



Методы нахождения расстояний между скрещивающимися прямыми.

Автор : Сигодина Лариса Владимировна,
учитель математики
МБОУ «БСОШ №1 им. П. П. Корягина»
Благовещенского района Алтайского края
2016

Методы нахождения расстояний между скрещивающимися прямыми.

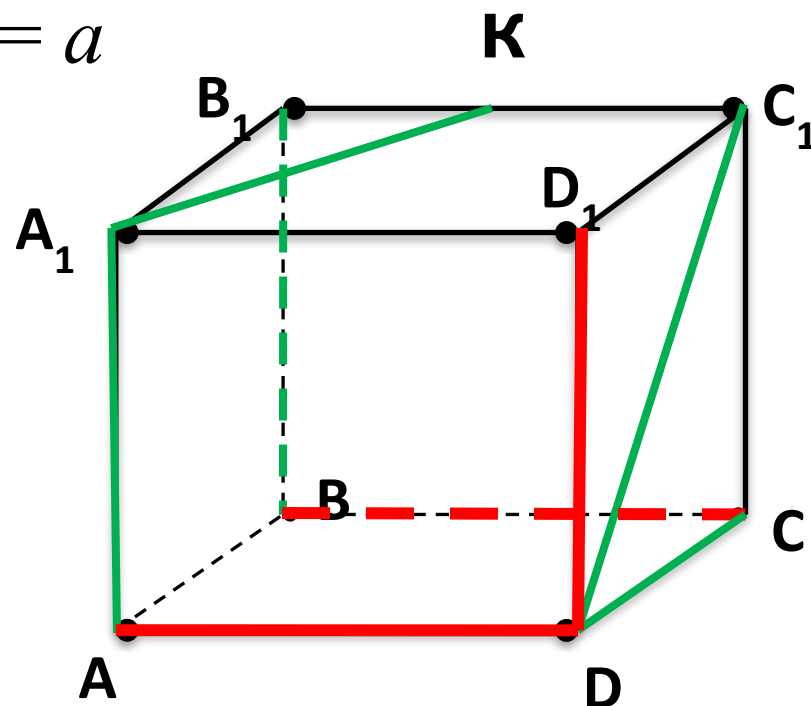
- Определение 1: Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между ближайшими точками этих прямых.
- Определение 2: Расстояние между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.
- Определение 3: ... называется расстояние между их проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из этих прямых.
- Определение 4: ... называется расстояние от одной из скрещивающихся прямых до параллельной плоскости, проходящей через другую прямую.
- Определение 5: ... называется расстояние между параллельными плоскостями, в которых находятся скрещивающиеся прямые.

