

Муниципальное Бюджетное Общеобразовательное Учреждение
Москаленского Муниципального района Омской области
«Гимназия имени Горького А.М.»

Открытый банк заданий ОГЭ на подобие треугольников

Методическое пособие

Выполнил
Латышевский
Вадим Игоревич,
9«А» Класс

Москаленки-2017

Оглавление

1. Теоритический справочник
2. Типы и решение задач 1 Части ОГЭ
 - a) Задачи про проектор.
 - b) Задачи про столб, фонарь, тень человека
 - c) Задачи про колодец с «журавлем» и на шлагбаум
3. Типы и решение задач 2 Части ОГЭ.
 - a) Задачи на вычисление
 - b) Задачи на доказательство

Раздел 1

Теоритический справочник

Теоритический справочник

Пропорциональные отрезки

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т.е.

$$\frac{AB}{CD}$$



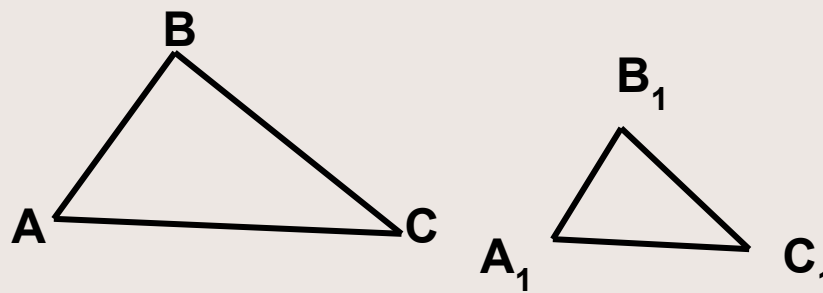
Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 , если

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$$

Теоритический справочник

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



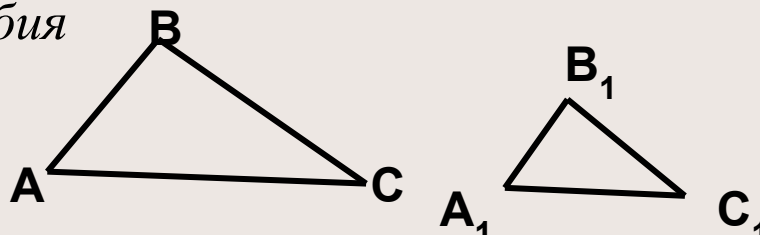
Число k , равное отношению сходственных сторон треугольников, называется *коэффициентом подобия*

$$k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Теоритический справочник

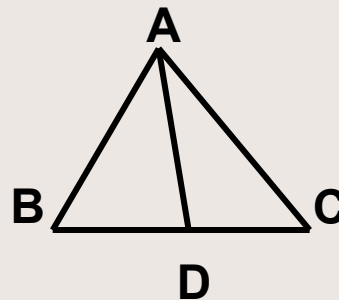
Отношением площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$$



Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ или } \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$



Теоритический справочник

Признаки подобия треугольников

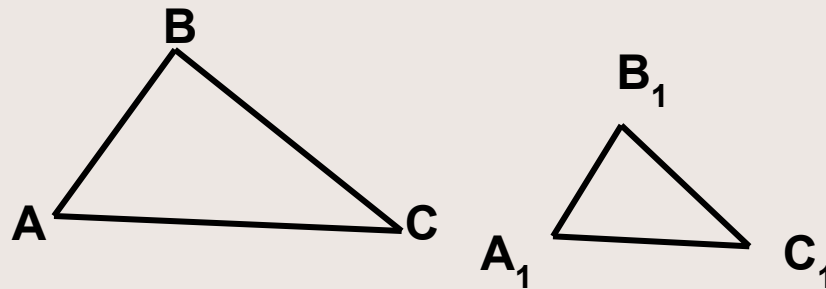
I признак подобия треугольников

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны

$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1,$

Если $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$



Теоритический справочник

Признаки подобия треугольников

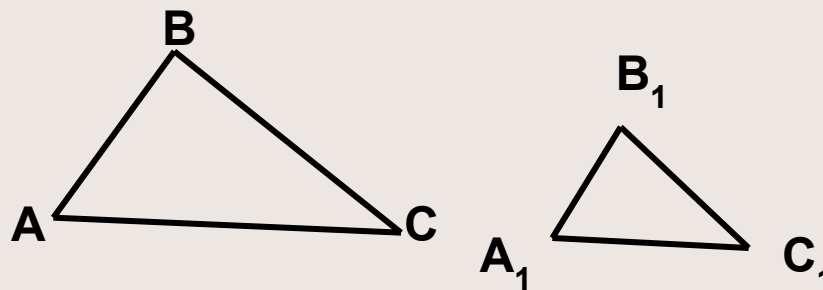
II признак подобия треугольников

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны

$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1,$

$$\text{Если } \angle A = \angle A_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$



