



Семинар 1:

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Постановка задачи

- Имеется m поставщиков A_1, A_2, \dots, A_m и n потребителей B_1, B_2, \dots, B_n некоторого груза.
- Для каждого поставщика и потребителя заданы запасы $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ и объем потребления $b_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$.
- Известна стоимость перевозки единицы груза $c_{ij} \geq 0$ от i -го поставщика к j -му потребителю.
- Требуется найти объемы всех перевозок x_{ij} от i -го поставщика к j -му потребителю, при которых общая стоимость минимальна.

Математическая постановка задачи

- Пусть $X = (x_{ij})$ – $m \times n$ матрица, где x_{ij} – объем перевозок от i -го поставщика к j -му потребителю.
- Общие затраты на перевозку груза определяются функцией:

$$z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

● Математическая постановка

транспортной задачи определяется **задачей линейного программирования**:

$$z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при условиях

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

- Решение $X = (x_{ij})$ транспортной задачи, удовлетворяющее условиям и имеющее не более $m+n-1$ занятой клетки, будем называть **опорным планом** транспортной задачи.
- **Закрытая модель**: суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

- **Открытая модель**:

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$$

Задача 1

Решите транспортную задачу методом потенциалов. В ответе укажите минимальную стоимость всех перевозок.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	11	3	13	140
A_2	12	4	8	2	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	

Задача 1

Решите транспортную задачу методом потенциалов. В ответе укажите минимальную стоимость всех перевозок.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	11	3	13	140
A_2	12	4	8	2	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	

400

400

Задача 1

Решите транспортную задачу методом потенциалов. В ответе укажите минимальную стоимость всех перевозок.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	11	3	13	140
A_2	12	4	8	2	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	400

400

400

1. Метод «северо-западного угла»

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11 40	3 20	13	140
A_2	12	4	8 130	2 30	160
A_3	3	5	14	6 100	100
b_j	80	40	150	130	400

1. Метод «северо-западного угла»

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11 40	3 20	13	140
A_2	12	4	8 130	2 30	160
A_3	3	5	14	6 100	100
b_j	80	40	150	130	400

Начальный опорный план: $X = \begin{pmatrix} 80 & 40 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 130 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$

$$z(X) = 1 \cdot 80 + 11 \cdot 40 + 3 \cdot 20 + 8 \cdot 130 + 2 \cdot 30 + 6 \cdot 100 = 2280$$

2. Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11	3	13	140
A_2	12	4	8	2	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	400

2. Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11	3	13	140
A_2	12	4	8	2 130	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	400

2. Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11	3 60	13	140
A_2	12	4	8	2 130	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	400

2. Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11	3 60	13	140
A_2	12	4	8	2 130	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	400

2. Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11	3 60	13	140
A_2	12	4 30	8	2 130	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	400

2. Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11	3 60	13	140
A_2	12	4 30	8	2 130	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	400

2. Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11	3 60	13	140
A_2	12	4 30	8	2 130	160
A_3	3	5 10	14	6	100
b_j	80	40	150	130	400

2. Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11	3 60	13	140
A_2	12	4 30	8	2 130	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	400

2. Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11	3 60	13	140
A_2	12	4 30	8	2 130	160
A_3	3	5	14 90	6	100
b_j	80	40	150	130	400

2. Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11	3 60	13	140
A_2	12	4 30	8	2 130	160
A_3	3	5	14 90	6	100
b_j	80	40	150	130	400

Начальный опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 130 \\ 0 & 10 & 90 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z(X) = 1 \cdot 80 + 4 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 14 \cdot 90 + 3 \cdot 60 + 2 \cdot 130 = 1950 < 2280$$

Решение транспортной задачи методом потенциалов

Теорема

Если опорный план $X = (x_{ij})$ транспортной задачи является **ОПТИМАЛЬНЫМ**, то существуют потенциалы поставщиков u_i , $i = 1, \dots, m$ и потребителей v_j , $j = 1, \dots, n$, удовлетворяющие условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0 \text{ (для занятых клеток),}$$
$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0 \text{ при } x_{ij} = 0 \text{ (для свободных клеток).}$$

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 80	11	3 60	13	140	
A_2	12	4 30	8	2 130	160	
A_3	3	5 10	14 90	6	100	
b_j	80	40	150	130	400	
v_j						

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 80	11	3 60	13	140	0
A_2	12	4 30	8	2 130	160	
A_3	3	5 10	14 90	6	100	
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	1		3			

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 80	11	3 60	13	140	0
A_2	12	4 30	8	2 130	160	
A_3	3	5 10	14 90	6	100	11
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	1	-6	3			

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	80	11	60	13	140	0
A_2	12	4	8	2	160	10
A_3	3	5	14	6	100	11
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	1	-6	3	-8		

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 80	11 -17	3 60	13 -21	140	0
A_2	12 -1	4 30	8 5	2 130	160	10
A_3	3 9	5 10	14 90	6 -3	100	11
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	1	-6	3	-8		

Метод потенциалов

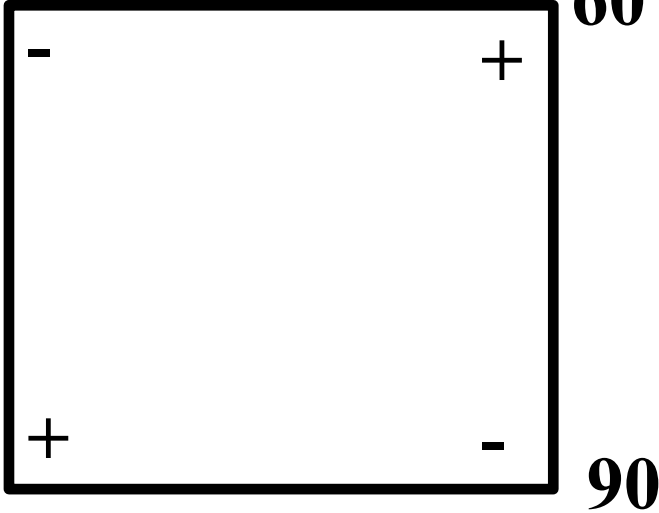
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 80	11 -17	3 60	13 -21	140	0
A_2	12 -1	4 30	8 5	2 130	160	10
A_3	3 9	5 10	14 90	6 -3	100	11
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	1	-6	3	-8		

Метод потенциалов

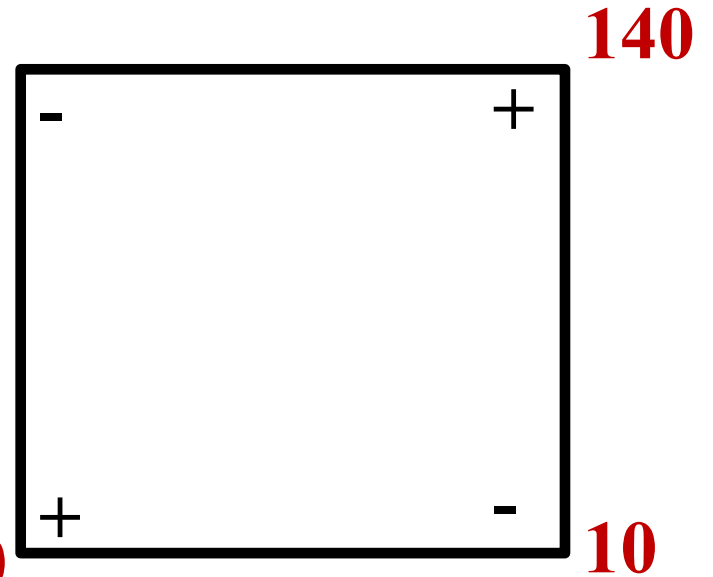
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 80	11 -17	3 60	13 -21	140	0
A_2	12 -1	4 30	8 5	2 130	160	10
A_3	3 9	5 10	14 90	6 -3	100	11
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	1	-6	3	-8		