Опр2: Расстояние между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

1. $\rho (BB_1; DC_1) = BC = a$

2. $\rho (AA_1; DC) = AD = a$

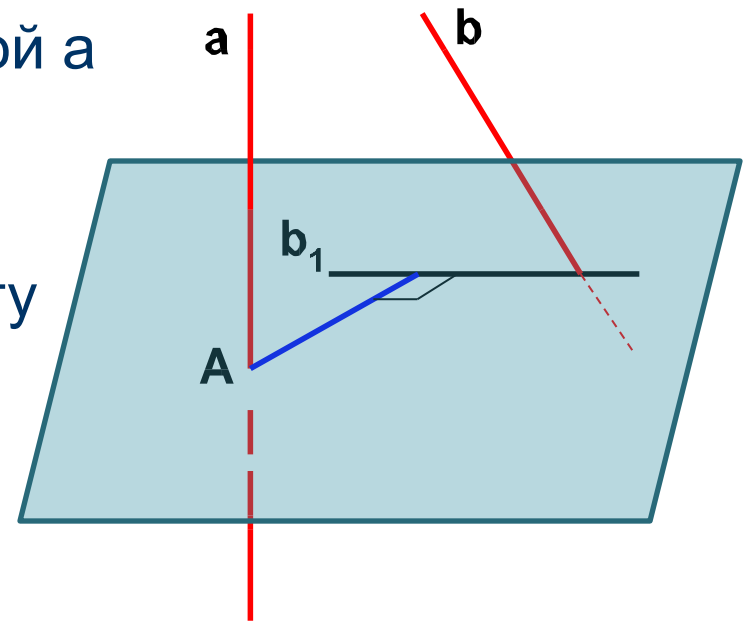
3. $\rho (DC; A_1K) = DD_1 = a$



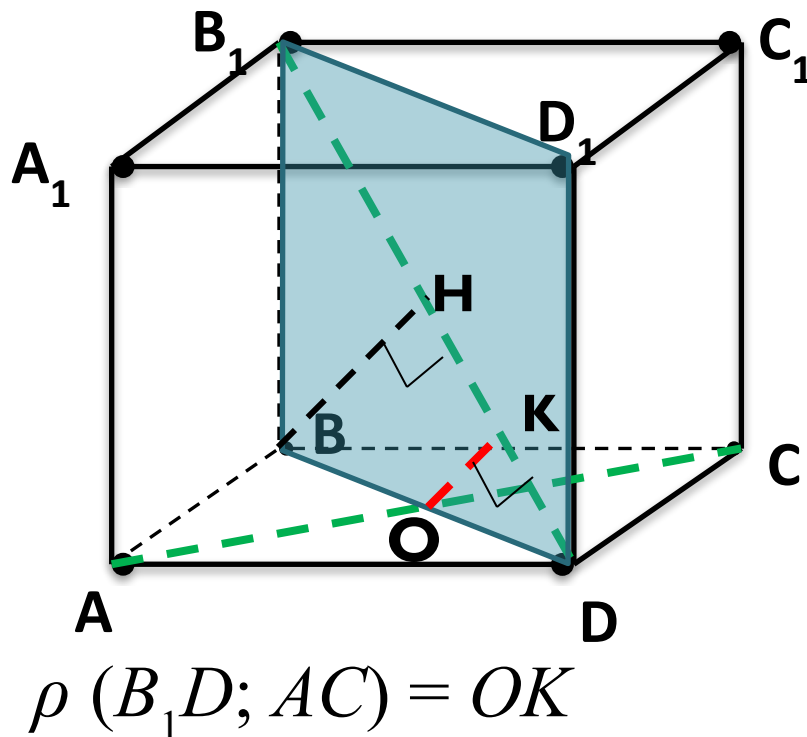
Опр 3: Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между их проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из этих прямых.

Метод ортогонального проектирования

1. Построим плоскость, перпендикулярную прямой a
2. Проекция прямой a на плоскость – точка A
3. Проекция прямой b на эту плоскость – прямая b_1
4. $\rho(a;b) = \rho(A;b_1)$



Опр 3: Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между их проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из этих прямых.