Теоритический справочник

Признаки подобия треугольников

III признак подобия треугольников

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны

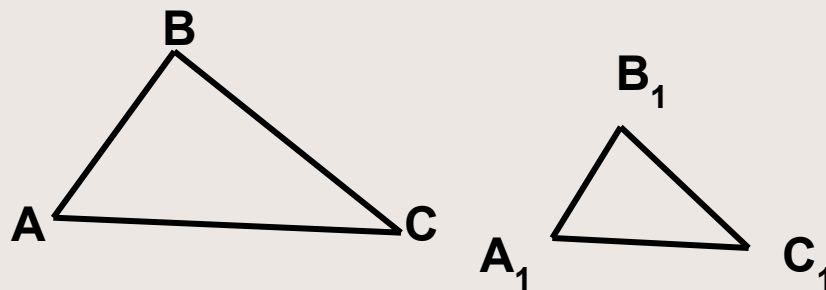
Дано:

$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1,$

Если

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

То $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$



Теоритический справочник

Свойства подобных треугольников.

- Если треугольники подобны, то сходственные стороны пропорциональны.
- Если треугольники подобны, то соответственные углы (лежащие против сходственных сторон) равны.
- Если треугольники подобны, то элементы треугольников (высоты, медианы, биссектрисы) соответственно пропорциональны коэффициенту подобия.

Раздел 2

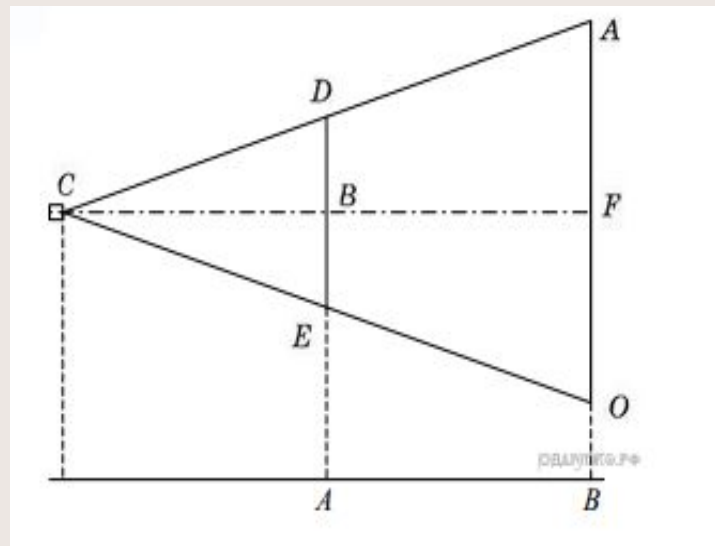
Типы и решение задач 1 Части ОГЭ

Алгоритм решения задач на подобие треугольников

1. Находим пару предполагаемо подобных треугольников.
2. Доказываем, что эти треугольники подобны, используя признаки подобия треугольников.
3. Определяем сходственные стороны треугольников и составляем соответствующую пропорцию.
4. Находим неизвестные члены этой пропорции.

Задачи про проектор.

Проектор полностью освещает экран A высотой 80 см, расположенный на расстоянии 250 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 160 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?



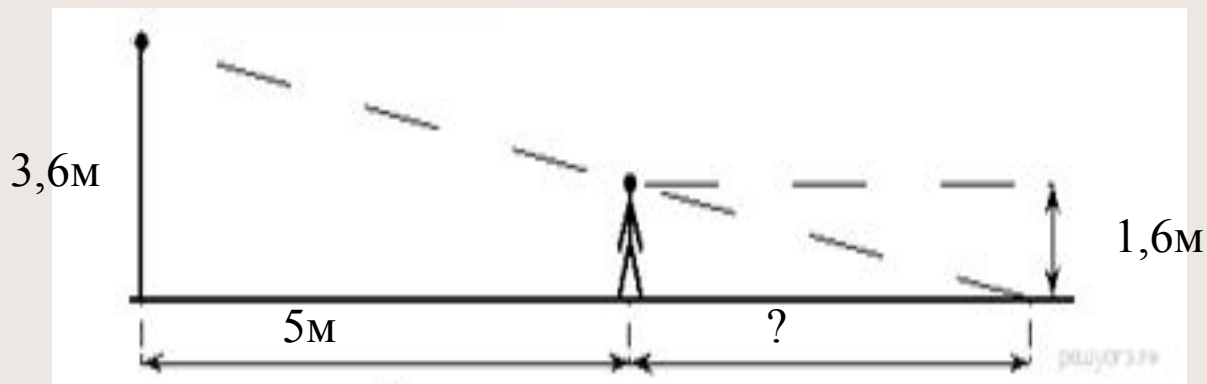
Задачи про проектор.

