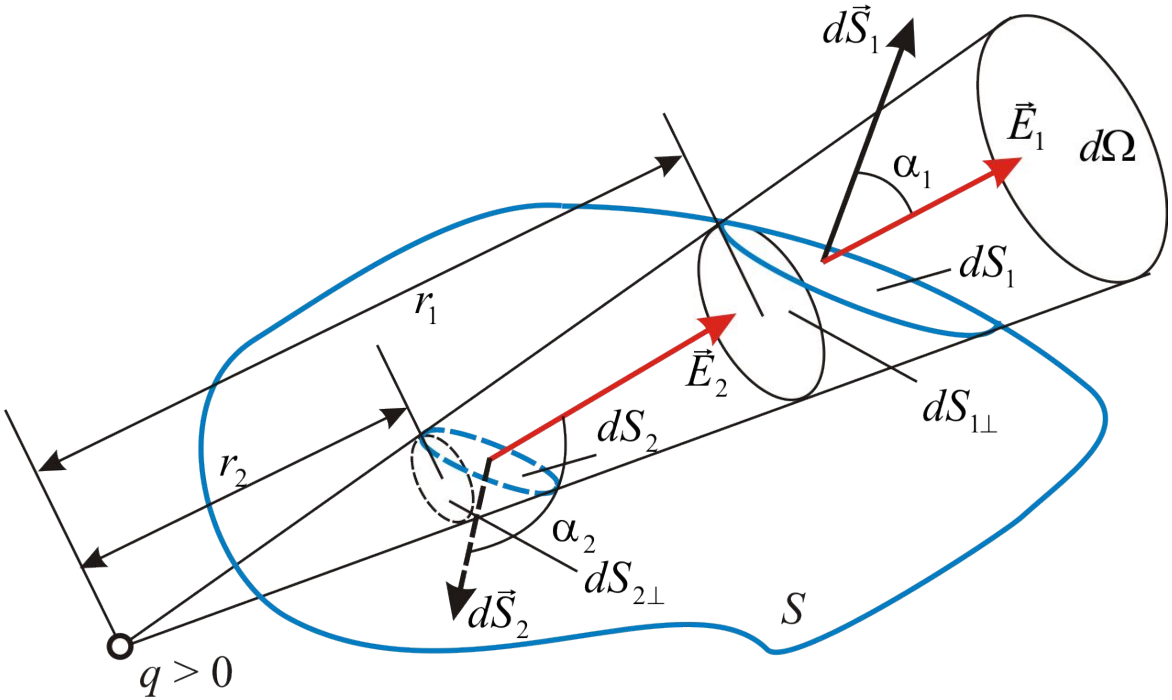
$$\oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

- Сложим подобные равенства для всех зарядов системы и применим принцип суперпозиции:

$$\sum_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

Теорема Гаусса

- Случай 3. Пусть заряд q расположен вне замкнутой поверхности S (снаружи).
- Разделим мысленно поверхность S на элементарные участки dS_i с помощью телесных углов $d\Omega$, причем каждый из $d\Omega$, вырезает на поверхности S две элементарные площадки dS_1 и dS_2.



Теорема Гаусса

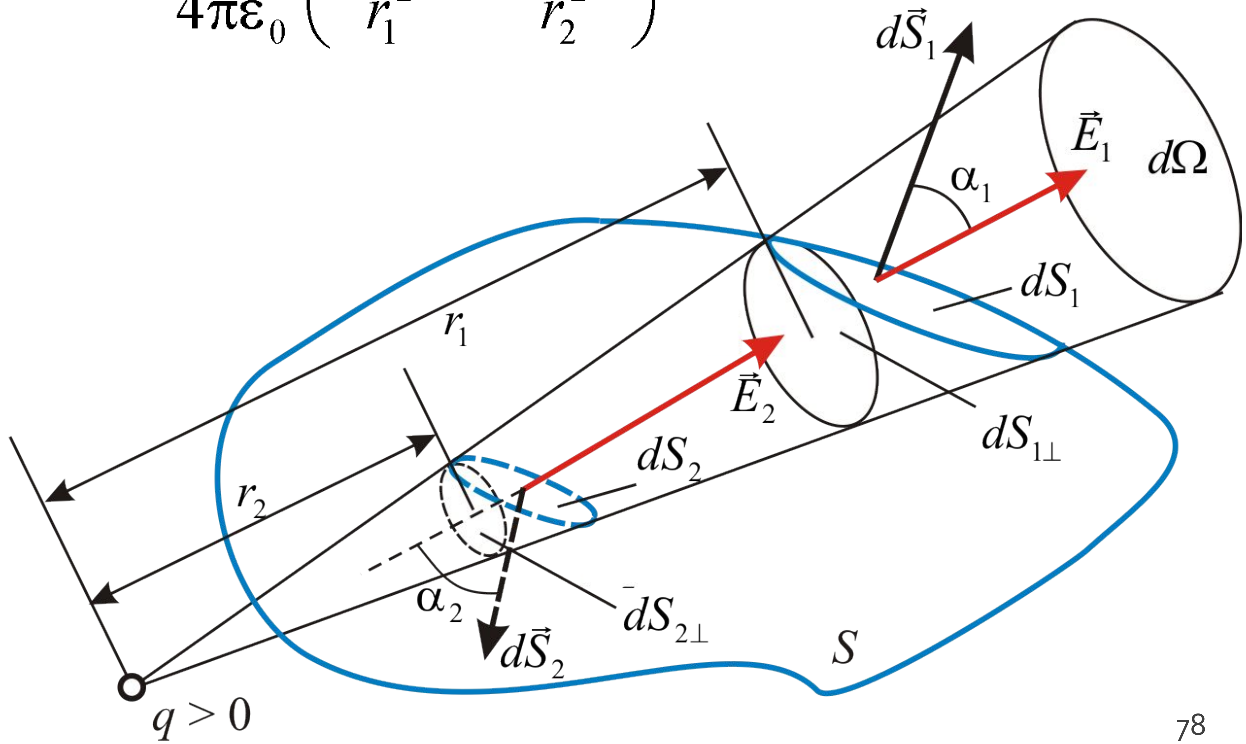
- Элементарный поток вектора **E** через эти площадки:

$$d\Phi = \vec{E}_1 d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 d\vec{S}_2 = E_1 dS_1 \cos\alpha_1 + E_2 dS_2 \cos(\pi - \alpha_2) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} dS_{1\perp} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} dS_{2\perp} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{dS_{1\perp}}{r_1^2} - \frac{dS_{2\perp}}{r_2^2}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(d\Omega - d\Omega) = 0$$

Суммируя все элементарные потоки, получаем, *что поток Φ вектора напряженности электрического поля* **E** *через поверхность, не охватывающую заряды, равен нулю.*



ЛЕКЦИЯ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

1.6 Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

Общие правила использования теоремы Гаусса для расчета электрических полей

- Основные затруднения при использовании теоремы Гаусса связаны с выбором замкнутой поверхности S. Чтобы их избежать, необходимо придерживаться следующих рекомендаций:
  - Из соображений симметрии находят направление вектора **E** в пространстве, окружающем заряженное тело.
  - Точка, в которой определяют вектор напряженности **E**, должна принадлежать замкнутой поверхности интегрирования S.
  - Поверхность S выбирают симметричной расположению зарядов, а ее составные части должны быть либо перпендикулярны, либо касательные к вектору напряженности. В этом случае поток вектора напряженности представляется в виде суммы потоков, один из которых равен нулю в силу перпендикулярности векторов **E** и $d\mathbf{S}$, а другой – равен 0 (т.к. в любой точке поверхности E_n = const) в зависимости от взаимного направления нормали к поверхности и вектора .

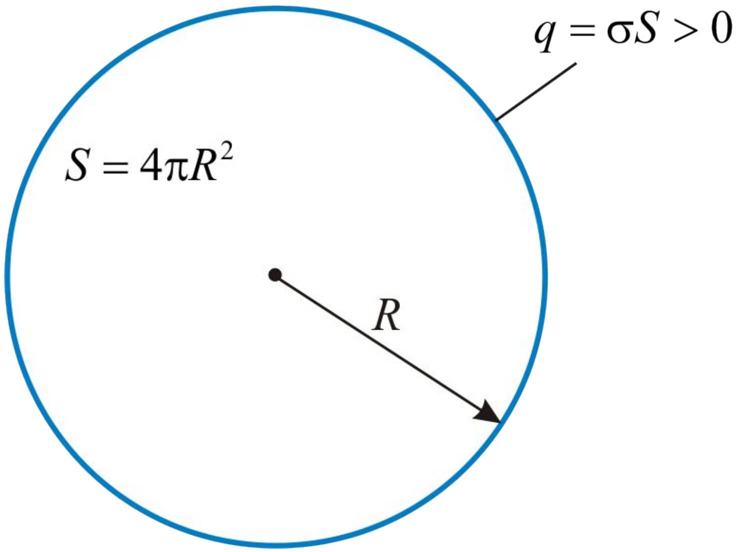
1.6 Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

1.6.1 ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОЙ СФЕРЫ

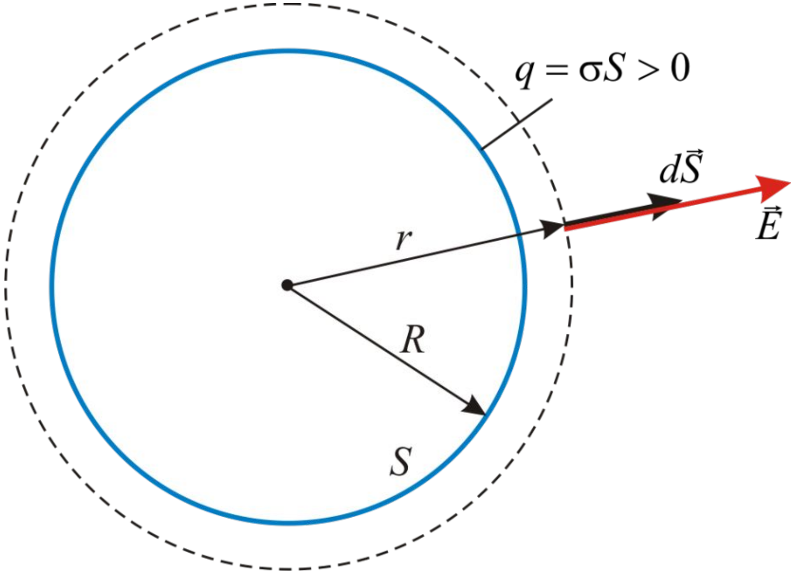
Постановка задачи

- Рассмотрим сферическую поверхность радиусом R, по которой равномерно распределен положительный заряд $q = \sigma S$, где σ – поверхностная плотность заряда, $S = 4\pi R^2$ – площадь сферы.