$$1) BDD_1 \perp AC$$

2) Проекция $AC - O$

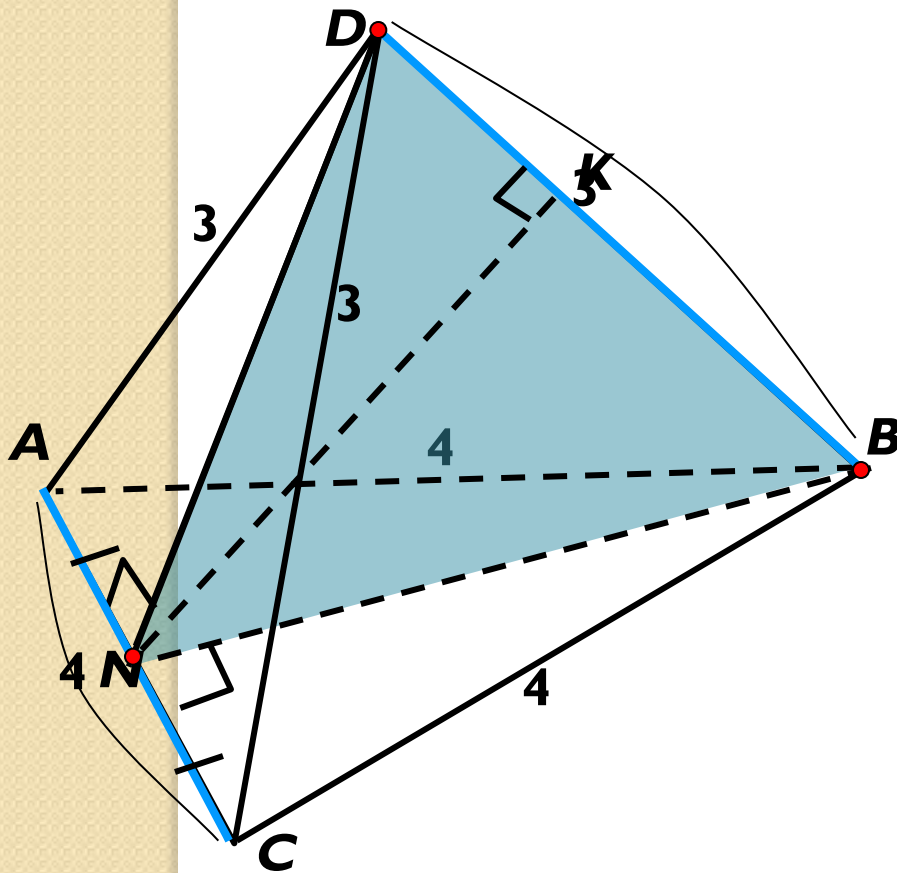
3) Проекция $B_1D - B_1D$

$$4) OK \perp B_1D$$

$$OK = \frac{1}{2} BH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 4, а боковое ребро 3. Найдите расстояние от стороны основания до противоположного бокового ребра.

Построим плоскость, перпендикулярную прямой AC .



Спроектируем на плоскость BDN обе прямые.

Проекция AC – точка N ,
а проекция BD – BD

NK – искомое расстояние.
Кстати в этой задаче получился
именно общий перпендикуляр.

ИЗ $\triangle BCN$:

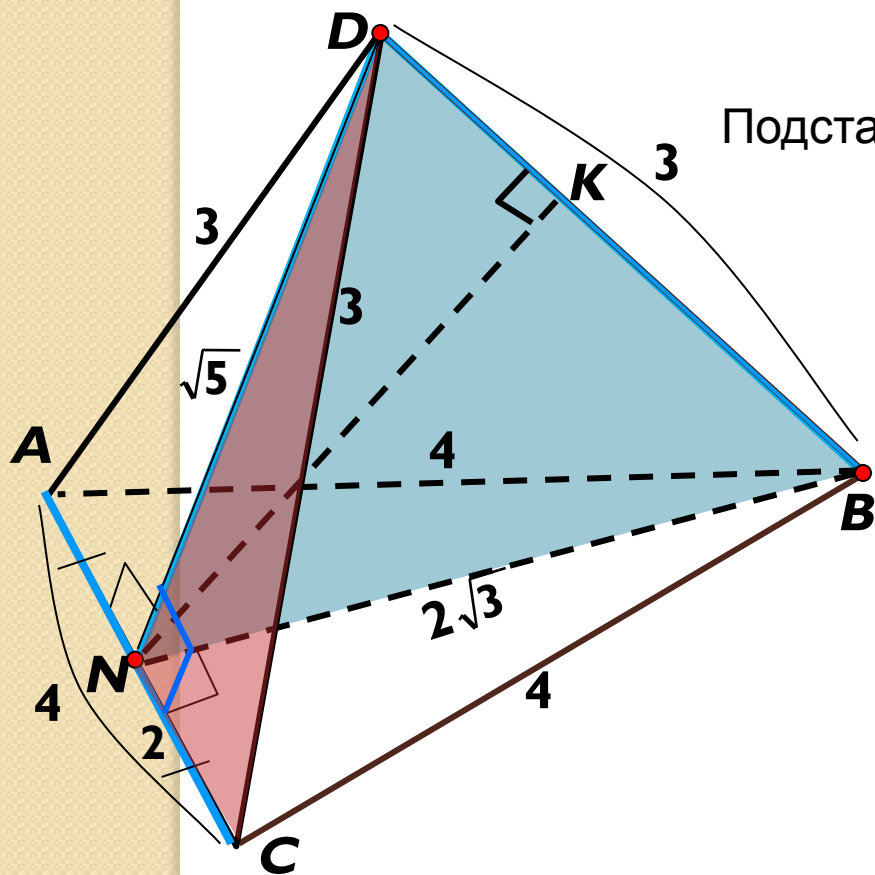
$$BC^2 = CN^2 + BN^2;$$

$$BN = 2\sqrt{3}.$$

ИЗ $\triangle DCN$:

$$CD^2 = CN^2 + DN^2;$$

$$DN = \sqrt{5}.$$



Найдем высоту $\triangle DBN$.