Задачи для самостоятельного решения

1. Проектор полностью освещает экран A высотой 80 см, расположенный на расстоянии 120 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 330 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?
2. Проектор полностью освещает экран A высотой 160 см, расположенный на расстоянии 300 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 80 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?
3. Проектор полностью освещает экран A высотой 50 см, расположенный на расстоянии 110 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 360 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?

Задачи про столб, расстояние, тень человека.

- 1) Человек ростом 1,6 м стоит на расстоянии 5 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 3,6 м. Найдите длину тени человека (в метрах).



Задачи про столб, расстояние, тень человека.

Решение: По сути, в задаче нужно найти величину из двух подобных прямоугольных треугольников (по двум углам).

Так как треугольники подобны, то можно записать соотношение для их сторон: $\frac{3,6}{1,6} = \frac{5+x}{x}$ откуда

$$3.6x=1.6(5+x)$$

$$3.6x=1.6x+8$$

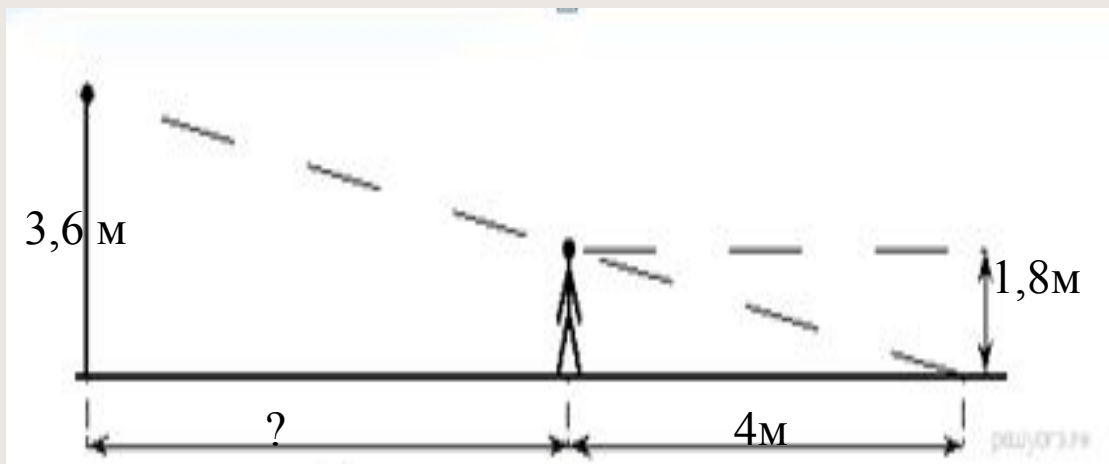
$$3.6x-1.6x=8$$

$$2x=8/2$$

$$x=1$$

Задачи про столб, расстояние, тень человека.

- 2) На каком расстоянии (в метрах) от фонаря стоит человек ростом 1,8 м, если длина его тени равна 4 м, высота фонаря 3,6 м?



Задачи про столб, расстояние, тень человека.

Решение: Обозначим человека как АВ (от головы до земли), фонарь как CD (от лампочки до земли), конец тени человека обозначим точкой O.

Тогда будем иметь два подобных прямоугольных треугольника: OBA и ODC (подобие по двум углам)

Так как треугольники подобны, то можно записать соотношение их

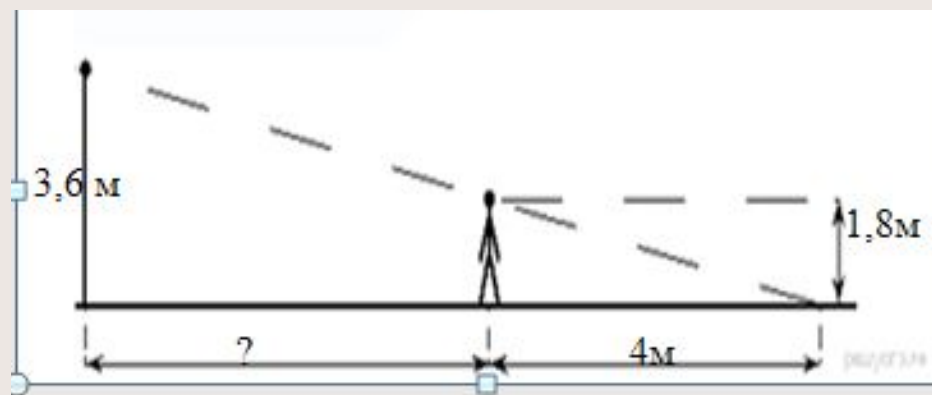
сторон: $\frac{3,6}{1,8} = \frac{x+4}{x}$