ЦИКЛ

80



80



$$\Delta = \min (80, 90) = 80$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1	11	3	13	140	
A_2	12	4	8	2	130	
A_3	3	5	14	6	100	
b_j	80	40	150	130	400	
v_j						

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1	11	3	13	140	
A_2	12	4	8	2	160	
A_3	3	5	14	6	100	0
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	3	5	14			

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1	11	3	13	140	-11
A_2	12	4	8	2	160	-1
A_3	3	5	14	6	100	0
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	3	5	14	3		

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 -9	11 -17	3 140	13 -21	140	-11
A_2	12 -10	4 30	8 5	2 130	160	-1
A_3	3 80	5 10	14 10	6 -3	100	0
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	3	5	14	3		

$$z(X) = 3 \cdot 80 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 14 \cdot 10 + 3 \cdot 140 + 2 \cdot 130 = 1230 < 1950$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 -9	11 -17	3 140	13 -21	140	-11
A_2	12 -10	4 30	8 5	2 130	160	-1
A_3	3 80	5 10	14 10	6 -3	100	0
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	3	5	14	3		

$$z(X) = 3 \cdot 80 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 14 \cdot 10 + 3 \cdot 140 + 2 \cdot 130 = 1230 < 1950$$

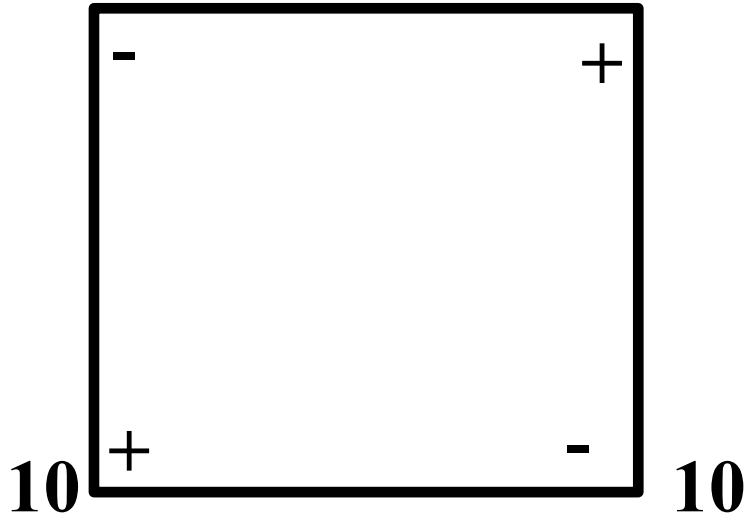
Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 -9	11 -17	3 140	13 -21	140	-11
A_2	12 -10	4 30	8 5	2 130	160	-1
A_3	3 80	5 10	14 10	6 -3	100	0
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	3	5	14	3		

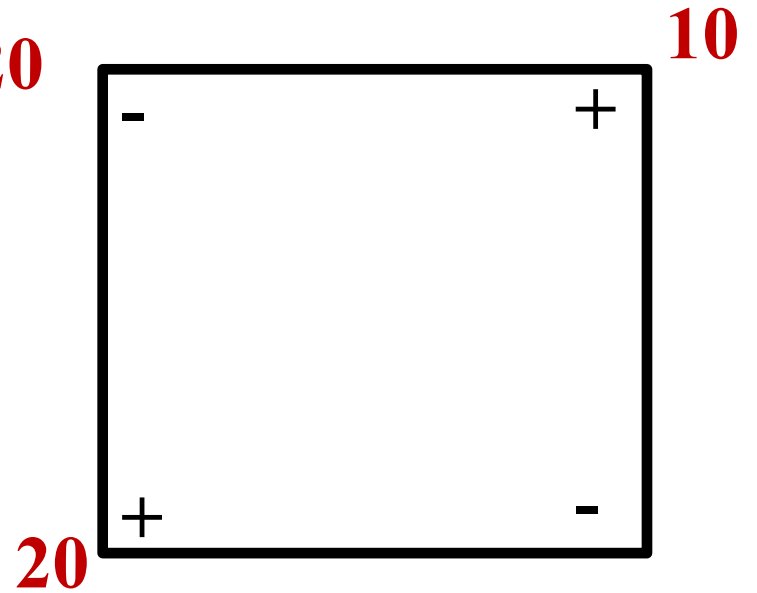
$$z(X) = 3 \cdot 80 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 14 \cdot 10 + 3 \cdot 140 + 2 \cdot 130 = 1230 < 1950$$

ЦИКЛ

30



20



$$\Delta = \min (10, 30) = 10$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1	11	3	13	140	
A_2	12	4	8	2	160	
A_3	3	5	14	6	100	
b_j	80	40	150	130	400	
v_j						

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 -4	11 -12	3 140	13 -16	140	-5
A_2	12 -10	4 20	8 10	2 130	160	0
A_3	3 80	5 20	14 -5	6 -3	100	1
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	2	4	8	2		

$$z(X) = 3 \cdot 80 + 5 \cdot 20 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 140 + 2 \cdot 130 = 1180 < 1230$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1	11	3	13	140	-5
A_2	12	11	3	13	160	0
A_3	3	11	3	13	100	1
b_j	80	40	150	130	400	
v_j	2	4	8	2		

**План
оптимален!**

$$z(X) = 3 \cdot 80 + 5 \cdot 20 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 140 + 2 \cdot 130 = 1180 < 1230$$

Открытая модель транспортной задачи

- **Модель** транспортной задачи называется **открытой**, если $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$ (суммарные запасы не равны суммарным потребностям).

Открытая модель транспортной задачи

Открытую модель можно свести к закрытой:

1. Если $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то вводят **фиктивного потребителя** B_{n+1} с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ и нулевыми тарифами перевозок в **столбце**.

2. Если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то вводят **фиктивного поставщика** A_{m+1} с запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ и нулевыми тарифами перевозок в **строке**.

Задача 2

Решите транспортную задачу методом потенциалов. В ответе укажите минимальную стоимость всех перевозок.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	7	4	7	100
A_2	10	13	24	7	100
A_3	8	19	12	18	200
b_j	90	80	30	170	

Задача 2

Решите транспортную задачу методом потенциалов. В ответе укажите минимальную стоимость всех перевозок.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	7	4	7	100
A_2	10	13	24	7	100
A_3	8	19	12	18	200
b_j	90	80	30	170	

400

370

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

Метод «северо-западного угла»

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	3	7	4	7	0	100
A_2	10	13	24	7	0	100
A_3	8	19	12	18	0	200
b_j	90	80	30	170	30	400

Метод «северо-западного угла»

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	3 90	7 10	4	7	0	100
A_2	10	13 70	24 30	7	0	100
A_3	8	19	12 0	18 170	0 30	200
b_j	90	80	30	170	30	400

$$z(X) = 3 \cdot 90 + 7 \cdot 10 + 13 \cdot 70 + 24 \cdot 30 + 18 \cdot 170 = 5030$$

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 90	7 10	4	7	0	100	
A_2		13 70	24 30	7	0	100	
A_3	8	19	12 0	18 170	0 30	200	
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j							

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 90	7 10	4 14	7 17	0 6	100	0
A_2	10 -1	13 70	24 30	7 23	0 12	100	6
A_3	8 -11	19 -18	12	18 170	0 30	200	-6
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j	3	7	18	24	6		