Составим систему уравнений.

$$\begin{cases} (2\sqrt{3})^2 = h^2 + (3-x)^2 & 7 = 9 - 6x; \\ (\sqrt{5})^2 = h^2 + x^2 & 6x = 9 - 7; \\ 12 = h^2 + 9 - 6x + x^2 & x = \frac{1}{3}. \\ 5 = h^2 + x^2 \end{cases}$$

Подставим во второе уравнение

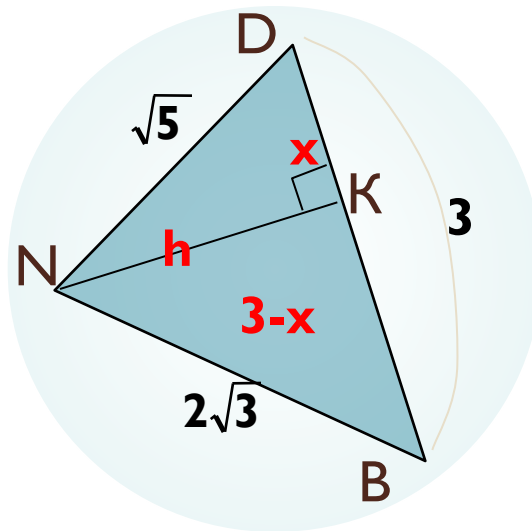
$$5 = h^2 + \frac{1}{9};$$

$$h^2 = 5 - \frac{1}{9};$$

$$h^2 = 4\frac{8}{9};$$

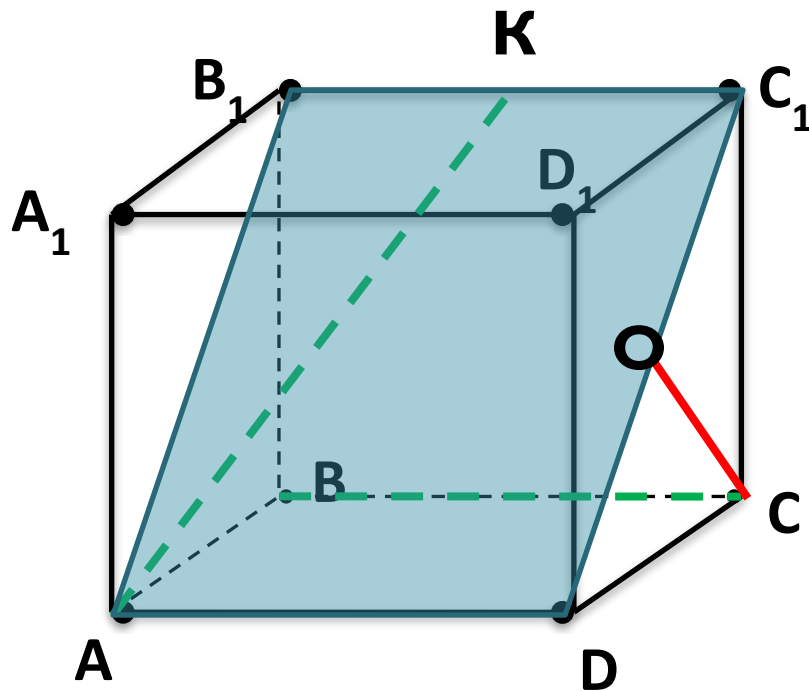
$$h = \pm \sqrt{\frac{44}{9}};$$

$$h = \frac{2\sqrt{11}}{3}.$$



Опр 4: Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от одной из скрещивающихся прямых до параллельной плоскости, проходящей через другую прямую.