Откуда:

$$x = \frac{1,8(x+4)}{3,6}$$

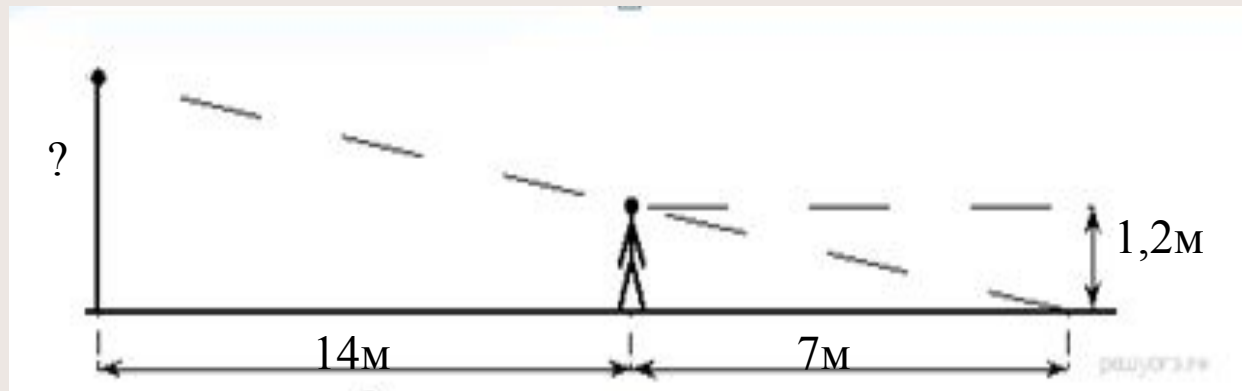
$$x = \frac{1,8x + 7,2}{3,6}$$

$$x = 1,8x + 2$$



Задачи про столб, расстояние, тень человека.

- 3) Человек, рост которого равен 1.2 м, стоит на расстоянии 14 м от уличного фонаря. При этом длина тени человека равна 7 м. Определите высоту фонаря (в метрах).



Задачи про столб, расстояние, тень человека.

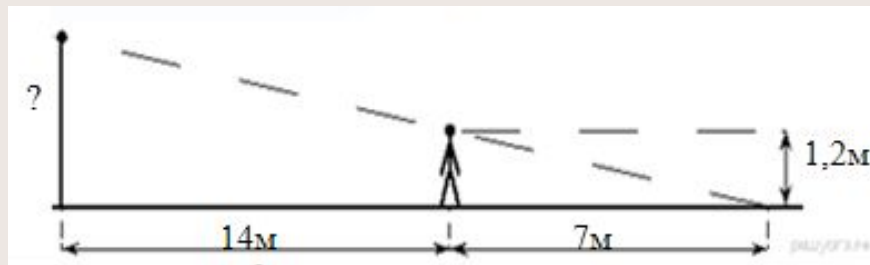
Решение: Обозначим человека как АВ (от головы до земли), фонарь как CD (от лампочки до земли), конец тени человека обозначим точкой O.

Тогда будем иметь два подобных прямоугольных треугольника: OBA и ODC (подобие по двум углам).

Так как треугольники подобны, то можно записать соотношение их

сторон: $\frac{x}{1.2} = \frac{14+7}{7}$ откуда $x = \frac{1.2 \cdot (14+7)}{7} = \frac{25.2}{7} = 3.6$

Ответ: 3.6 метра.



Задачи про столб, расстояние, тень человека.

Задачи для самостоятельного решения

1. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 6 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 7,2 м. Найдите длину тени человека в метрах.
2. Человек ростом 1,5 м стоит на расстоянии 12 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 3,5 м. Найдите длину тени человека в метрах.
3. Человек ростом 1,5 м стоит на расстоянии 13 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 5,4 м. Найдите длину тени человека в метрах.
4. Человек ростом 1,9 м стоит на расстоянии 6 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 7,6 м. Найдите длину тени человека в метрах.
5. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 9 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 6,8 м. Найдите длину тени человека в метрах.

Задачи про столб, расстояние, тень человека.

Задачи для самостоятельного решения

- 6. На каком расстоянии (в метрах) от фонаря стоит человек ростом 1,8 м, если длина его тени равна 9 м, высота фонаря 5 м?
- 7. На каком расстоянии (в метрах) от фонаря стоит человек ростом 1,8 м, если длина его тени равна 9 м, высота фонаря 4 м?

Задачи про столб, расстояние, тень человека. Задачи для самостоятельного решения

7. На каком расстоянии (в метрах) от фонаря стоит человек ростом 1,8 м, если длина его тени равна 9 м, высота фонаря 4 м?