- Определим с помощью теоремы Гаусса напряженность **E** и потенциал ϕ электрического поля в точках, расположенных снаружи, внутри и на поверхности сферы.



Напряженность электрического поля вне сферы



- Найдем с помощью теоремы Гаусса напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстоянии $r > R$.
- Для этого выберем в качестве поверхности S_r интегрирования сферическую поверхность радиуса r, концентрическую к сфере:

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_r} E dS = E \oint_{S_r} dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

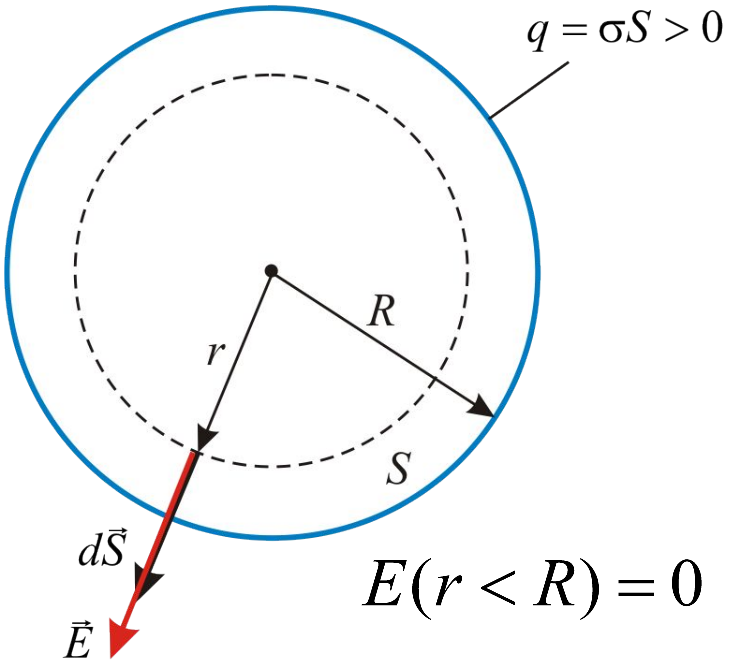
$$E(r > R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Напряженность электрического поля внутри сферы

- Найдем с помощью теоремы Гаусса напряженность электрического поля в точках, находящихся на расстоянии $r < R$ (внутри сферы).
- Для этого снова выберем в качестве поверхности S_r интегрирования сферическую поверхность радиуса r, концентрическую к сфере:

$$\oint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_r} E dS = E \oint_{S_r} dS = E \cdot 4\pi r^2 = 0$$

(т.к. выбранная поверхность не охватывает заряда).



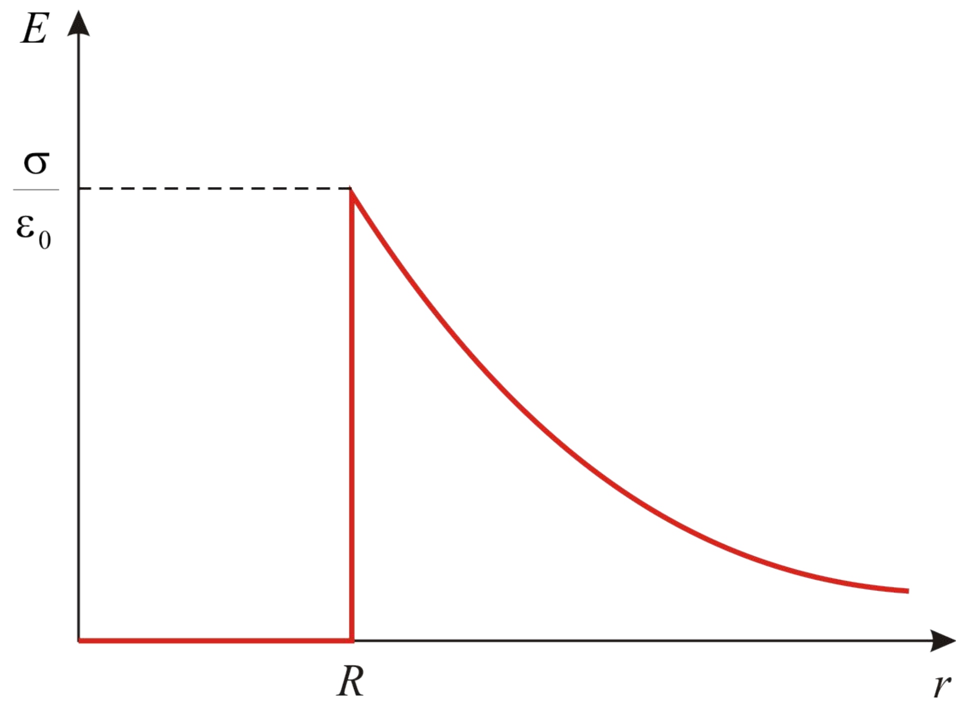
$$E(r < R) = 0$$

Следовательно, напряженность **E** электрического поля внутри заряженной сферы равна нулю.

Напряженность электрического поля заряженной сферы

- Таким образом, напряженность электрического поля заряженной сферы:

$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}, & r \geq R; \\ 0, & r < R. \end{cases}$$



Поле равномерно заряженной сферы вне этой поверхности совпадает с полем точечного заряда, а внутри поверхности поле равно нулю.

Потенциал электрического поля вне заряженной сферы

- Разность потенциалов между двумя точками, находящихся на расстояниях r_1 и r_2 от центра сферы (r_1, $r_2 > R$) вне ее, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E(r > R)dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

- Если $r_1 = r > R$, $r_2 = \infty$, то получаем, что потенциал $\phi(r > R)$ заряженной сферы в точке, находящейся на расстоянии r от ее центра:

$$\varphi(r > R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$$

Потенциал электрического поля внутри заряженной сферы

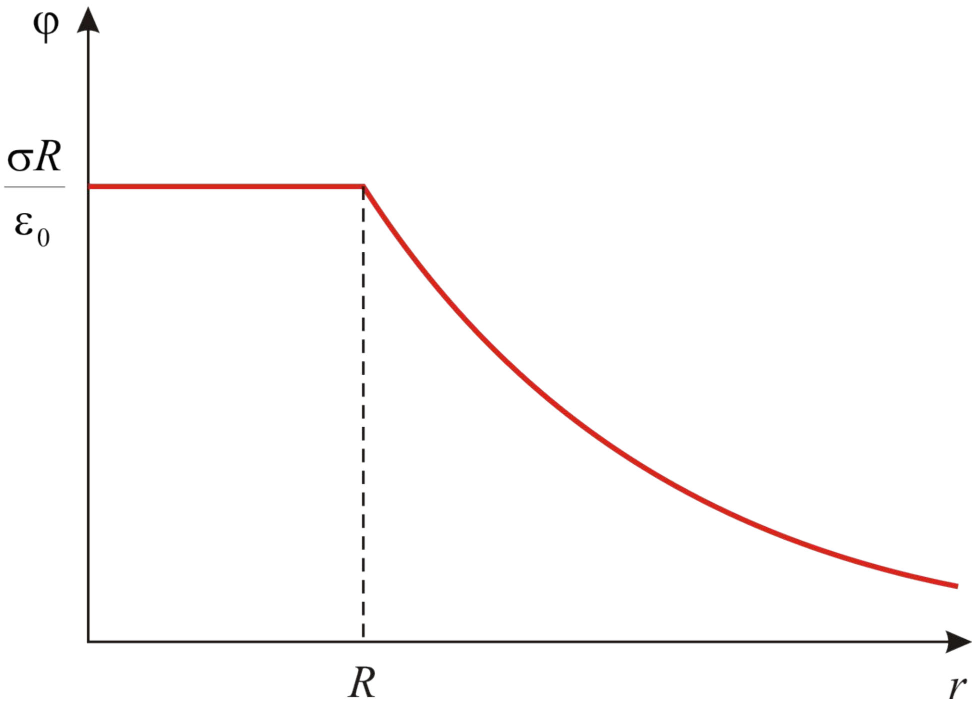
- Внутри заряженной сферы поля нет и потенциал в любой точке внутри ее равен потенциалу на ее поверхности $\phi(r < R) = \mathrm{const} = \phi(R)$:

$$\varphi(r < R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

Потенциал электрического поля заряженной сферы

- Таким образом, потенциал электрического поля равномерно заряженной сферы:

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}, & r \le R; \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}, & r > R. \end{cases}$$