$$\rho (AK; BC) = CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



1) Проведем плоскость ADB_1 , в которой лежит прямая AK

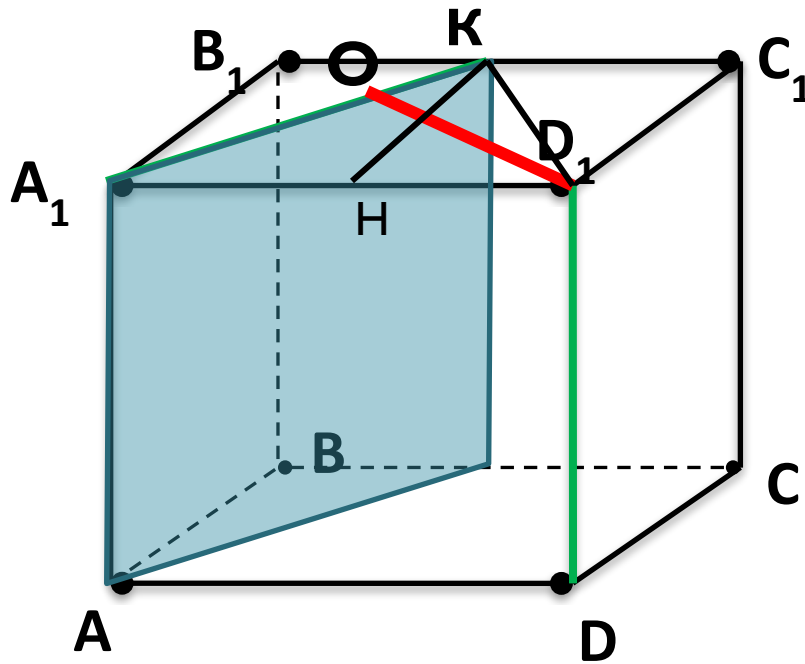
2) $BC \parallel AD$,
 $BC \parallel ADB_1$

$$OC \perp DC_1$$

$$OC \perp AD, AD \perp DCC_1$$

$$OC \perp ADB_1$$

Опр 4: Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от одной из скрещивающихся прямых до параллельной плоскости, проходящей через другую прямую.



$$KD_1C_1$$

$$KD_1 = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} = A_1K$$

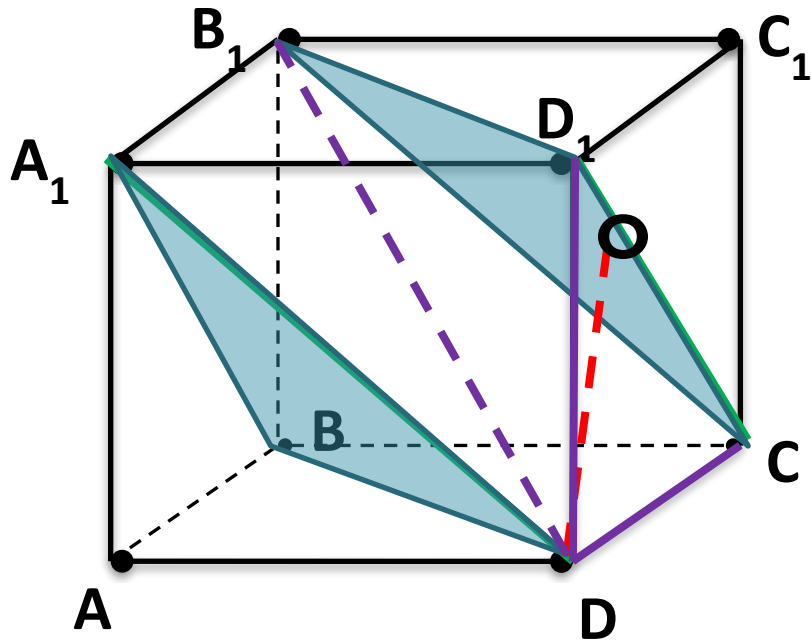
$$KH = a$$

$$S_{A_1KD_1} = \frac{1}{2} A_1K \cdot D_1O =$$

$$\frac{1}{2} A_1D_1 \cdot KH$$

$$\rho(DD_1; AK) = D_1O \quad D_1O = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Опр 5: Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между параллельными плоскостями, в которых находятся скрещивающиеся прямые.