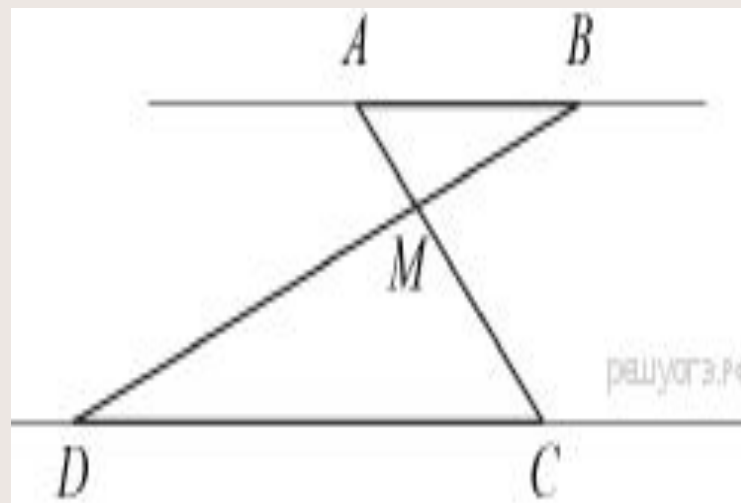
8. Человек, рост которого равен 1,6 м, стоит на расстоянии 17 м от уличного фонаря. При этом длина тени человека равна 8 м. Определите высоту фонаря (в метрах).

Раздел 3

**Типы и решение задач 2
Части ОГЭ.**

Задачи на вычисление

- Задача 1 Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 16$, $DC = 24$, $AC = 25$.



Задачи на вычисление

Решение.

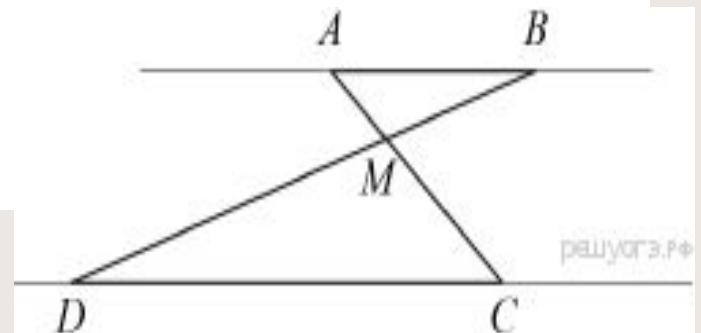
Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие, углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам.

Значит, $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$. Следовательно,

$$AC = AM + MC = \frac{2}{3}MC + MC = \frac{5}{3}MC.$$

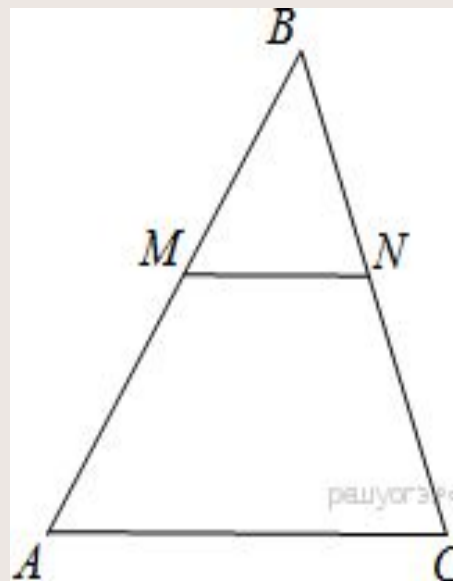
Откуда $MC = \frac{AC}{5} \cdot 3 = \frac{25}{5} \cdot 3 = 15$.

Ответ: 15.



Задачи на вычисление

- Задача 2 Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN = 13$, $AC = 65$, $NC = 28$.



Задачи на вычисление

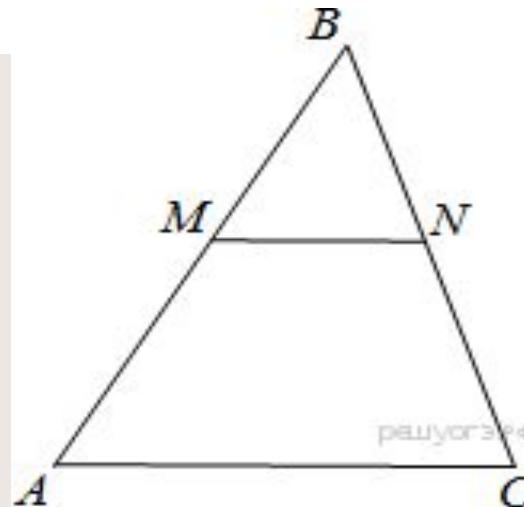
Решение.