Метод потенциалов

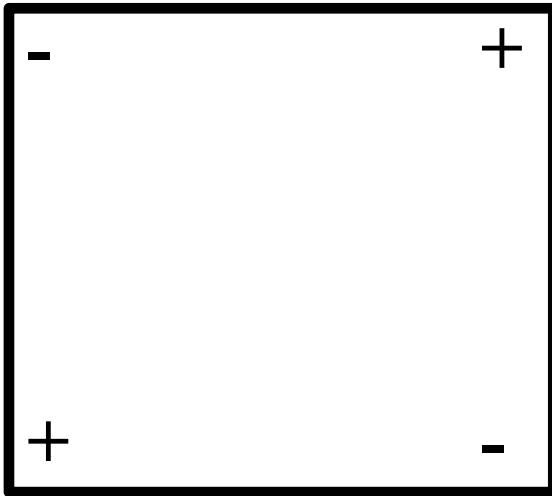
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 90	7 10	4 14	7 17	0 6	100	0
A_2	10 -1	13 70	24 30	7 23	0 12	100	6
A_3	8 -11	19 -18	12	18 170	0 30	200	-6
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j	3	7	18	24	6		

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 90	7 10	4 14	7 17	0 6	100	0
A_2	10 -1	13 70	24 30	7 23	0 12	100	6
A_3	8 -11	19 -18	12 170	18	0 30	200	-6
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j	3	7	18	24	6		

ЦИКЛ

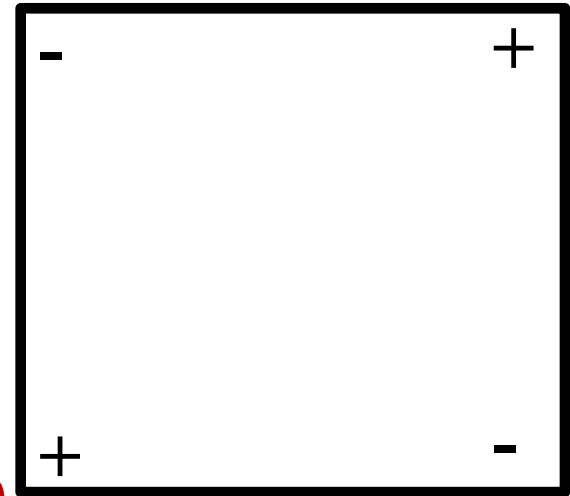
30



170

30

30



140

0

$$\Delta = \min (30, 170) = 30$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 90	7 10	4	7	0	100	
A_2	10	13 70	24	7 30	0	100	
A_3	8	19	12 30	18 140	0 30	200	
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j							

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 90	7 10	4 -9	7 -6	0 -17	100	-17
A_2	10 -1	13 70	24 -23	7 30	0 -11	100	-11
A_3	8 12	19 5	12 30	18 140	0 30	200	0
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j	20	24	12	18	0		

$$z(X) = 3 \cdot 90 + 7 \cdot 10 + 13 \cdot 70 + 7 \cdot 30 + 18 \cdot 140 + 12 \cdot 30 = 4130 < 5030$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 90	7 10	4 -9	7 -6	0 -17	100	-17
A_2	10 -1	13 70	24 -23	7 30	0 -11	100	-11
A_3	8 12	19 5	12 30	18 140	0 30	200	0
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j	20	24	12	18	0		

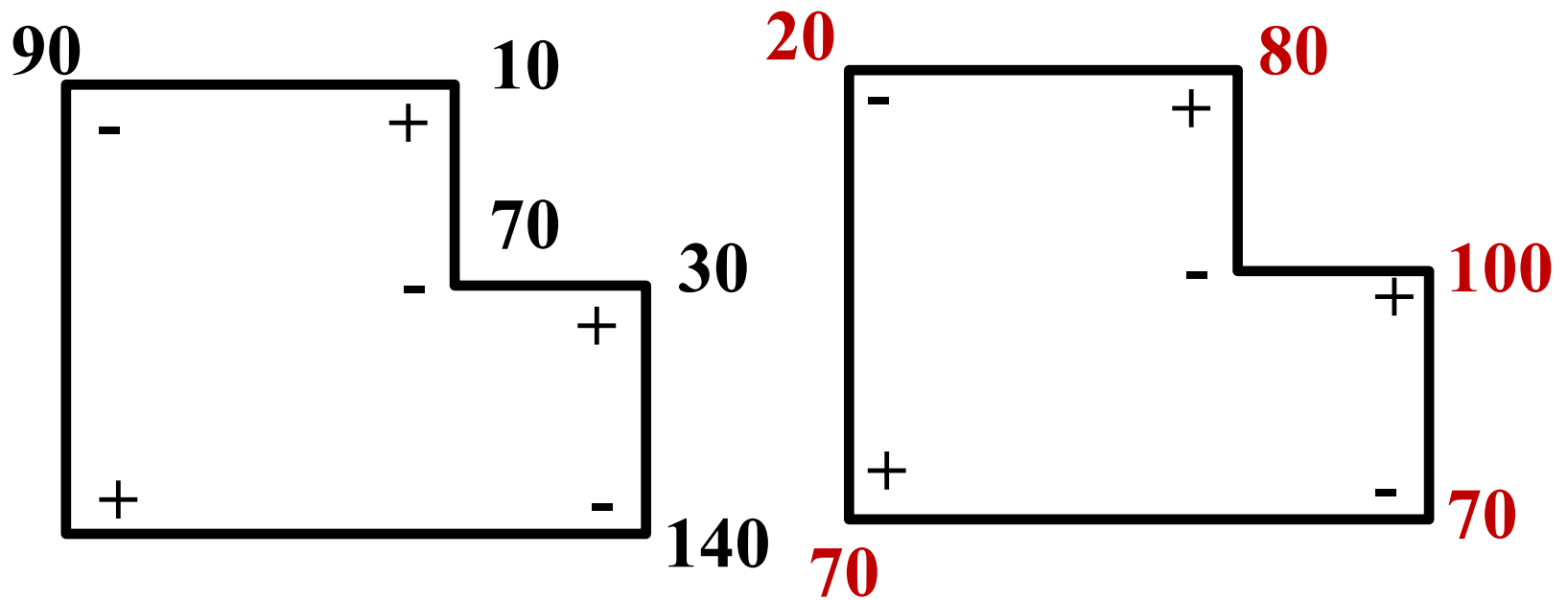
$$z(X) = 3 \cdot 90 + 7 \cdot 10 + 13 \cdot 70 + 7 \cdot 30 + 18 \cdot 140 + 12 \cdot 30 = 4130 < 5030$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 90	7 10	4 -9	7 -6	0 -17	100	-17
A_2	10 -1	13 70	24 -23	7 30	0 -11	100	-11
A_3	8 12	19 5	12 30	18 140	0 30	200	0
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j	20	24	12	18	0		

$$z(X) = 3 \cdot 90 + 7 \cdot 10 + 13 \cdot 70 + 7 \cdot 30 + 18 \cdot 140 + 12 \cdot 30 = 4130 < 5030$$

Цикл



$$\Delta = \min (90, 70, 140) = 70$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 20	7 80	4	7	0	100	
A_2	10	13	24	7 100	0	100	
A_3	8 70	19	12 30	18 70	0 30	200	
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j							

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 20	7 80	4 3	7 6	0 -5	100	-5
A_2	10 -13	13 -12	24 -23	7 100	0 -11	100	-11
A_3	8 70	19 -7	12 30	18 70	0 30	200	0
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j	8	12	12	18	0		

$$z(X) = 3 \cdot 20 + 7 \cdot 80 + 8 \cdot 70 + 12 \cdot 30 + 18 \cdot 70 + 7 \cdot 100 = 3500 < 4130$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 20	7 80	4 3	7 6	0 -5	100	-5
A_2	10 -13	13 -12	24 -23	7 100	0 -11	100	-11
A_3	8 70	19 -7	12 30	18 70	0 30	200	0
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j	8	12	12	18	0		