$$A_1D \subset ADA_1$$

$$B_1C \subset B_1CD_1$$

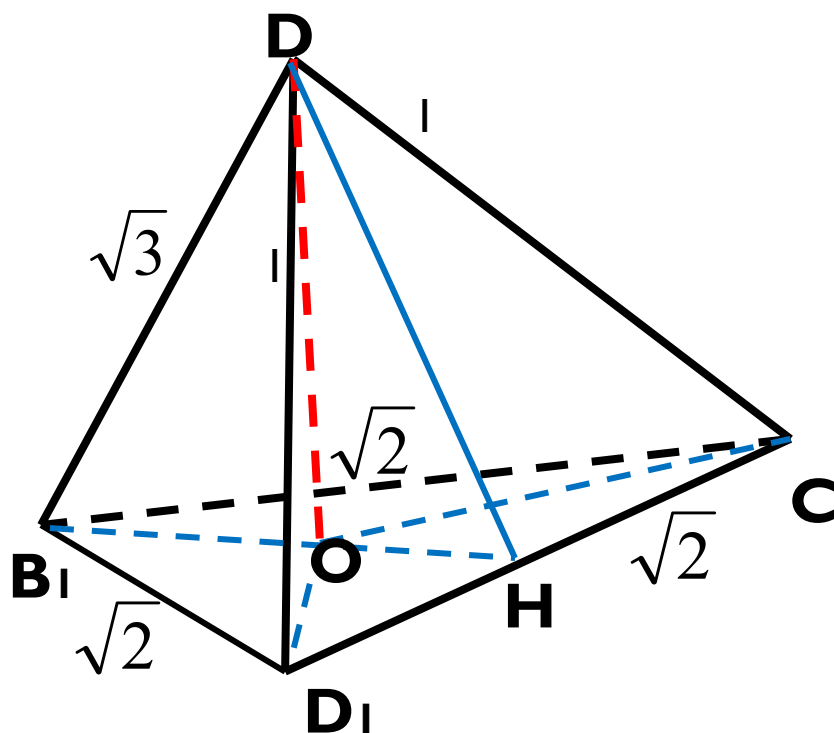
$$ADA_1 \parallel B_1CD_1$$

$$DO \perp B_1CD_1$$

$DD_1 = DC = 1$ – наклонные

$O_1D = OC$ – проекции

$O \in BH$ – серединный
перпендикуляр



$\triangle B_1CD_1$ – правильный

$$BH = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\triangle CDD_1$ – равнобед.

$$DH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\triangle BDH$

$$\cos H = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin H = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\triangle DOH$

$$DO = DH \cdot \sin H$$

$$DO = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Метод координат

1. Ввести «удобным» способом систему координат.
2. Найти координаты «нужных» точек.
3. Записать уравнение плоскости.
4. Вычислить расстояние по формуле.

Расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

Вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Найдем расстояние от точки D до плоскости B_1CD_1