Рассмотри треугольники ABC и BMN , углы BMN и BAC равны как соответственные при параллельных прямых, угол B — общий, следовательно, эти треугольники подобны, откуда

$\frac{BC}{BN} = \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{MN}$. Найдём BN :

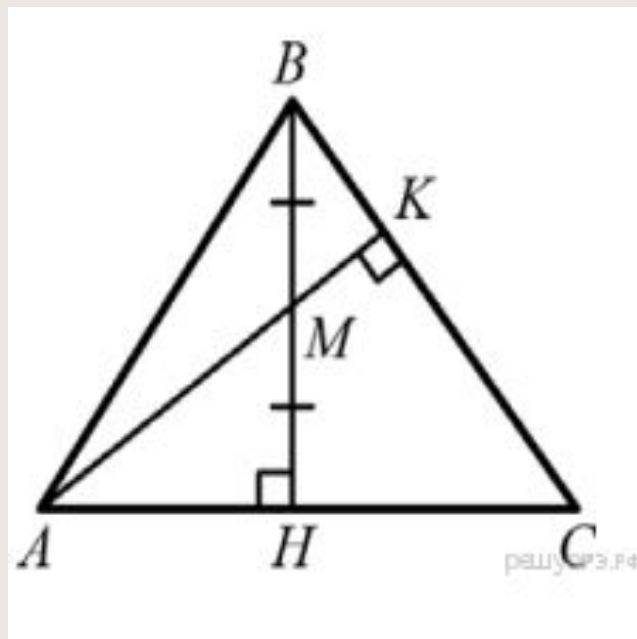
$$\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} \Leftrightarrow \frac{BN + NC}{BN} = \frac{65}{13} \Leftrightarrow 5BN = BN + 28 \Leftrightarrow BN = 7.$$

Ответ: 7.



Задачи на вычисление

- Задача 3 Высота треугольника разбивает его основание на два отрезка с длинами 8 и 9. Найдите длину этой высоты, если известно, что другая высота треугольника делит ее пополам.



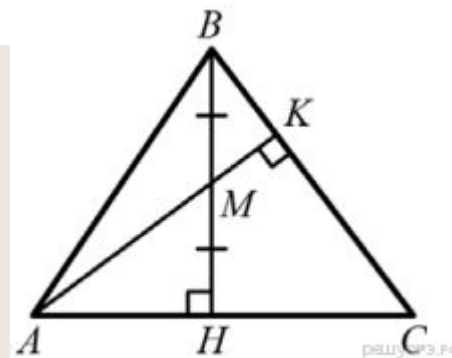
Задачи на вычисление

Решение.

Пусть высота BH треугольника ABC разбивает основание AC на отрезки $AH = 8$ и $CH = 9$, высота AK пересекает высоту BH в точке M , причем $BM = MH = x$. Треугольники AHM , BKM и BHC подобны, поскольку они прямоугольные и первые два имеют равные углы (углы AMH и BMK равны как вертикальные), а вторые два имеют общий угол. Получаем пропорцию

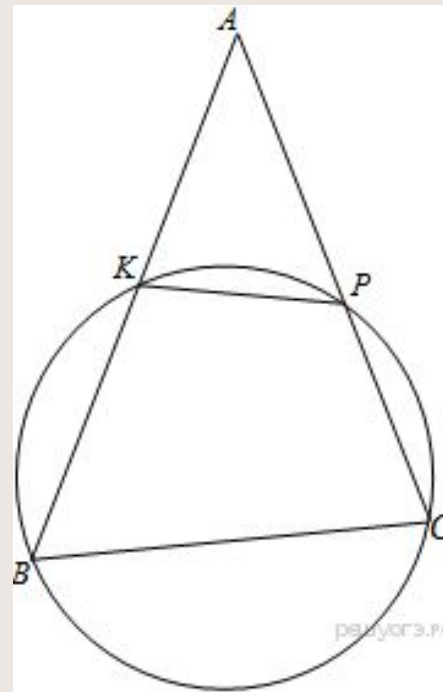
$$\frac{MH}{AH} = \frac{CH}{BH}, \text{ то есть } \frac{x}{8} = \frac{9}{2x}, \text{ откуда } x^2 = 36.$$

Следовательно, $BM = 6$ и $BH = 12$.



Задачи на вычисление

- Задача 4 Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AP = 18$, а сторона BC в 1,2 раза меньше стороны AB .



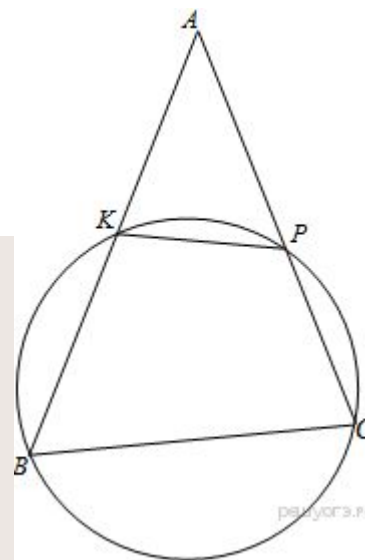
Задачи на вычисление

Решение.