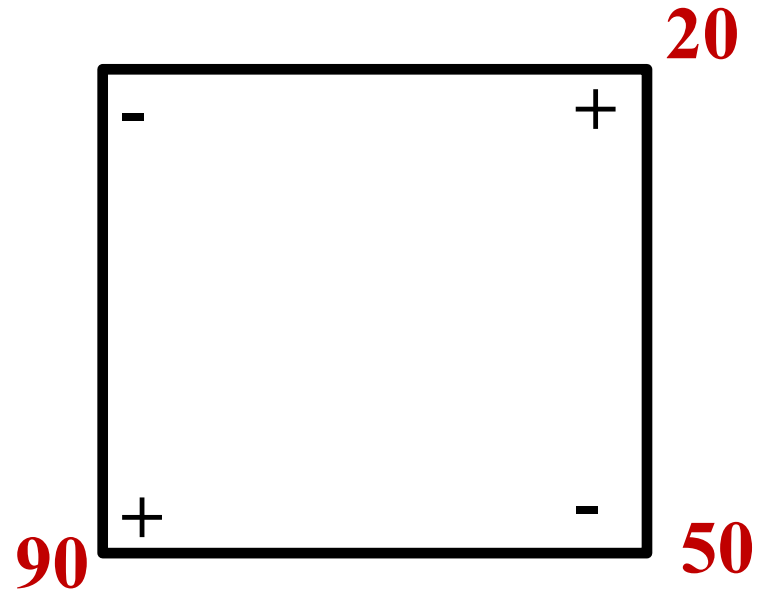
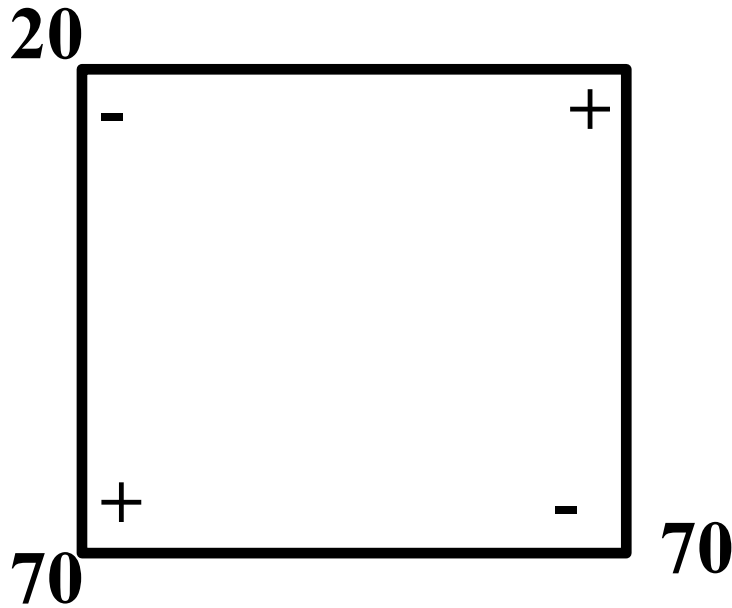
$$z(X) = 3 \cdot 20 + 7 \cdot 80 + 8 \cdot 70 + 12 \cdot 30 + 18 \cdot 70 + 7 \cdot 100 = 3500 < 4130$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 20	7 80	4 3	7 6	0 -5	100	-5
A_2	10 -13	13 -12	24 -23	7 100	0 -11	100	-11
A_3	8 70	19 -7	12 30	18 70	0 30	200	0
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j	8	12	12	18	0		

$$z(X) = 3 \cdot 20 + 7 \cdot 80 + 8 \cdot 70 + 12 \cdot 30 + 18 \cdot 70 + 7 \cdot 100 = 3500 < 4130$$

Цикл



$$\Delta = \min (20, 70) = 20$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3	7	4	7	0	100	
		80		20			
A_2	10	13	24	7	0	100	
				100			
A_3	8	19	12	18	0	200	
	90		30	50	30		
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j							

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 -6	7 80	4 -3	7 20	0 -11	100	-11
A_2	10 -13	13 -6	24 -23	7 100	0 -11	100	-11
A_3	8 90	19 -1	12 30	18 50	0 30	200	0
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j	8	18	12	18	0		

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 -6	7 80	4 -3	7 20	0 -11	100	-11
A_2	10 -13				0	100	-11
A_3	8 90	-1	30	50	30	200	0
b_j	90	80	30	170	30	400	
v_j	8	18	12	18	0		

**План
оптимален!**

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_i
A_1	3 -6	7 80	4 -3	7 20	0 -11	100	-11
A_2	10 -13	13 -6	24 -23	7 100	0 -11	100	-11
A_3	8 90	19 -1	12 30	18 50	0 30	200	0
b_j							
v_j	Оптимальный план:				$X = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \\ 90 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix}$		

$$z(X) = 8 \cdot 90 + 7 \cdot 80 + 12 \cdot 30 + 7 \cdot 100 + 7 \cdot 20 + 18 \cdot 50 = 3380 < 3500$$

Задача 3

Решите транспортную задачу методом потенциалов. В ответе укажите минимальную стоимость всех перевозок.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	13	12	3	60
A_2	2	16	4	6	125
A_3	13	4	17	16	75
b_j	100	100	50	50	

Задача 3

Решите транспортную задачу методом потенциалов. В ответе укажите минимальную стоимость всех перевозок.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	13	12	3	60
A_2	2	16	4	6	125
A_3	13	4	17	16	75
b_j	100	100	50	50	

260

300

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	13	12	3	60
A_2	2	16	4	6	125
A_3	13	4	17	16	75
A_4	0	0	0	0	40
b_j	100	100	50	50	300

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	13	12	3	60
A_2	2	16	4	6	125
A_3	13	4	17	16	75
A_4	0	0	0	0	40
b_j	100	100	50	50	300

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 60	13	12	3	60
A_2	2	16	4	6	125
A_3	13	4	17	16	75
A_4	0	0	0	0 40	40
b_j	100	100	50	50	300

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 60	13	12	3	60
A_2	2	16	4	6	125
A_3	13	4	17	16	75
A_4	0	0	0	0 40	40
b_j	100	100	50	50	300

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	60	13	12	3	60
A_2	40	16	4	6	125
A_3	13	4	17	16	75
A_4	0	0	0	40	40
b_j	100	100	50	50	300

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 60	13	12	3	60
A_2	2 40	16	4	6	125
A_3	13	4	17	16	75
A_4	0	0	0	0 40	40
b_j	100	100	50	50	300

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 60	13	12	3	60
A_2	2 40	16	4	6	125
A_3	13 75	4	17	16	75
A_4	0	0	0	0 40	40
b_j	100	100	50	50	300

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 60	13	12	3	60
A_2	2 40	16	4	6	125
A_3	13 75	4	17	16	75
A_4	0	0	0	0 40	40
b_j	100	100	50	50	300

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 60	13	12	3	60
A_2	2 40	16	4 50	6	125
A_3	13 75	4	17	16	75
A_4	0	0	0	0 40	40
b_j	100	100	50	50	300

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 60	13	12	3	60
A_2	2 40	16	4 50	6	125
A_3	13	4 75	17	16	75
A_4	0	0	0	0 40	40
b_j	100	100	50	50	300