$$D(0,0,0);$$

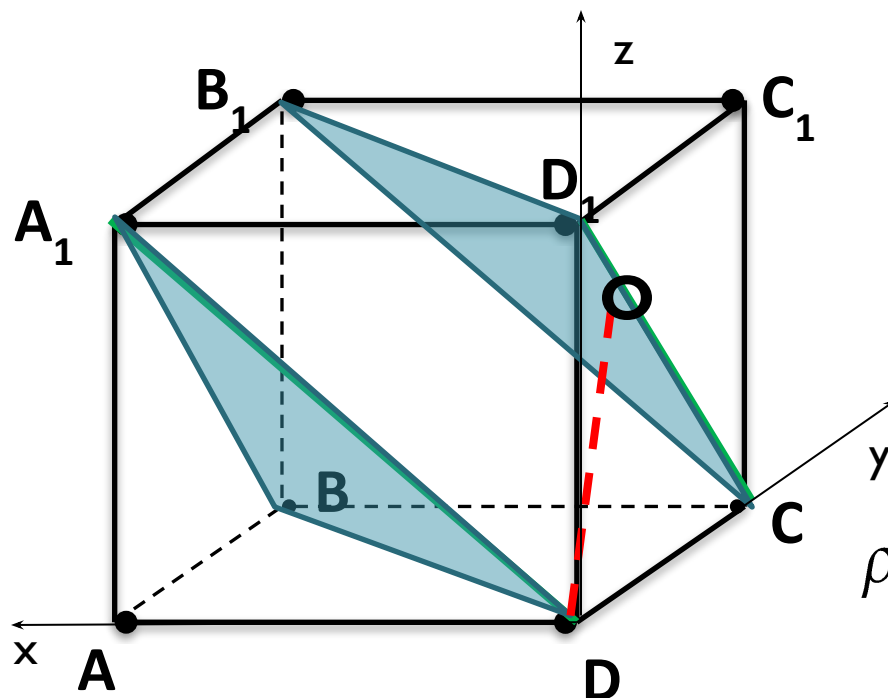
$$C(0,1,0);$$

$$D_1(0,0,1);$$

$$B_1(1,1,1)$$

$$\begin{cases} 0+1b+0+d=0; \\ 0+0+1c+d=0; \\ 1a+1b+1c+d=0 \end{cases}$$

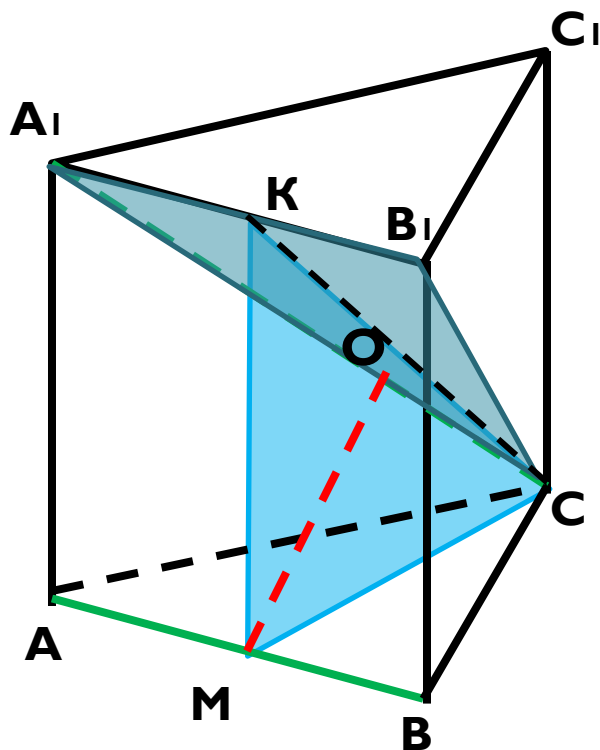
$$\begin{cases} d=1 \\ b=-1; \\ c=-1; \\ a=1; \end{cases}$$



Уравнение плоскости
 B_1CD_1

$$x-y-z+1=0$$

$$\rho = \frac{|0-0-0+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Правильная призма, все ребра
равны 1. $\rho(AB; A_1C) = ?$

$$A_1C \subset A_1B_1C$$

$$MC \perp AB$$

$$AB \parallel A_1B_1$$

$$KM \perp AB$$

$$AB \parallel A_1B_1C$$

$$AB \perp KMC$$

$$A_1B_1 \perp KMC$$

$$KMC \cap A_1B_1C = KC$$

$$A_1B_1 \subset A_1B_1C$$

$$MO \perp KC$$

$$KMC \perp A_1B_1C$$

$$MO - \text{искомое}$$

$$\text{расстояние}$$

$\triangle MKC$ – прямоуго.

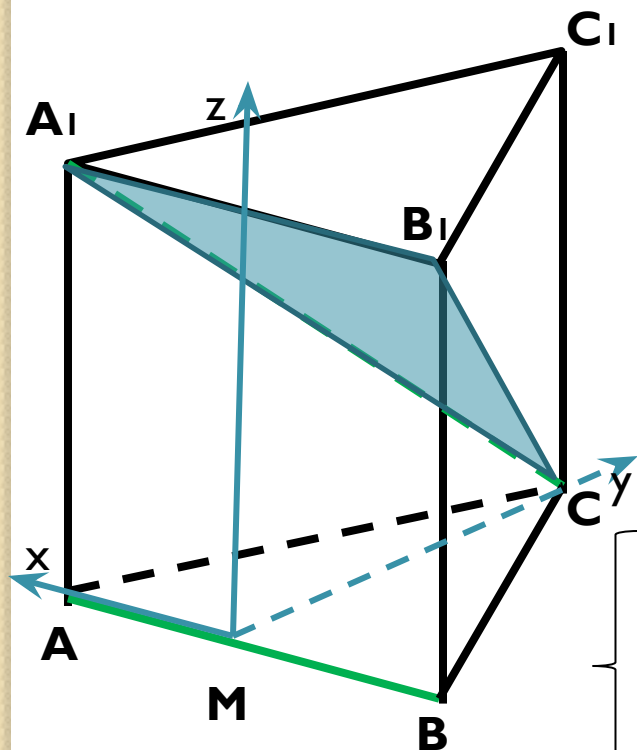
$$MC = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$KM = 1$$