Поскольку четырёхугольник $KPCB$ вписан в окружность, сумма противоположных углов равна 180° , следовательно, $\angle KBC + \angle KPC = 180^\circ$. Углы APK и KPC — смежные, следовательно, $\angle APK + \angle KPC = 180^\circ$. Из приведённых равенств, получаем, что $\angle KBC = \angle APK$. Рассмотрим треугольники ABC и AKP , угол A — общий, углы APK и KBC равны, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC} = \frac{AP}{AB}$. Используя равенство $\frac{KP}{BC} = \frac{AP}{AB}$, найдём KP :

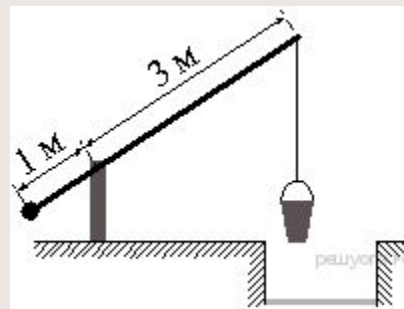
$$\frac{KP}{BC} = \frac{AP}{1,2BC} \Leftrightarrow KP = \frac{AP}{1,2} \Leftrightarrow KP = 15.$$

Ответ: 15.

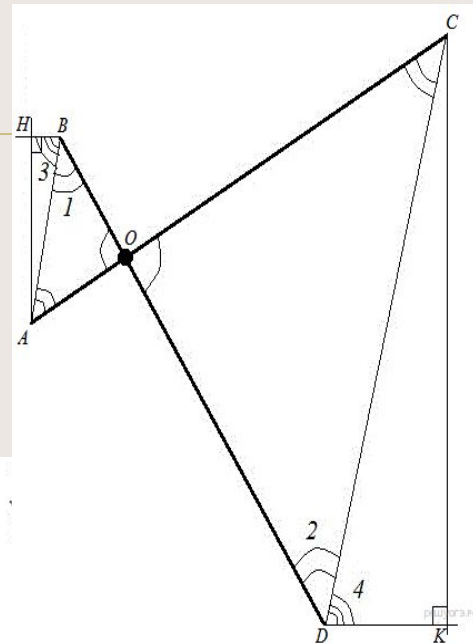


Задачи на вычисление

Задача 5 На рисунке изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 1 м, а длинное плечо — 3 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 0,5 м?



Задачи на вычисление



Решение.

Введём обозначения, приведённые на рисунке. Здесь AC — плечи "журавля" до опускания, BD — после, AH — высота, на которую поднялся конец короткого плеча, CK — высота, на которую опустился конец длинного. Рассмотрим треугольники AOB и COD , углы AOB и COD равны, как вертикальные, следовательно равны и углы при основаниях:

$$\angle ABO = \angle OAB = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = \frac{180^\circ - \angle COD}{2} = \angle OCD = \angle CDO.$$

Следовательно, треугольники AOB и COD подобны по двум углам, то есть $\frac{OC}{AO} = \frac{OD}{BO} = \frac{CD}{AB} = 3$.

Рассмотри прямые AB и CD , их пересекает секущая BD углы, обозначенные на рисунке 1 и 2 накрест лежащие и равны друг другу, следовательно прямые AB и CD параллельны. Стороны углов 3 и 4 параллельны друг другу, следовательно они равны.

Рассмотрим треугольники AHB и CDK , они прямоугольные, имеют равные углы, следовательно они подобны, значит:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CK}{AH} \Leftrightarrow CK = AH \frac{CD}{AB} \Leftrightarrow CK = 0,5 \cdot 3 = 1,5.$$

Задачи на вычисление

Задачи для самостоятельного решения

- 1) Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 18$, $DC = 54$, $AC = 48$
- 2) Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 12$, $DC = 48$, $AC = 35$.
- 3) Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 15$, $DC = 30$, $AC = 39$.

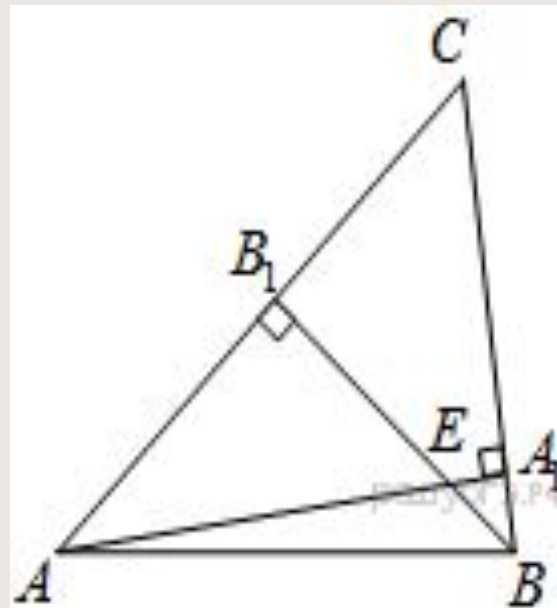
Задачи на вычисление

• Задачи для самостоятельного решения

- 4) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$.
- 5) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN , если $MN = 17$, $AC = 51$, $NC = 32$.
- 6) Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C . Найдите длину отрезка KP , если $AP = 16$, а сторона BC в 1,6 раза меньше стороны AB .