1.6 Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

1.6.2 ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ШАРА

Постановка задачи

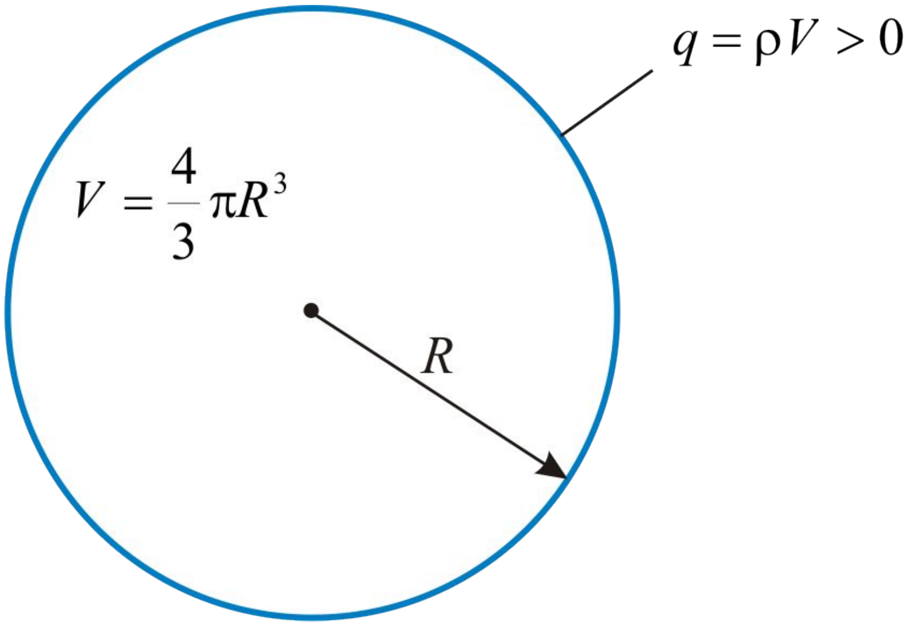
- Пусть заряд q равномерно распределен по объему шара радиуса R с объемной плотностью

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{q}{V}$$

где

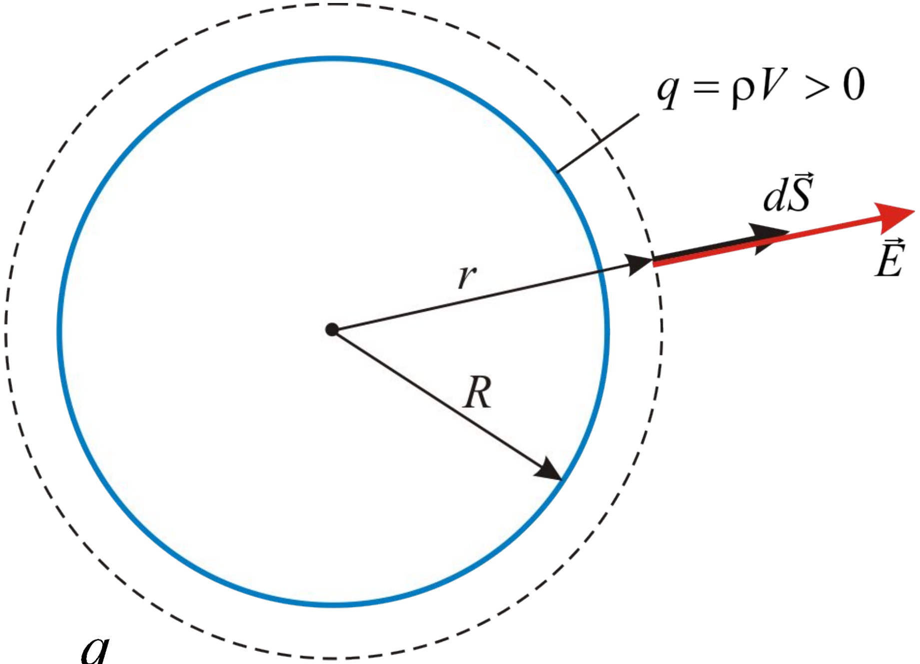
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Центр шара является центром симметрии поля.



Электрическое поле вне равномерно заряженного шара

- Найдем поле **E** вне шара ($r > R$).
- Окружим шар сферической поверхностью S_r радиуса r. Поток вектора напряженности **E** через эту поверхность, согласно теореме Гаусса:

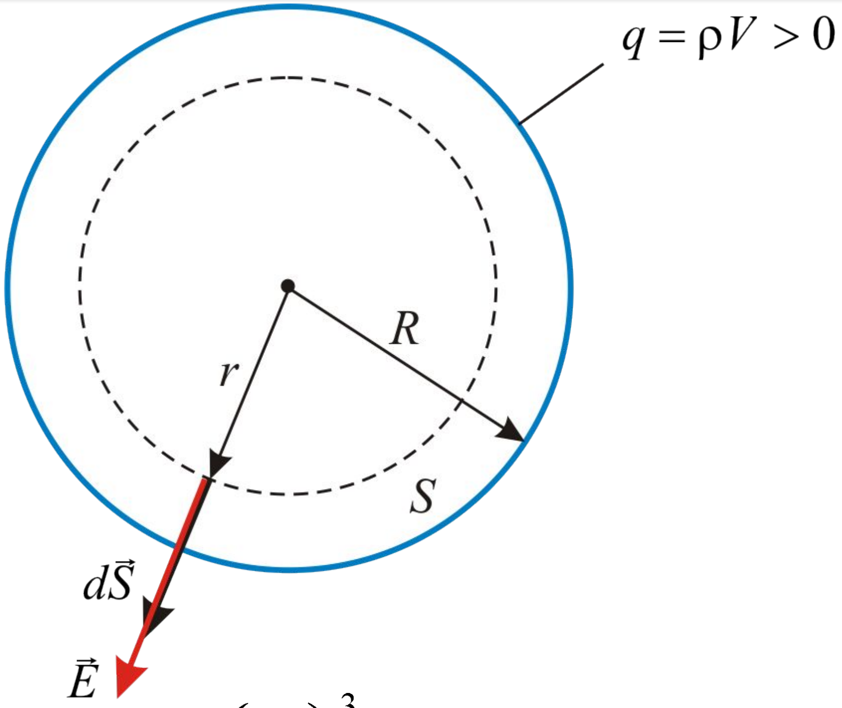


$$\oint_{S_r} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{S_r} E dS = E \oint_{S_r} dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- Тогда

$$E(r > R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Электрическое поле внутри равномерно заряженного шара



- Теперь найдем поле **E** внутри шара ($r < R$). Проведем сферическую поверхность S_r радиуса r. Заряд внутри этой поверхности:

$$q' = \rho V' = \frac{q}{V} \cdot V' = q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

- Тогда, по теореме Гаусса:

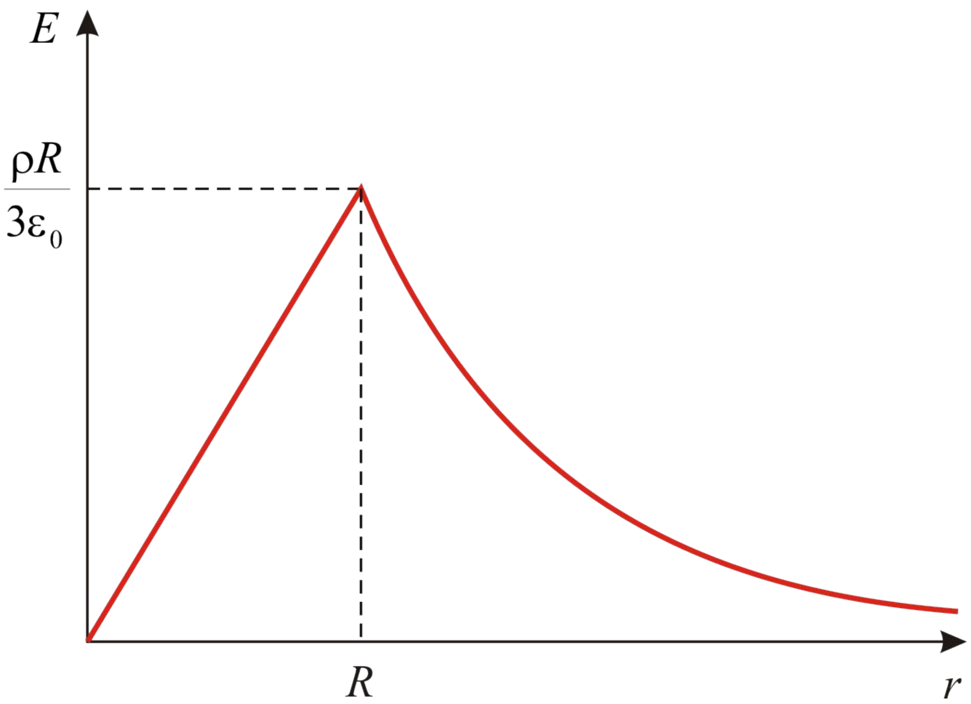
$$\oint_{S_r} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{S_r} E dS = E \oint_{S_r} dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$E(r < R) = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$$

Электрическое поле равномерно заряженного шара

- Таким образом, электрическое поле заряженного шара:

$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, & r \geq R; \\ \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}, & r < R. \end{cases}$$



Потенциал электрического поля вне равномерно заряженного шара

- Разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от центра шара (обе точки находятся вне шара: $r_1, r_2 > R$):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E(r > R)dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