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 60	13	12	3	60
A_2	2 40	16	4 50	6 10	125
A_3	13	4 75	17	16	75
A_4	0	0	0	0 40	40
b_j	100	100	50	50	300

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	
A_1	60	13	12	3	60	
A_2	40	16	50	10	125	
A_3	13	75	4	17	16	75
A_4	0	0	0	40	0	40
b_j	100	100	50	50	300	

Метод наименьшей стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 60	13	12	3	60
A_2	2 40	16 25	4 50	6 10	125
A_3	13 75	4	17	16	75
A_4	0	0	0	0 40	40
b_j	100	100	50	50	300

$$z(X) = 1 \cdot 60 + 2 \cdot 40 + 16 \cdot 25 + 4 \cdot 75 + 4 \cdot 50 + 6 \cdot 10 = 1100$$

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 60	13	12	3	60	
A_2	2 40	16 25	4 50	6 10	125	
A_3	13	4 75	17	16	75	
A_4	0	0	0	0 40	40	
b_j	100	100	50	50	300	
v_j						

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 60	13 2	12 -9	3 2	60	-1
A_2	2 40	16 25	4 50	6 10	125	0
A_3	13 -23	4 75	17 -25	16 -22	75	-12
A_4	0 -4	0 10	0 -2	0 40	40	-6
b_j	100	100	50	50	300	
v_j	2	16	4	6		

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 60	13 2	12 -9	3 2	60	-1
A_2	2 40	16 25	4 50	6 10	125	0
A_3	13 -23	4 75	17 -25	16 -22	75	-12
A_4	0 -4	0 10	0 -2	0 40	40	-6
b_j	100	100	50	50	300	
v_j	2	16	4	6		

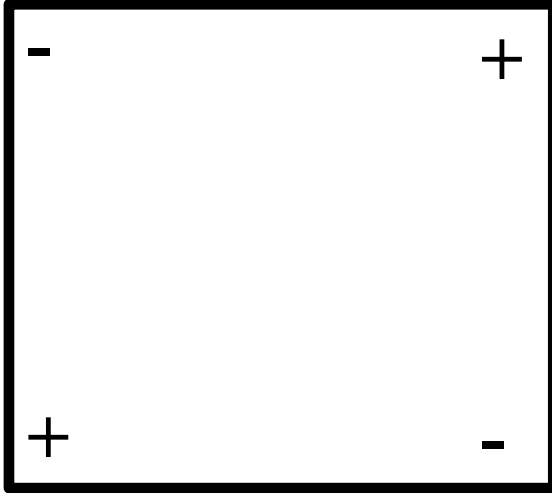
Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 60	13 2	12 -9	3 2	60	-1
A_2	2 40	16 25	4 50	6 10	125	0
A_3	13 -23	75	4 -25	16 -22	75	-12
A_4	0 -4	0 10	0 -2	0 40	40	-6
b_j	100	100	50	50	300	
v_j	2	16	4	6		

ЦИКЛ

25

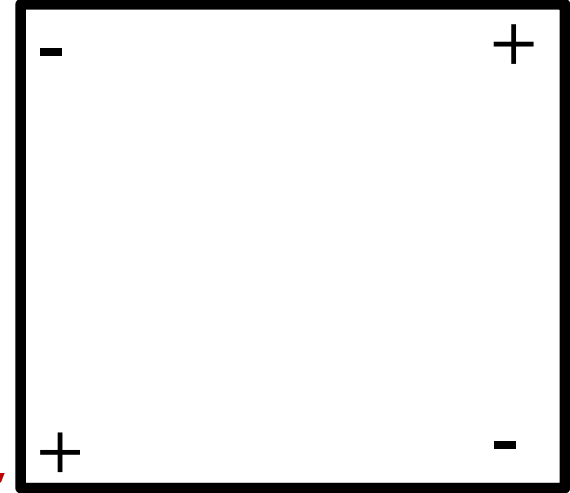
10



40

25

35



15

$$\Delta = \min (25, 40) = 25$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 60	13	12	3	60	
A_2	2 40	16	4 50	6 35	125	
A_3	13	4 75	17	16	75	
A_4	0	0 25	0	0 15	40	
b_j	100	100	50	50	300	
v_j						

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 60	13 -8	12 -9	3 2	60	-1
A_2	2 40	16 -10	4 50	6 35	125	0
A_3	13 -13	4 75	17 -15	16 -12	75	-2
A_4	0 -4	0 25	0 -2	0 15	40	-6
b_j	100	100	50	50	300	
v_j	2	6	4	6		

$$z(X) = 1 \cdot 60 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 75 + 4 \cdot 50 + 6 \cdot 35 = 850 < 1100$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 60	13 -8	12 -9	3 2	60	-1
A_2	2 40	16 -10	4 50	6 35	125	0
A_3	13 -13	4 75	17 -15	16 -12	75	-2
A_4	0 -4	0 25	0 -2	0 15	40	-6
b_j	100	100	50	50	300	
v_j	2	6	4	6		

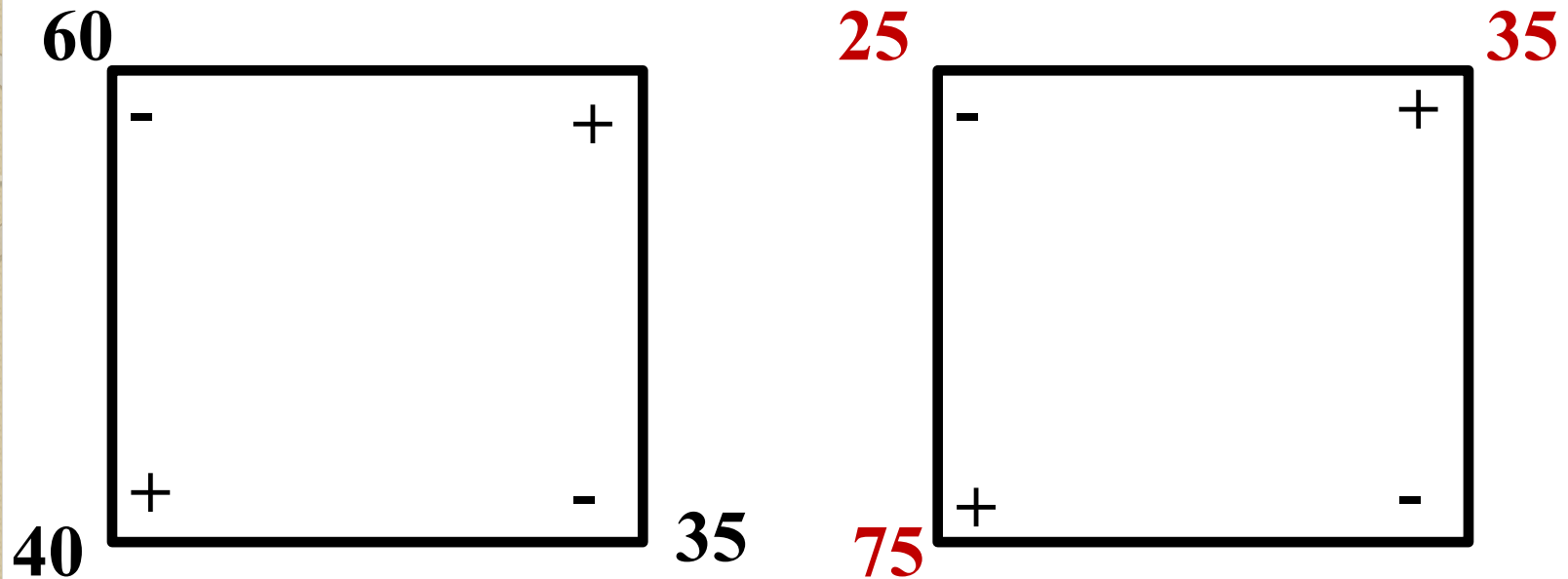
$$z(X) = 1 \cdot 60 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 75 + 4 \cdot 50 + 6 \cdot 35 = 850 < 1100$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	60	13 -8	12 -9	3 2	60	-1
A_2	40	2 -10	16 50	4 35	6 125	0
A_3	13 -13	4 75	17 -15	16 -12	75	-2
A_4	0 -4	0 25	0 -2	0 15	40	-6
b_j	100	100	50	50	300	
v_j	2	6	4	6		

$$z(X) = 1 \cdot 60 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 75 + 4 \cdot 50 + 6 \cdot 35 = 850 < 1100$$