Задачи на доказательство

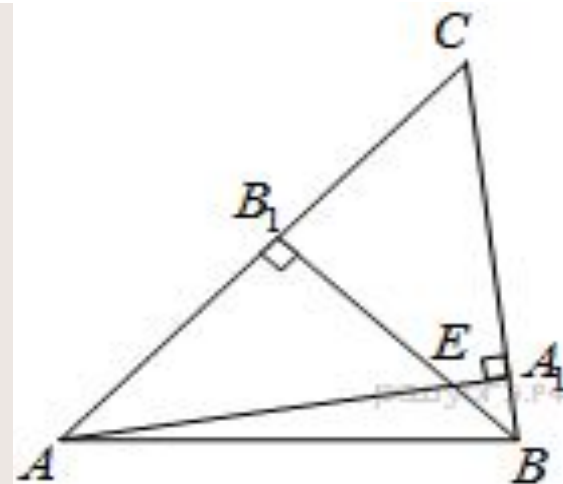
Задача 1 Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.



Задачи на доказательство

Решение.

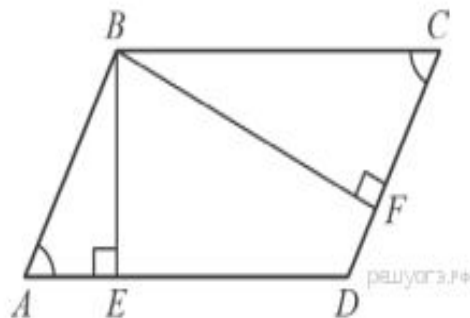
Рассмотрим треугольники AEB_1 и BEA_1 , они прямоугольные, углы AEB_1 и BEA_1 равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{EB_1}{EA_1} = \frac{AE}{EB}$. Рассмотрим треугольники EB_1A_1 и AEB , углы AEB и B_1EA_1 равны как вертикальные, $\frac{EB_1}{AE} = \frac{EA_1}{EB}$, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$.



Задачи на доказательство

Задача 2

В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BE и BF . Докажите, что $\triangle ABE$ подобен $\triangle CBF$.



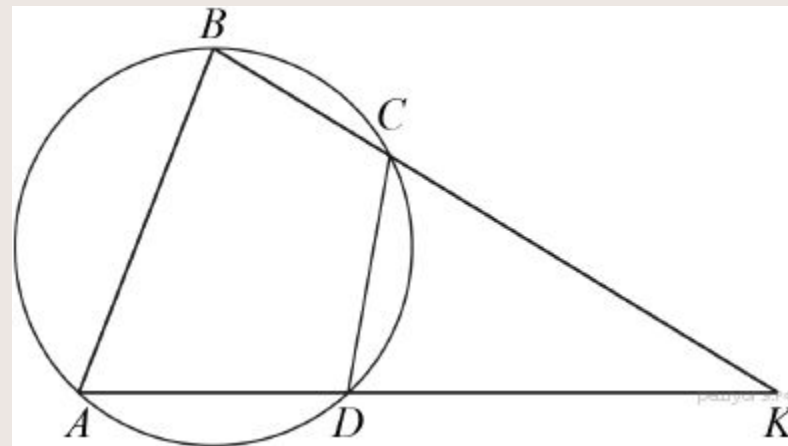
Задание 25 № 311663

Решение.

В треугольниках ABE и CBF имеем $\angle A = \angle C$ как противоположные углы параллелограмма, $\angle BEA = \angle CFB$ как прямые углы, значит треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников.

Задачи на доказательство

Задача 3 Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K . Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны



Задачи на доказательство

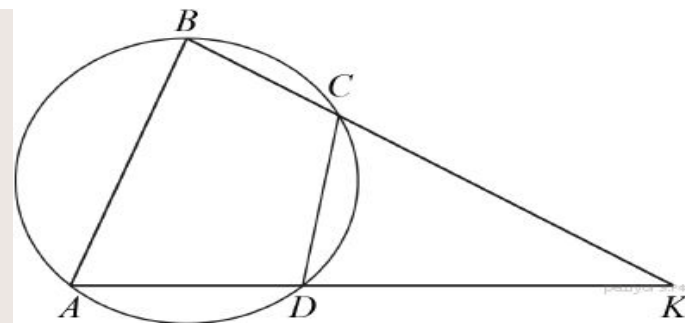
Решение.

Поскольку четырёхугольник $ABCD$ вписанный, сумма углов ABC и ADC равна 180° .

Следовательно,

$$\angle KDC = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC.$$

Получаем, что в треугольниках KAB и KCD углы ABK и CDK равны, угол K общий, следовательно, эти треугольники подобны.



Задачи на доказательство

- Задачи для самостоятельного решения

- 1) Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K . Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.
- 2) В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.
- 3) Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4 и 64, $BD = 16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.