- Если положить $r_1 = r$ и $r_2 = \infty$, то получаем, что потенциал ϕ в точке на расстоянии r от центра шара (вне его) равен

$$\varphi(r > R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \qquad \varphi(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

Потенциал электрического поля внутри равномерно заряженного шара

- Для точек, лежащих на расстоянии r внутри шара ($r < R$) имеем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E(r < R)dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

- Если, например, $r_2 = R$, $r_1 = r < R$, то

$$\varphi(r < R) = \varphi(R) + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

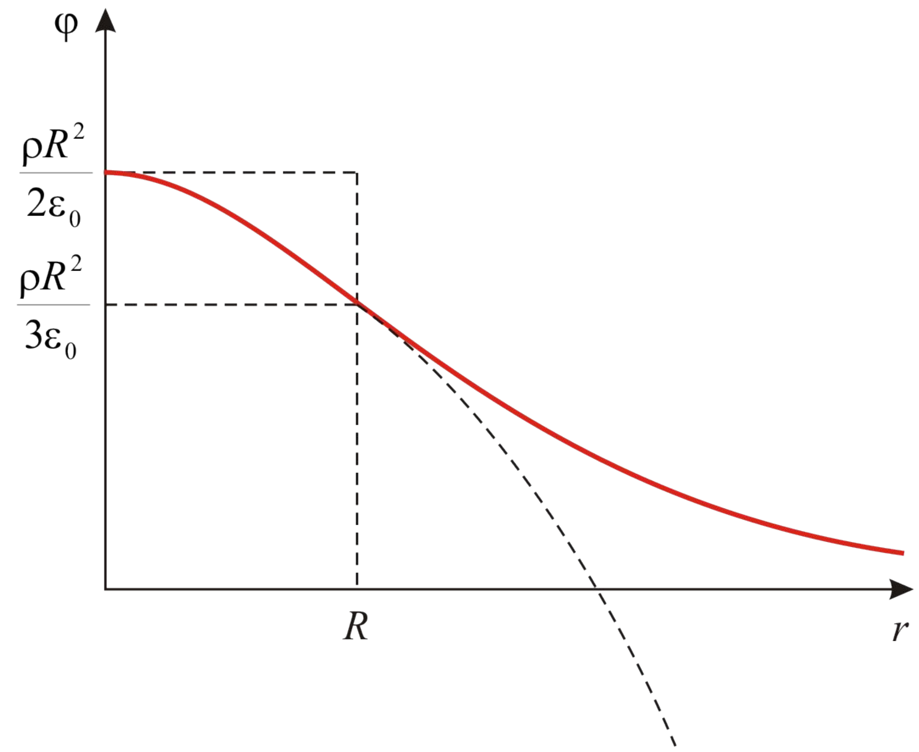
- Таким образом, потенциал электрического поля внутри шара

$$\varphi(r < R) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Потенциал электрического поля равномерно заряженного шара

- Потенциал электрического поля равномерно заряженного шара:

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0 r}, & r \geq R; \\ \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right), & r < R. \end{cases}$$



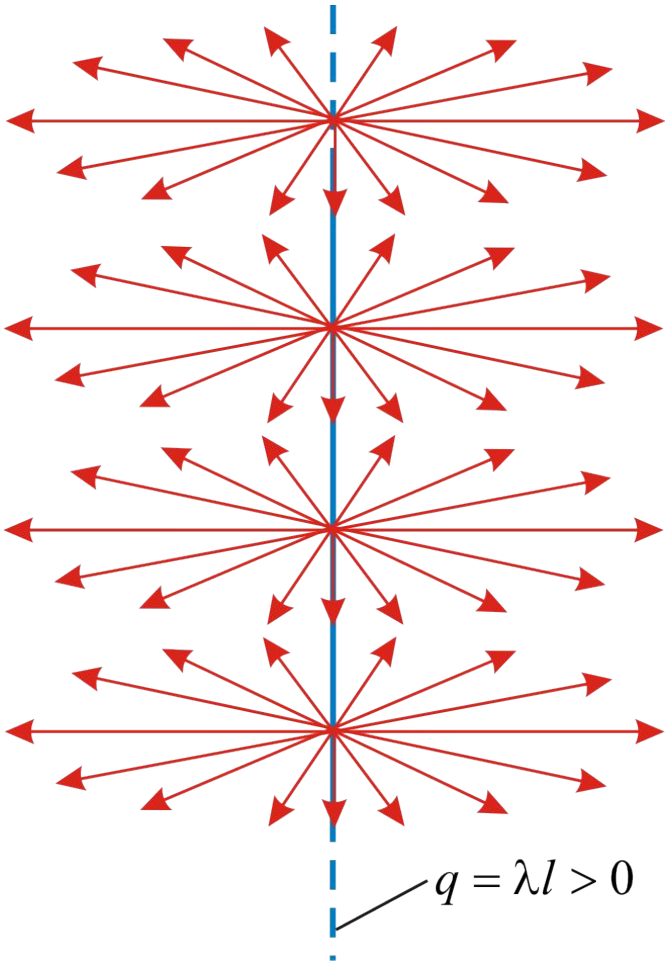
1.6 Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

1.6.3 ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОЙ НИТИ (ТОНКОГО ЦИЛИНДРА)

Постановка задачи

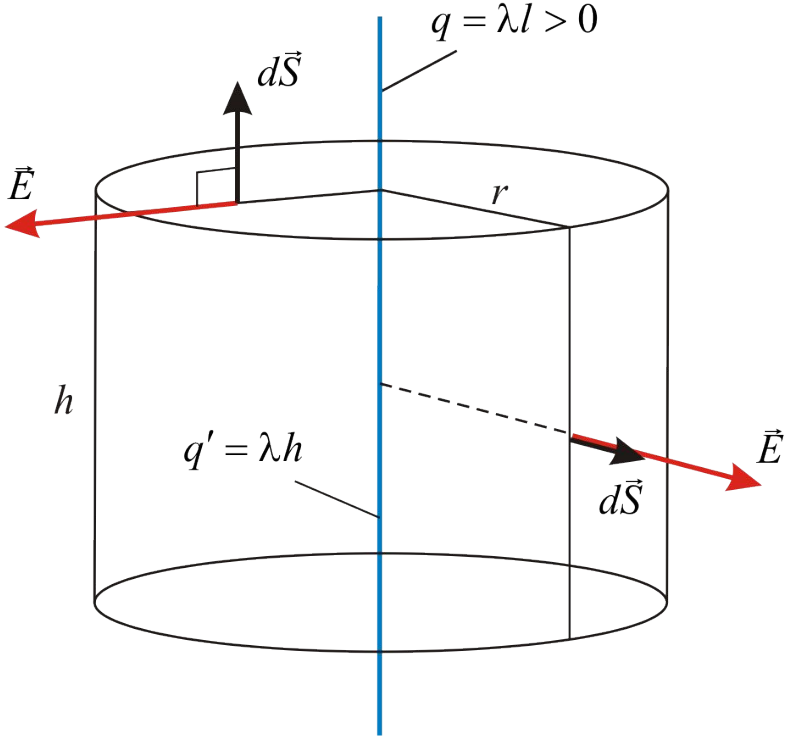
- Пусть бесконечный цилиндр радиуса R заряжен равномерно с линейной плотностью заряда $\lambda > 0$.

- Линии напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой густотой во все стороны относительно оси цилиндра.



Напряженность электрического поля тонкого цилиндра (нити)

- В качестве гауссовой поверхности выберем цилиндр радиуса r и высотой h, коаксиальный с заряженной нитью.
- Поток вектора **E** через поверхность S выбранного цилиндра равен только потоку через его боковую поверхность $S_{бок}$ (т.к. на основаниях цилиндра $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}$):



$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_{S(бок)} EdS = ES_{бок} =$$

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{q'}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E \cdot 2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Потенциал электрического поля тонкого цилиндра (нити)

- Разность потенциалов между двумя точками поля, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от оси цилиндра (нити):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E(r)dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau dr}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}$$

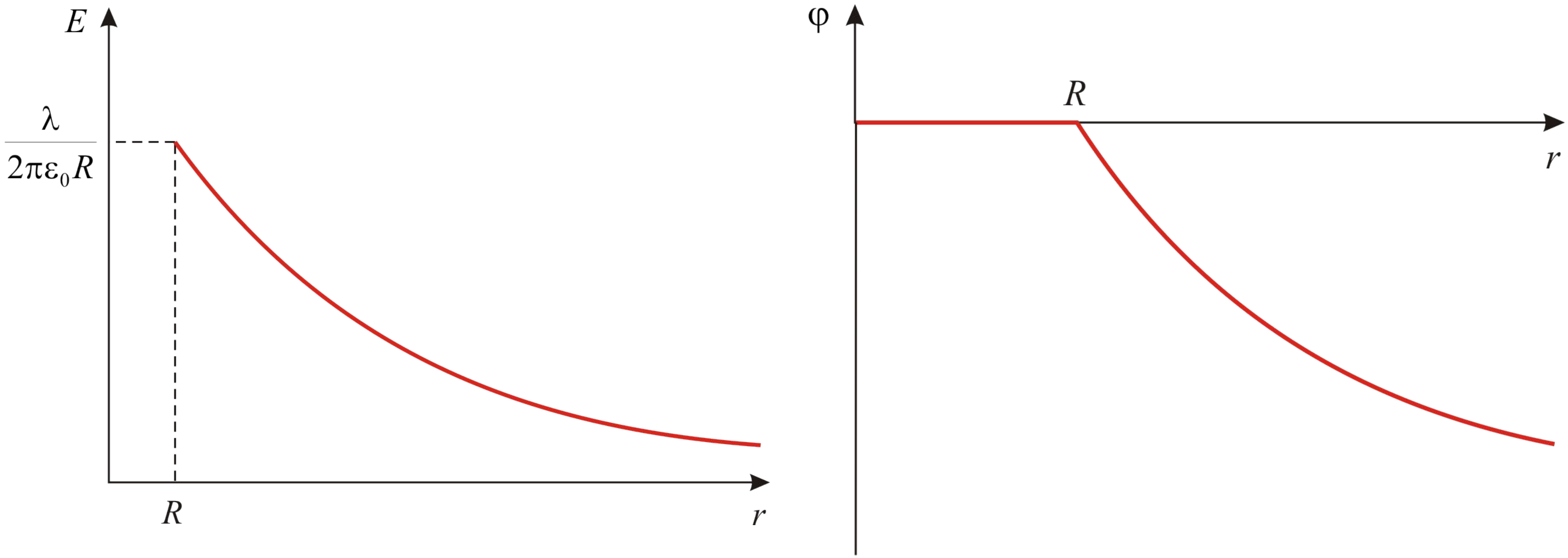
- Если $r_1 = R$ (радиус цилиндра), $r_2 = r$, то