ЦИКЛ



$$\Delta = \min (35, 60) = 35$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 25	13	12	3 35	60	
A_2	2 75	16	4 50	6	125	
A_3	13	4 75	17	16	75	
A_4	0	0 25	0	0 15	40	
b_j	100	100	50	50	300	
v_j						

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1	13	12	3	60	0
	25	-10	-9	35		
A_2	75			6	125	1
A_3	-11	75	-13	-12	75	1
A_4	0	0	0	0	40	-3
	-2	25	0	15		
b_j	100	100	50	50	300	
v_j	1	3	3	3		

**План
оптимален!**

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 25	13 -10	12 -9	3 35	60	0
A_2	2 75	16 -12	4 50	6 -2	125	1
A_3	13 -11	4 75	17 -13	16 -12	75	1
A_4	0 -2	0 25	0 0	0 15	40	-3

Оптимальный план:

$$X = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 35 \\ 75 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z(X) = 1 \cdot 25 + 2 \cdot 75 + 4 \cdot 75 + 4 \cdot 50 + 3 \cdot 35 = 780 < 850$$

Транспортные задачи с дополнительными ограничениями

- В некоторых транспортных задачах наложены **дополнительные ограничения** на перевозку грузов.

1. Если в закрытой задаче перевозки от поставщика A_i к потребителю B_j не могут быть осуществлены (стоит **блокировка**), для определения оптимального решения задач предполагают, что **тариф перевозки** единицы груза равен **сколь угодно большому числу M** .

2. Если дополнительным условием в задаче является обеспечение перевозки от поставщика A_i к потребителю B_j *в точности* a_{ij} единиц груза, в клетку $A_i B_j$ записывают указанное число a_{ij} , а эту клетку считают **свободной** со сколь угодно большим тарифом M .

3. Если от поставщика A_i к потребителю B_j должно быть перевезено *не менее* a_{ij} единиц груза, то запасы пункта A_i и потребности B_j полагают *меньше фактических* на a_{ij} единиц. После нахождения оптимального плана перевозку в клетке $A_i B_j$ увеличивают на a_{ij} единиц.

4. Если от поставщика A_i к потребителю B_j требуется перевезти *не более* a_{ij} единиц груза, то вводят дополнительного потребителя $B_{n+1} = B_{ij}$, которому записывают те же тарифы, что и для B_j , *за исключением* тарифа в i -й строке, который считают равным *сколь угодно большому числу* M .

Потребности пункта B_j считают равными a_{ij} , а потребности B_{ij} полагают равными $b_j - a_{ij}$.

Задача 4

Найти решение транспортной задачи, если из A_3 в B_1 и из A_2 в B_3 перевозки не могут быть осуществлены, из A_1 в B_2 должно быть завезено не менее 30 ед. груза, а из A_2 в B_4 ровно 70 ед. груза.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	11	3	13	140
A_2	12	4	8	2	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	

Задача 4

Найти решение транспортной задачи, если из A_3 в B_1 и из A_2 в B_3 перевозки не могут быть осуществлены, из A_1 в B_2 должно быть завезено не менее 30 ед. груза, а из A_2 в B_4 ровно 70 ед. груза.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	11	3	13	140
A_2	12	4	8	2	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	

400

400

Задача 4

Найти решение транспортной задачи, если из A_3 в B_1 и из A_2 в B_3 перевозки не могут быть осуществлены, из A_1 в B_2 должно быть завезено не менее 30 ед. груза, а из A_2 в B_4 ровно 70 ед. груза.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	11	3	13	140
A_2	12	4	8	2	160
A_3	3	5	14	6	100
b_j	80	40	150	130	400

400

400

Метод «северо-западного угла»

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	11	3	13	110
A_2	12	4	M	M	160
A_3	M	5	14	6	100
b_j	80	10	150	130	400

Метод «северо-западного угла»

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	11	3	13	110
A_2	12	4	M	M	160
A_3	M	5	14	6	100
b_j	80	10	150	130	400

Метод «северо-западного угла»

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1 80	11 10	3 20	13	110
A_2	12	4	90 M	70 M	160
A_3	M	5	14 40	6 60	100
b_j	80	10	150	130	400

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	80	10	20	13	110	
A_2	12	4	90	70	160	
A_3	M	5	40	60	100	
b_j	80	10	150	130	400	
v_j						

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	80	10	20	-8	110	0
A_2	M-16	M+2	90	70	160	M-5
A_3	12-M	17	40	60	100	11
b_j	80	10	150	130	400	
v_j	1	11	3	5		

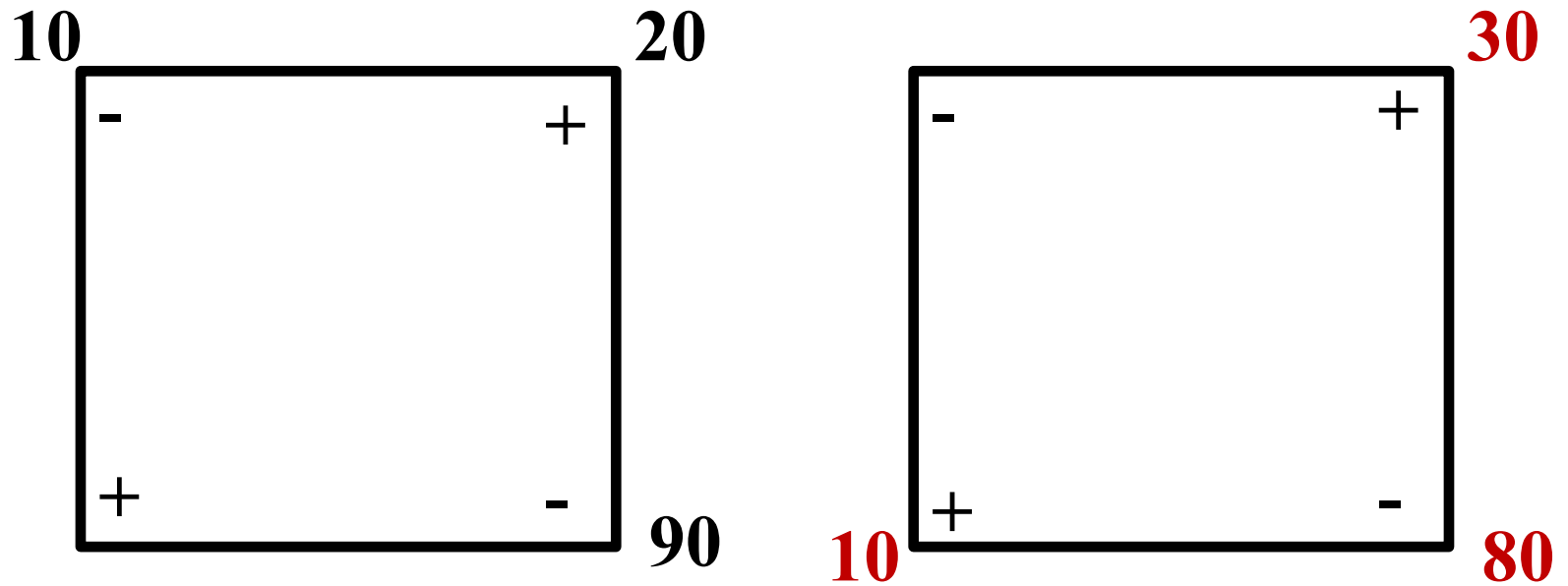
Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	80	10	20	-8	110	0
A_2	M-16	M+2	90	70	160	M-5
A_3	12-M	17	40	60	100	11
b_j	80	10	150	130	400	
v_j	1	11	3	5		