$$KC = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$S_{\triangle KMC} = \frac{1}{2} MK \cdot MC = \frac{1}{2} MO \cdot KC$$

$$MO = \frac{\sqrt{21}}{7}$$



Правильная призма, все ребра
равны 1. $\rho(AB; A_1C) - ?$ $M(0,0,0)$

$$A_1C \subset A_1B_1C \quad C(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$$

$$AB \parallel A_1B_1 \quad A_1(\frac{1}{2}, 0, 1)$$

$$AB \parallel A_1B_1C \quad B_1(-\frac{1}{2}, 0, 1)$$

$$\begin{cases} 0,5a + c + d = 0 \\ -0,5a + c + d = 0 \\ \sqrt{3}/2 b + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 1 \\ b = -\frac{2\sqrt{3}}{2} \\ c = -1 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{2}y - z + 1 = 0$$

уравнение A_1B_1C

$$\rho = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{\frac{4}{3} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Дана правильная пирамида $AB=5$, $SO=5$.

$$\rho(AB; SC) - ?$$

$$O(0,0,0)$$

$$SC \subset SCD$$

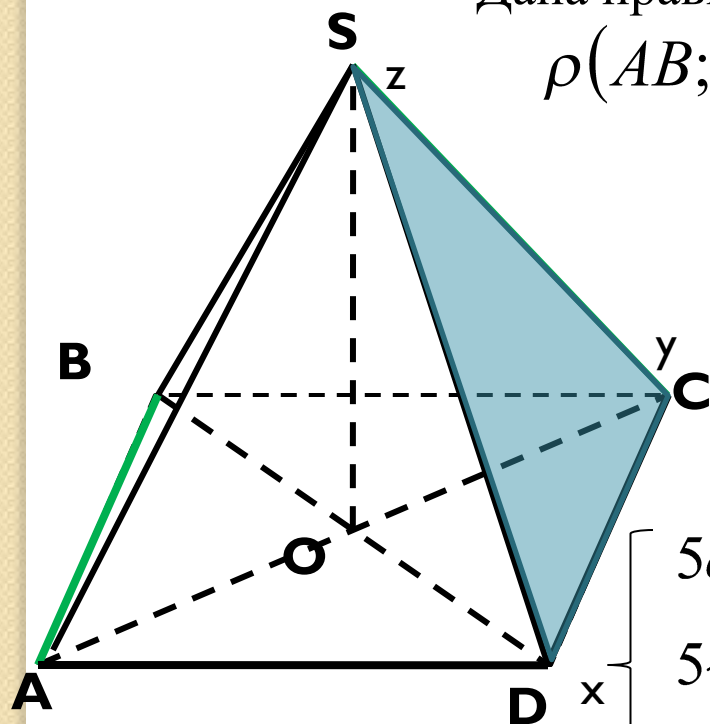
$$C(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}, 0)$$

$$AB \parallel CD$$

$$S(0,0,5)$$

$$AB \parallel SCD$$

$$D(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$$



$$\begin{cases} 5c + d = 0 \\ 5\sqrt{2}/2a + d = 0 \\ 5\sqrt{2}/2b + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 1 \\ b = -\sqrt{2}/5 \\ c = -1/5 \\ a = -\sqrt{2}/5 \end{cases}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{5}x - \frac{\sqrt{2}}{5}y - \frac{1}{5}z + 1 = 0 \quad A(0, -\frac{5}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + z - 5 = 0$$

уравнение SCD

$$\rho = \frac{\left| 0 - \frac{\sqrt{2} \cdot 5}{\sqrt{2}} + 0 - 5 \right|}{\sqrt{2 + 2 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

Метод координат

1. Расстояние от точки до плоскости.
2. Расстояние между плоскостью и параллельной ей прямой.
3. Расстояние между параллельными плоскостями.
4. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

Вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Интернет ресурсы:

<http://nsportal.ru/shkola/geometriya/library/2012/11/26/master-klass-nakhozhdenie-rasstoyaniya-mezhdu>

<http://www.myshared.ru/slide/478172/>