$$\varphi(R) - \varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r}{R}$$

- И если принять потенциал на поверхности цилиндра (на оси нити) равным нулю: $\phi(R) = 0$, потенциал электростатического поля на расстоянии r от оси цилиндра вне его пределов:

$$\varphi(r \geq R) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r}{R}$$

Электрическое поле тонкого цилиндра (нити)



Поскольку цилиндр (нить) тонкий(-ая), то изображать график зависимости $E(r)$ на расстояниях $r < R$ не имеет смысла.

В следующем пункте рассмотрим случай заряженного равномерно по объему цилиндра.

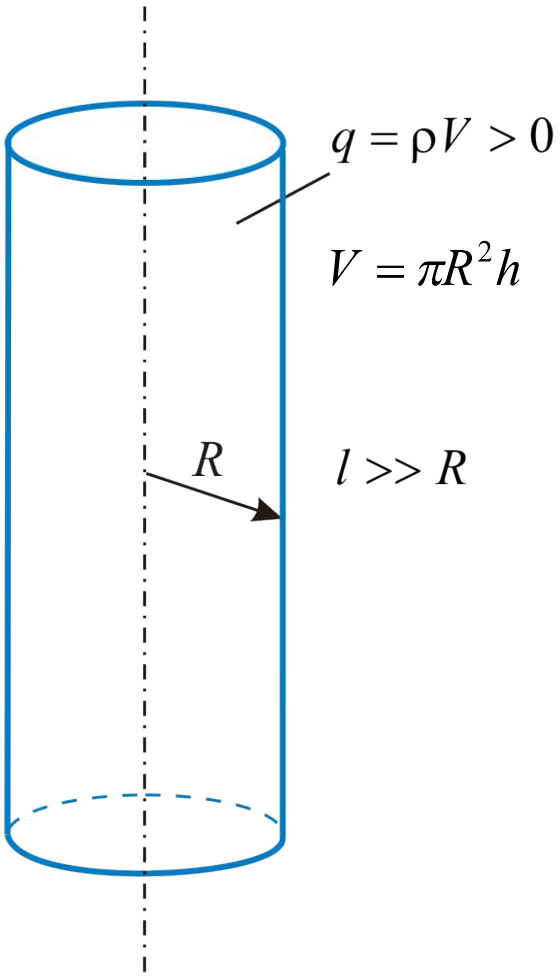
1.6 Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

1.6.4 ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ПО ОБЪЕМУ ЦИЛИНДРА

Постановка задачи

- Пусть длинный цилиндр радиуса R (длина h цилиндра намного больше его радиуса) заряжен равномерно с объемной плотностью заряда $\rho > 0$.

- Как и в предыдущем случае, линии напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра во все стороны относительно оси цилиндра.



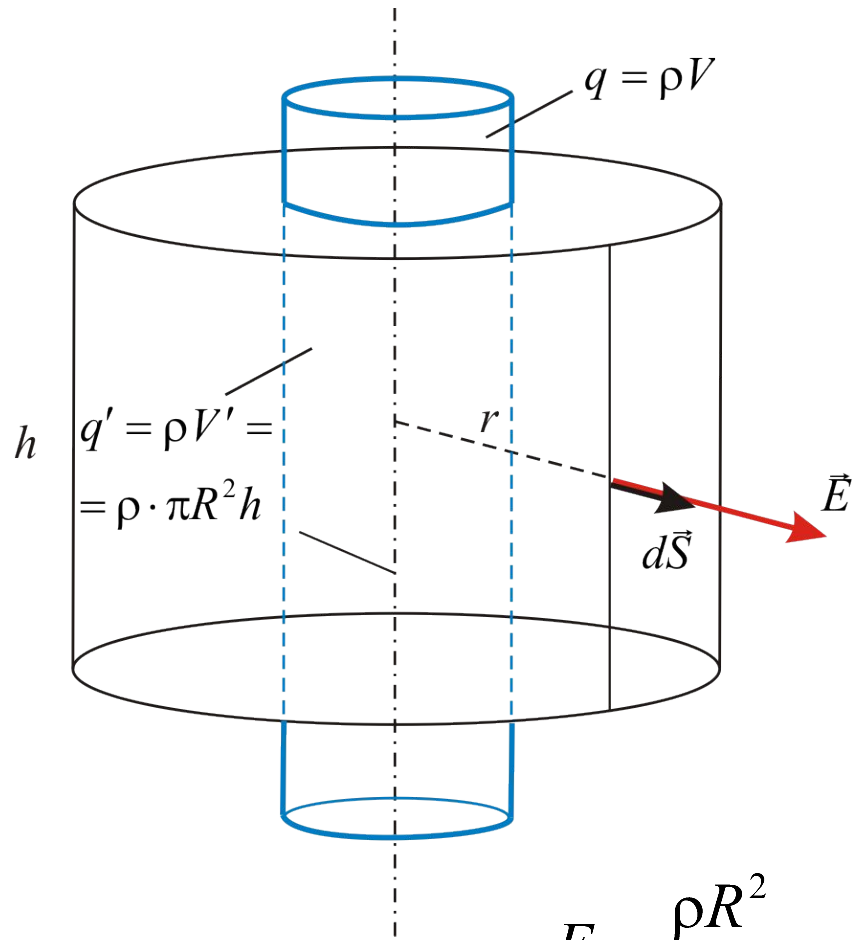
Напряженность электрического поля вне цилиндра

- Выбирая гауссову поверхность так же, как и в предыдущем случае, в виде коаксиального цилиндра с радиусом основания r и зарядом q' получим, что в области поля, где $r > R$:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_{S(\text{бок})} EdS = ES_{\text{бок}} =$$

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{q'}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E \cdot 2\pi rh =$$

$$= \frac{\rho V'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \pi R^2 h}{\varepsilon_0}$$



$$E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

Напряженность электрического поля внутри цилиндра

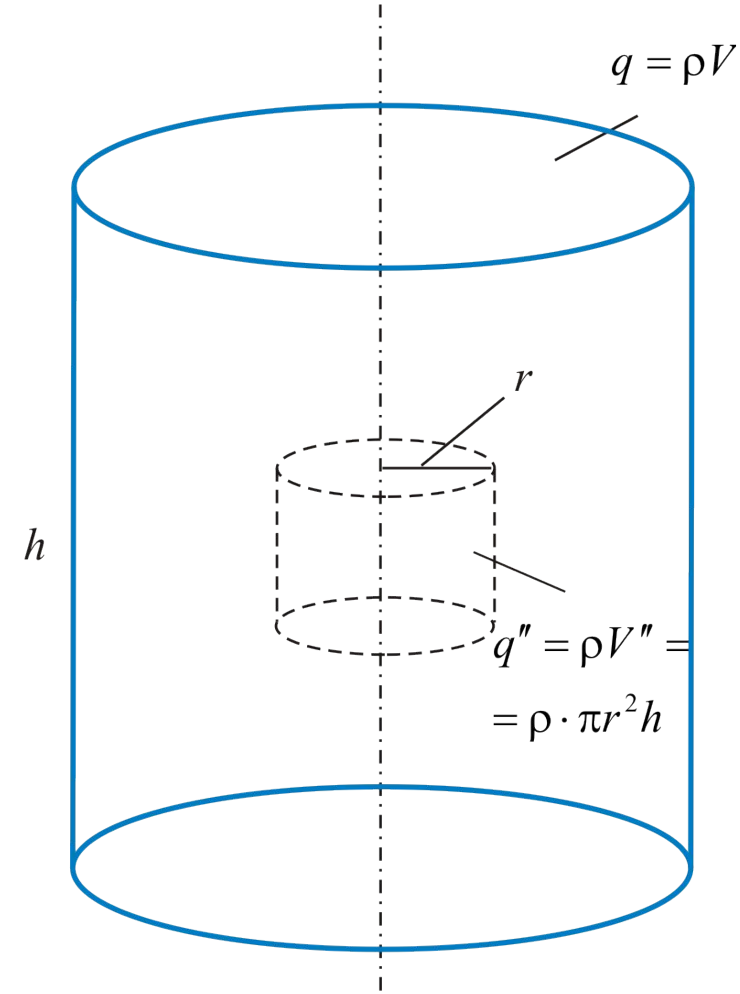
- Выбираем гауссову поверхность так же в виде коаксиального цилиндра с радиусом основания $r < R$ и зарядом q''. Получим, что в области поля внутри цилиндра:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_{S(\text{бок})} EdS = ES_{\text{бок}} =$$