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 80	11 10	3 20	13 -8	110	0
A_2	12 M-16	4 M+2	M 90	M 70	160	M-5
A_3	M 12-M	5 17	14 40	6 60	100	11
b_j	80	10	150	130	400	
v_j	1	11	3	5		

ЦИКЛ



$$\Delta = \min (10, 90) = 10$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 80	11	3 30	13	110	
A_2	12	4 10	80	M 70	M 160	
A_3	M	5	14 40	6 60	100	
b_j	80	10	150	130	400	
v_j						

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 80	11 -M-4	3 30	13 -10	110	3-M
A_2	12 M-14	4 10	M 80	M 70	160	0
A_3	M 4-M	5 5-M	14 40	6 60	100	6-M
b_j	80	10	150	130	400	
v_j	M-2	4	M	M		

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 80	11 -M-4	3 30	13 -10	110	3-M
A_2	12 M-14	4 10	M 80	M 70	160	0
A_3	M 4-M	5 5-M	14 40	6 60	100	6-M
b_j	80	10	150	130	400	
v_j	M-2	4	M	M		

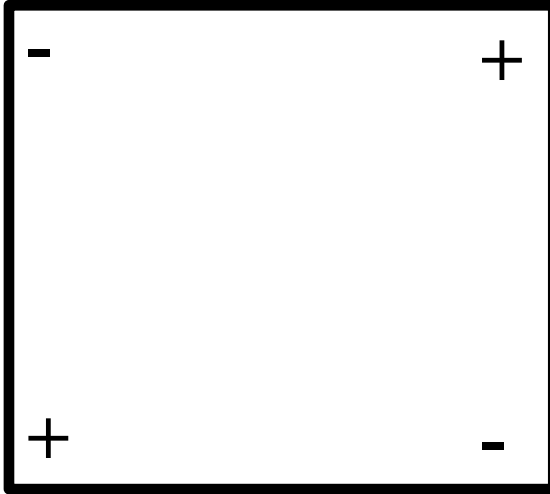
Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	80	11	3	13	110	3-M
A_2	M-14	10	80	70	160	0
A_3	4-M	5-M	40	60	100	6-M
b_j	80	10	150	130	400	
v_j	M-2	4	M	M		

Цикл

80

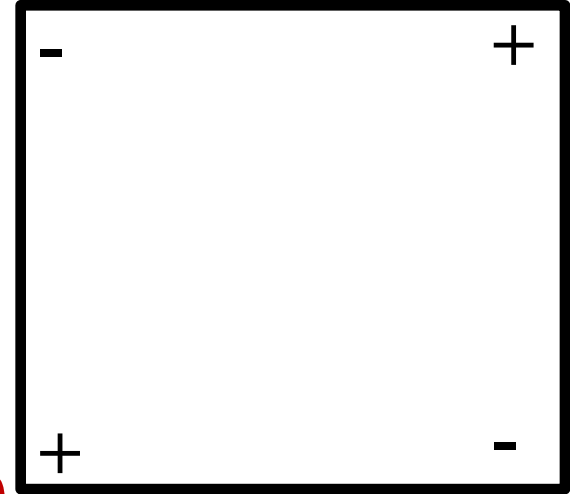
30



80

80

110



0

$$\Delta = \min (80, 80) = 80$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1	11	3	13	110	
A_2	12	4	M	M	160	
A_3	M	5	14	6	100	
b_j	80	10	150	130	400	
v_j						

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 14-M	11 -4-M	3 110	13 -10	110	3-M
A_2	12 80	4 10	M 0	M 70	160	0
A_3	M 18-2M	5 5-M	14 40	6 60	100	6-M
b_j	80	10	150	130	400	
v_j	12	4	M	M		

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 14-M	11 4-M	3 110	13 10	110	3-M
A_2	80			M	160	0
A_3	M 18-2M	5 5-M	14 40	6 60	100	6-M
b_j	80	10	150	130	400	
v_j	12	4	M	M		

**План
оптимален!**

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	1 14-M	11 -4-M	3 110	13 -10	110	3-M
A_2	12 80	4 10	M 0	M 70	160	0
A_3	M 18-2M	5 5-M	14 40	6 60	100	6-M
b_j	80	10	150	130	400	
v_j	Оптимальный план: $X = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 110 & 0 \\ 80 & 10 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 40 & 60 \end{pmatrix}$					

$$z(X) = 12 \cdot 80 + 4 \cdot 10 + 11 \cdot 30 + 3 \cdot 110 + 14 \cdot 40 + 6 \cdot 60 + 2 \cdot 70 = 2720$$

Задача 5

Найти решение транспортной задачи, если из A_1 в B_4 должно быть перевезено не менее 50 ед. груза, из A_3 в B_3 должно быть перевезено не менее 30 ед. груза, а из A_2 в B_2 ровно 40 ед. груза.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	70
A_2	3	14	25	19	170
A_3	2	8	17	10	140
b_j	90	60	160	70	

Задача 5

Найти решение транспортной задачи, если из A_1 в B_4 должно быть перевезено не менее 50 ед. груза, из A_3 в B_3 должно быть перевезено не менее 30 ед. груза, а из A_2 в B_2 ровно 40 ед. груза.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	70
A_2	3	14	25	19	170
A_3	2	8	17	10	140
b_j	90	60	160	70	

380

380

Задача 5

Найти решение транспортной задачи, если из A_1 в B_4 должно быть перевезено не менее 50 ед. груза, из A_3 в B_3 должно быть перевезено не менее 30 ед. груза, а из A_2 в B_2 ровно 40 ед. груза.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	70
A_2	3	14	25	19	170
A_3	2	8	17	10	140
b_j	90	60	160	70	380

380

380

Метод минимальной стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	20
A_2	3	40 M	25	19	170
A_3	2	8	17	10	110
b_j	90	60	130	20	380

Метод минимальной стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	20
A_2	3	40 M	25	19	170
A_3	90	2	8	17	110
b_j	90	60	130	20	380

Метод минимальной стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	20
A_2	3	40 M	25	19	170
A_3	90	8	17	10	110
b_j	90	60	130	20	380

Метод минимальной стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	20
A_2	3	M	25	19	170
A_3	2	8	17	10	110
b_j	90	60	130	20	380

Метод минимальной стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	20
		20			
A_2	3	M	25	19	170
		40			
A_3	2	8	17	10	110
	90				
b_j	90	60	130	20	380

Метод минимальной стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	20
	20				
A_2	3	M	25	19	170
	40				
A_3	2	8	17	10	110
	90			20	
b_j	90	60	130	20	380

Метод минимальной стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	20
	20				
A_2	3	M	25	19	170
	40				
A_3	2	8	17	10	110
	90			20	
b_j	90	60	130	20	380