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{q''}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E \cdot 2\pi rh =$$

$$= \frac{\rho V''}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$



Потенциал электрического поля внутри цилиндра

- Пусть потенциал на оси цилиндра равен нулю: $\phi(r = 0) = 0$. Тогда разность потенциалов между осью цилиндра и точной, находящейся от оси на расстоянии $r < R$:

$$\varphi(r=0)-\varphi(r<R)=0-\varphi(r<R)=\int_1^2 E(r<R)dr=\int_0^r \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}dr=\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}$$

- Тогда потенциал внутри цилиндра на расстоянии r от его оси:

$$\varphi(r<R)=-\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}$$

- Потенциал на поверхности цилиндра:

$$\varphi(r=R)=-\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}$$

Потенциал электрического поля вне цилиндра

- Теперь найдем потенциал в точке, находящейся на расстоянии $r > R$ от оси цилиндра (снаружи цилиндра). Для этого найдем разность потенциалов между этой точной и точкой на поверхности цилиндра:

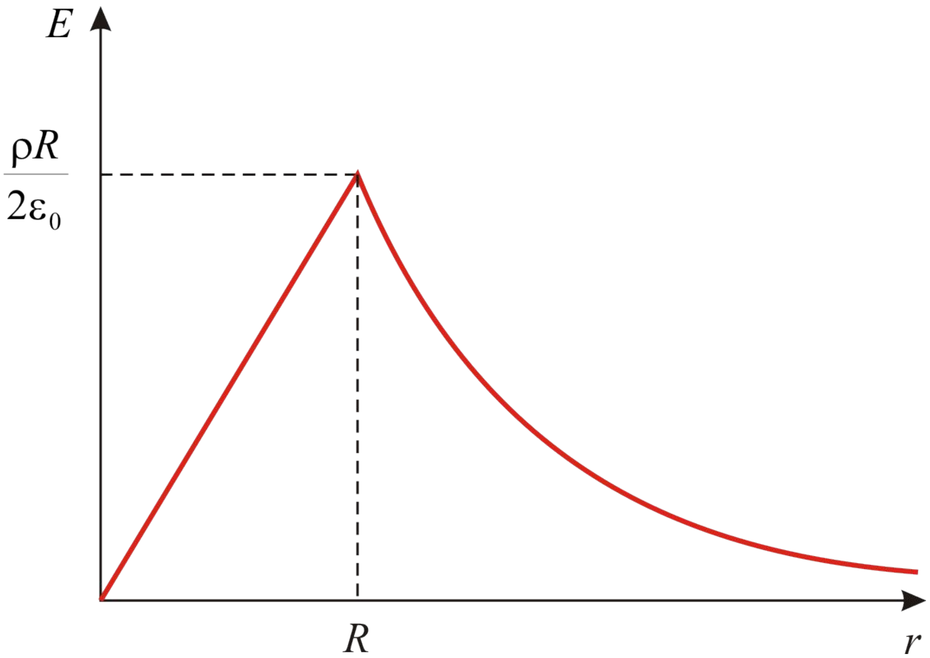
$$\varphi(R) - \varphi(r > R) = \int_R^r E(r > R)dr \Rightarrow$$

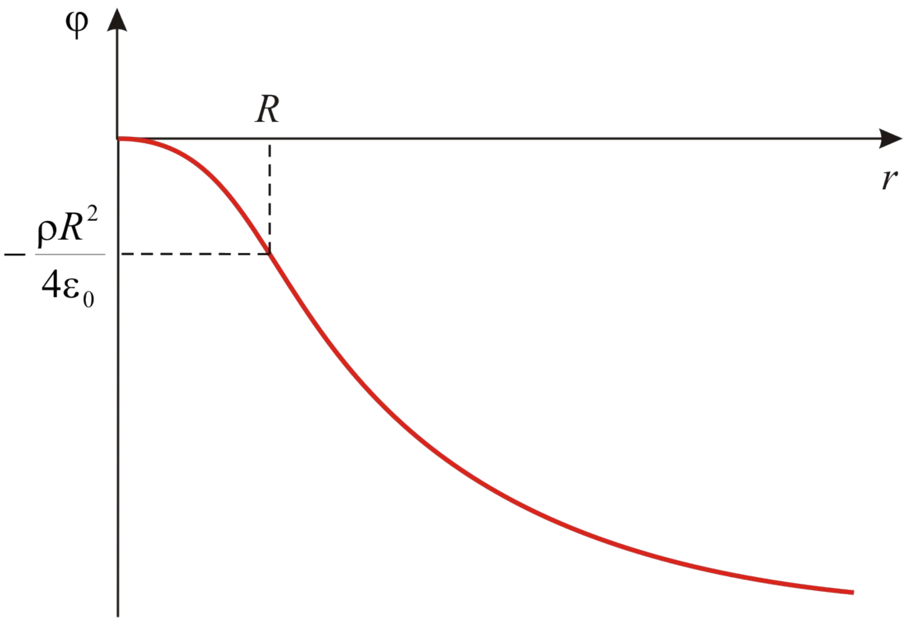
$$\Rightarrow \varphi(r > R) = \varphi(R) - \int_R^r E(r > R)dr =$$

$$= -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\int_R^r \frac{dr}{r} = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}\left(1 + 2\ln\frac{r}{R}\right)$$

Электрическое поле равномерно заряженного по объему цилиндра

$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}, & r < R; \\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}, & r \geq R \end{cases} \qquad \varphi = \begin{cases} -\dfrac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}, & r < R; \\ -\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}\left(1 + 2\ln\dfrac{r}{R}\right), & r \geq R \end{cases}$$



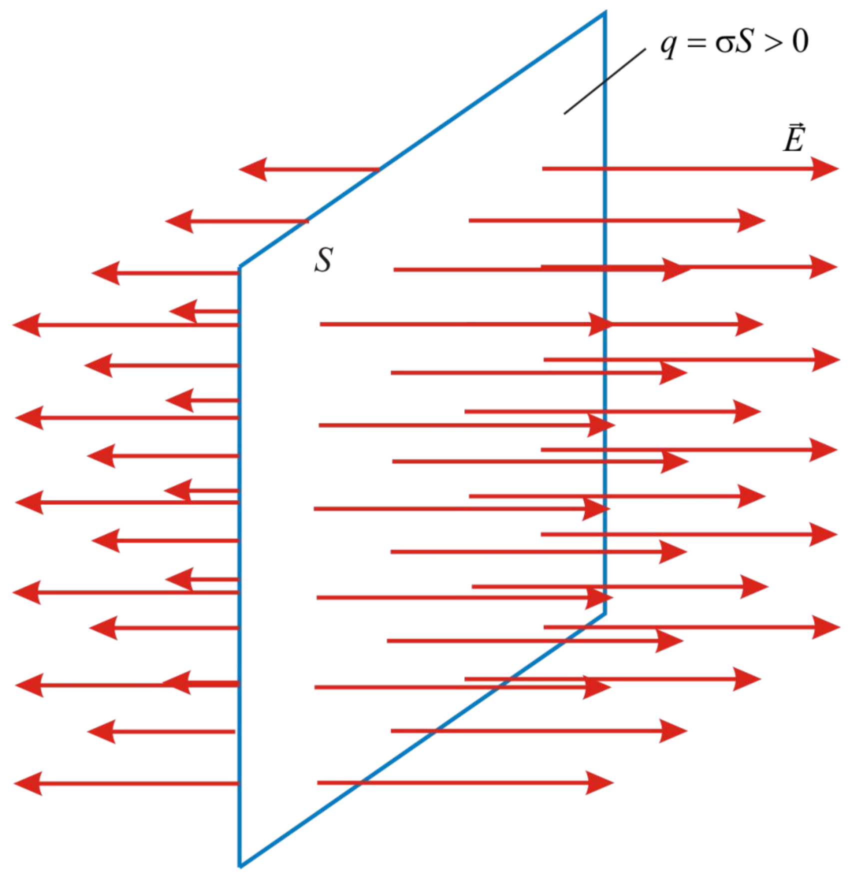


1.6 Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

1.6.4 ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ

Постановка задачи

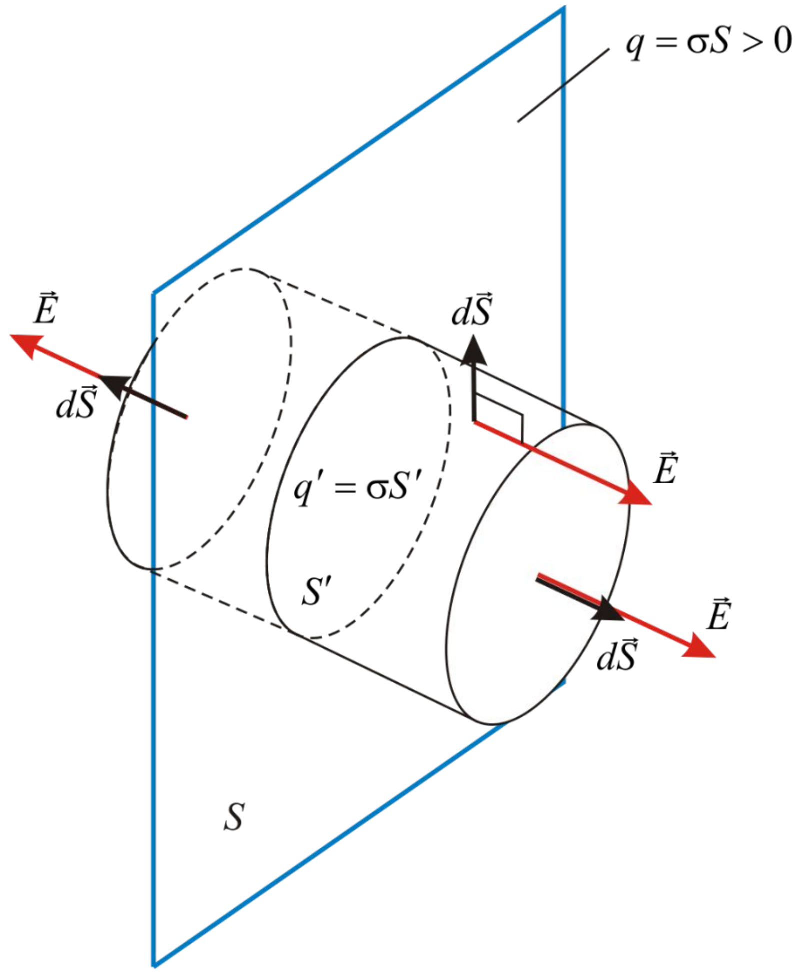
- Пусть бесконечно большая плоскость $x = 0$ равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ.
- Линии вектора напряженности электрического поля **E** направлены перпендикулярной к ней от нее (если $\sigma > 0$) или к ней (если $\sigma < 0$).
- Найдем поле заряженной плоскости.



Постановка задачи

- За гауссову поверхность удобно принять поверхность цилиндра, образующие которого перпендикулярны плоскости, а основания площадью S' параллельны ей и лежат по разные стороны от нее на одинаковых расстояниях.
- как векторы **E** направлены вдоль оси X: $\mathbf{E} = E_x\mathbf{i}$ и $E_x(x) = -E_x(-x)$, то

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 2ES' = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$



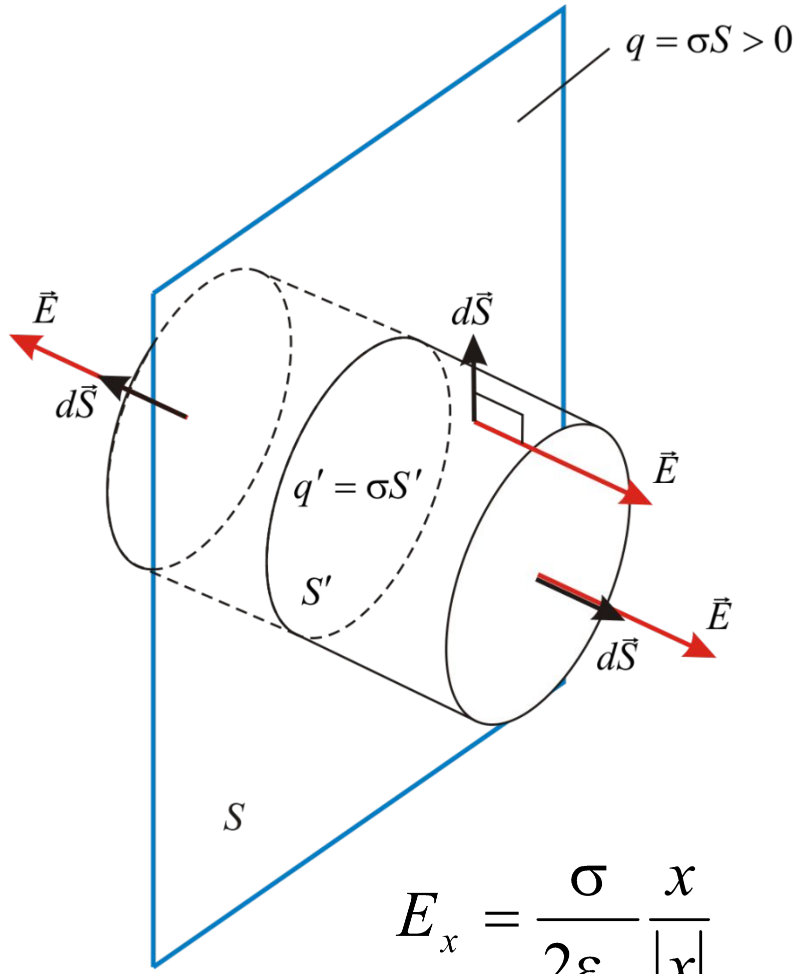
Напряженность электрического поля бесконечной плоскости

- Таким образом, напряженность электрического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- Или, в проекции на ось X

$$E_x = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}, & x \geq 0; \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}. & x < 0. \end{cases}$$



$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}$$

Потенциал электрического поля бесконечной плоскости

- Так как $E_x = -d\phi/dx$, то полагая потенциал $\phi = 0$ во всех точках заряженной плоскости, т.е. $\phi(x = 0) = 0$, получаем:
  - при $x > 0$:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \Rightarrow \varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$$

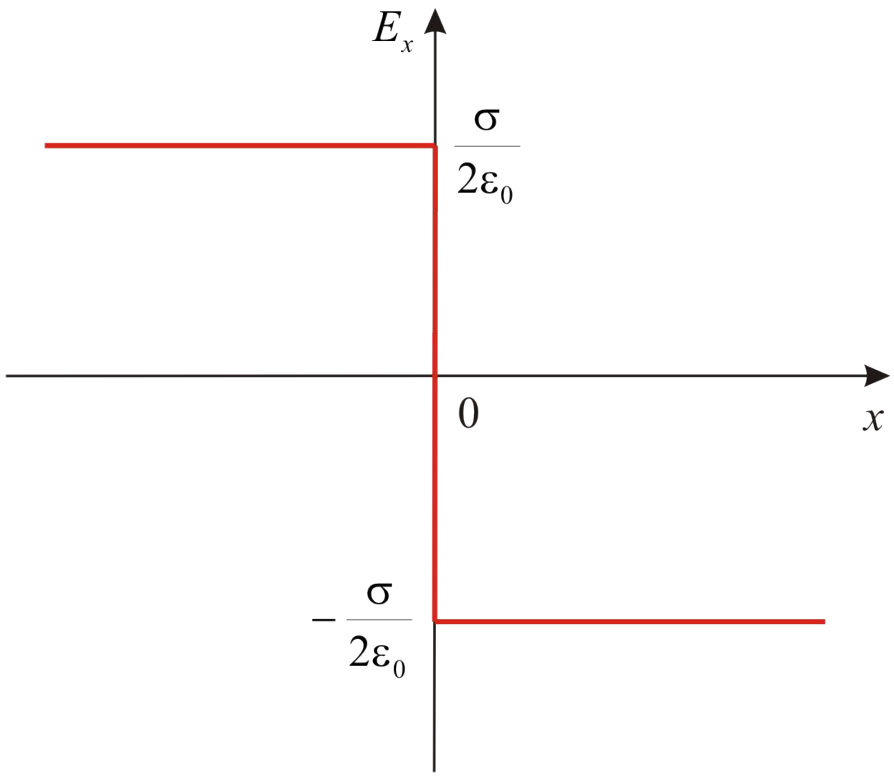
  - при $x < 0$:

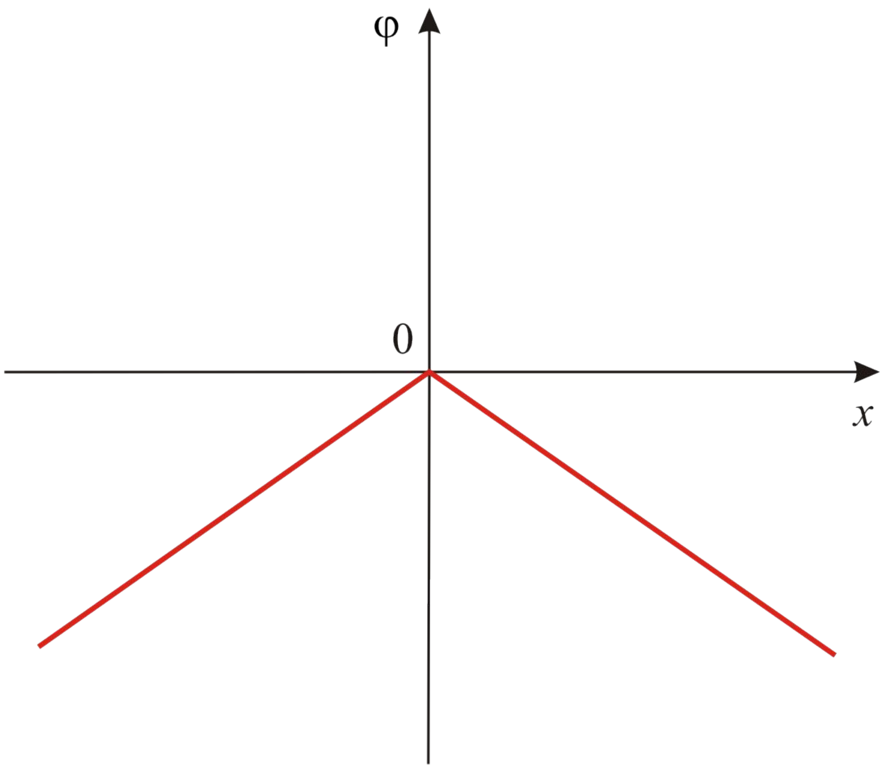
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \Rightarrow \varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$$

Или

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|$$

Электрическое поле равномерно заряженной бесконечной плоскости



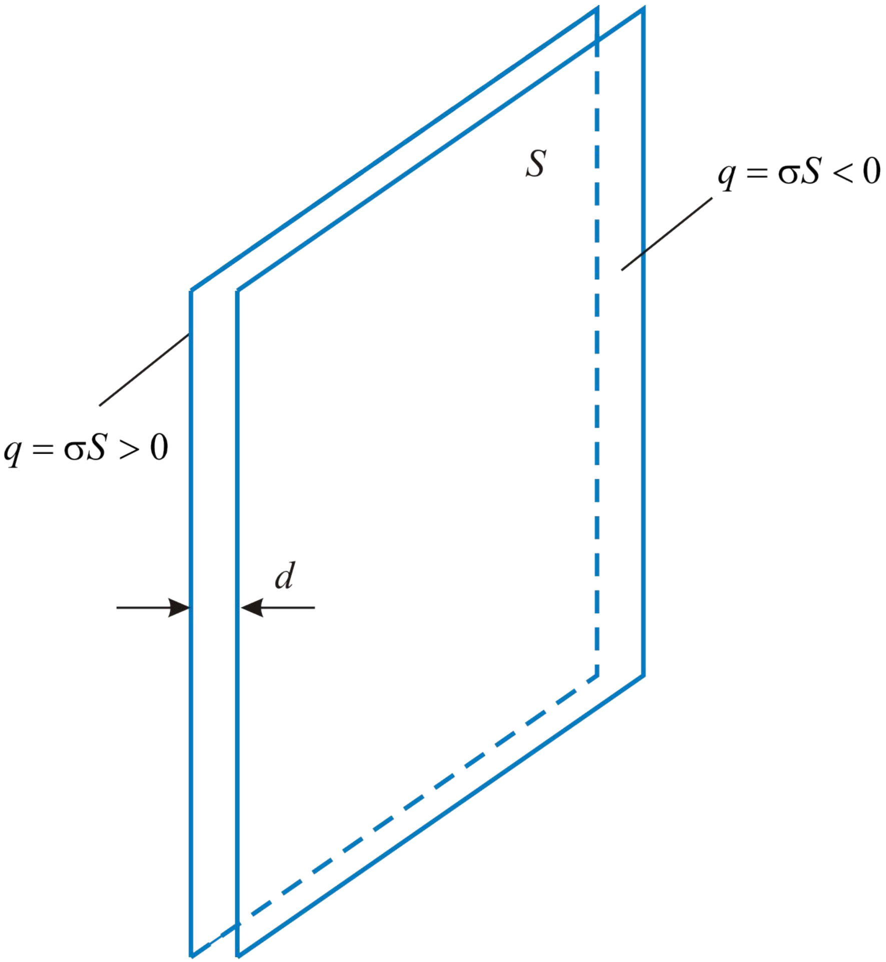


1.6 Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

1.6.5 ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДВУЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Постановка задачи

- С помощью предыдущего примера найдем напряженность и потенциал электрического поля двух параллельных однородно и разноименно заряженных зарядами $q = \sigma S$ бесконечных плоскостей, расстояние между которыми обозначим d.

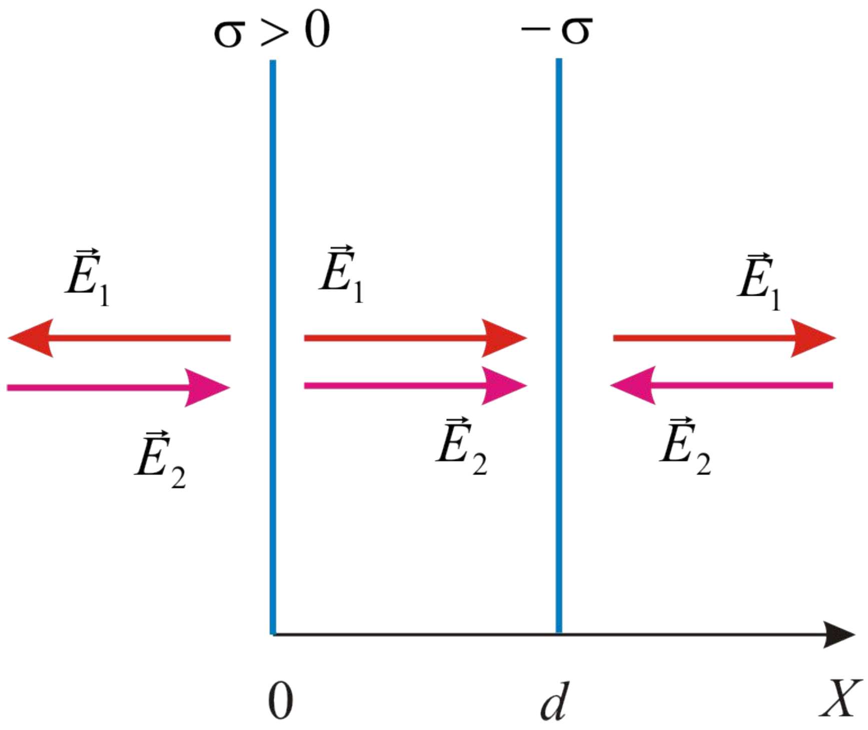


Напряженность электрического поля двух равномерно разноименно заряженных бесконечных плоскостей

- Из предыдущего примера следует, что модули векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ напряженностей полей первой и второй плоскостей равны по модулю:

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- и всюду направлены параллельно оси X, перпендикулярной плоскостям.



Напряженность электрического поля двух равномерно разноименно заряженных бесконечных плоскостей

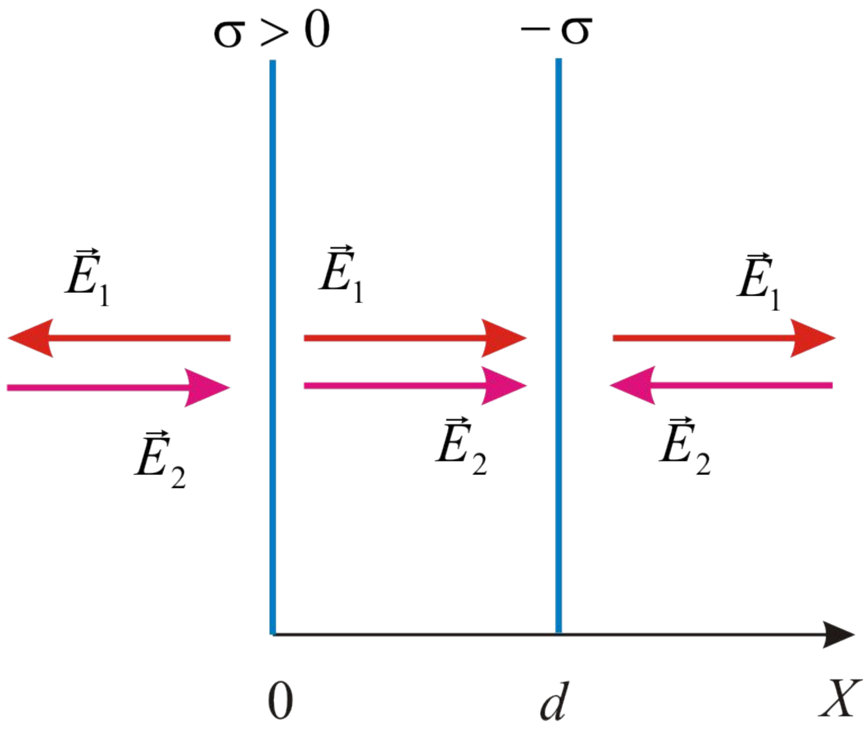
- Согласно принципу суперпозиции полей,

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}$$

- тогда, слева от первой плоскости ($x < 0$) и справа от второй плоскости ($x > d$) поле отсутствует: $\mathbf{E} = 0$
- В области между плоскостями:

$$\vec{E} = 2\vec{E}_1$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



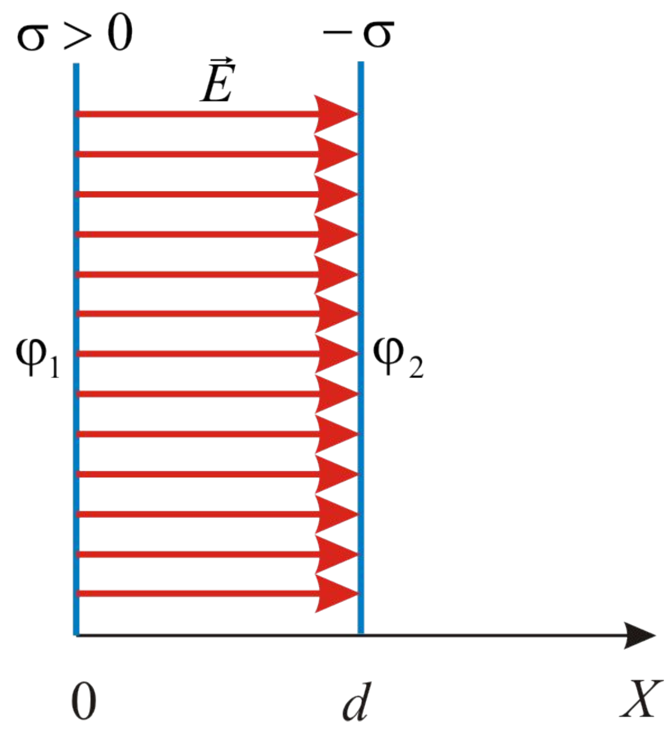
Потенциал электрического поля двух равномерно разноименно заряженных бесконечных плоскостей

- Потенциал второй плоскости ϕ_2 найдем из второго равенства системы:

$$\varphi_2 = \varphi(x = d) = \varphi_1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

- Таким образом, разность потенциалов между плоскостями:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$



Электрическое поле двух равномерно и разноименно заряженных бесконечных плоскостей