Метод минимальной стоимости

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	20
	20				
A_2	3	M	25	19	170
	40		130		
A_3	2	8	17	10	110
	90			20	
b_j	90	60	130	20	380

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9	6	7	11	20	
A_2	3	M	25	19	170	
A_3	2	8	17	10	110	
b_j	90	60	130	20	380	
v_j						

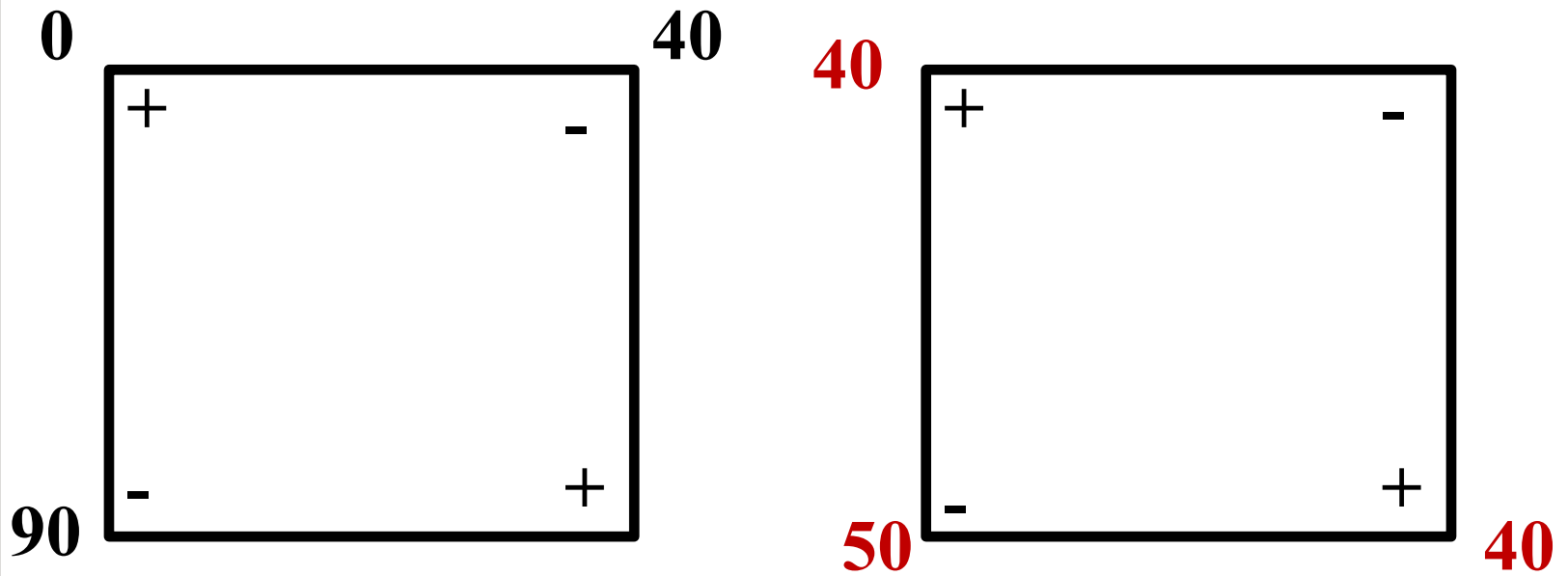
Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9 -M	6 20	7 24-M	11 6-M	20	6-M
A_2	3 0	M 40	25 130	19 -8	170	0
A_3	2 90	8 M-9	17 7	10 20	110	-1
b_j	90	60	130	20	380	
v_j	3	M	25	11		

Метод потенциалов

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9 -M	6 20	7 24-M	11 6-M	20	6-M
A_2	3 0	M 40	25 130	19 -8	170	0
A_3	2 90	8 M-9	17 7	10 20	110	-1
b_j	90	60	130	20	380	
v_j	3	M	25	11		

Цикл



$$\Delta = \min(90, 40) = 40$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9	6	7	11	20	
A_2	40	M	25	19	170	
A_3	2	8	17	10	110	
b_j	90	60	130	20	380	
v_j						

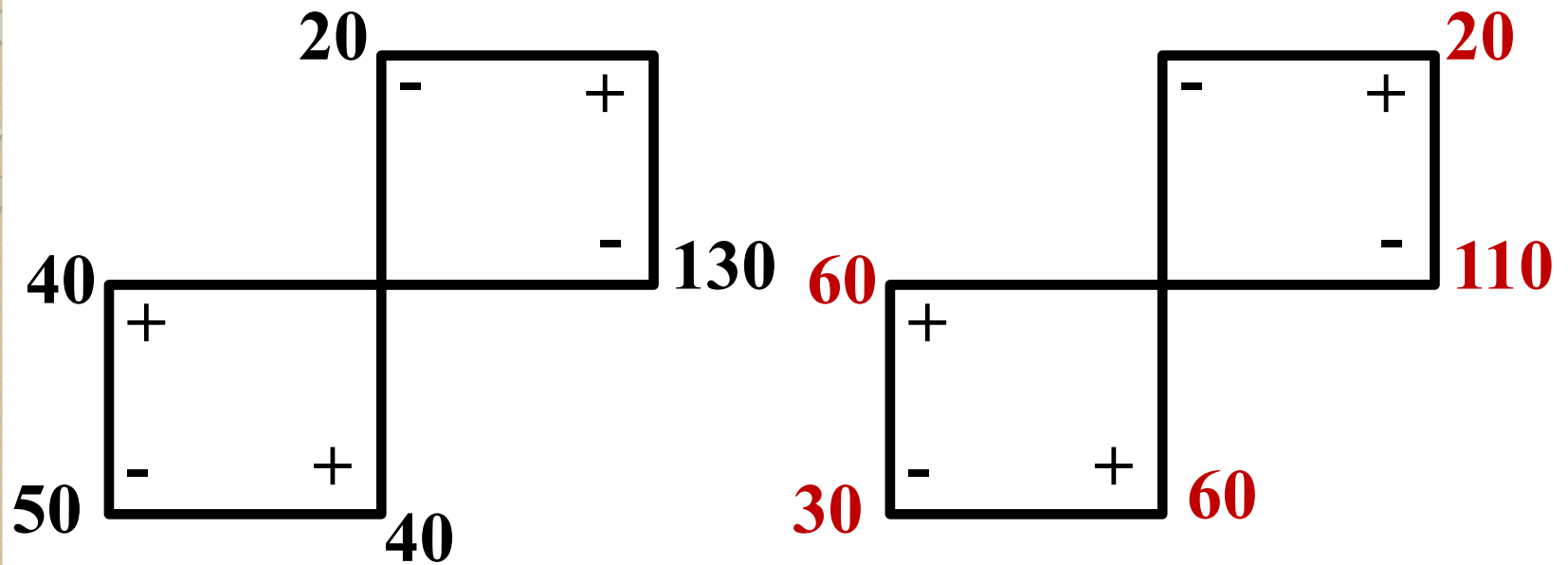
Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i	
A_1	-9	9	6	7	11	20	-2
A_2	40	3	M	25	19	170	1
A_3	50	2	8	17	10	110	0
b_j	90	60	130	20	380		
v_j	2	8	24	10			

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	-9	20	15	-3	20	-2
A_2	40	9-M	130	-8	170	1
A_3	50	40	7	20	110	0
b_j	90	60	130	20	380	
v_j	2	8	24	10		

ЦИКЛ



$$\Delta = \min (50, 20, 130) = 20$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9	6	7	11	20	
A_2	60	M	25	19	170	
A_3	30	60	17	10	110	
b_j	90	60	130	20	380	
v_j						

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9 -24	6 -15	7 20	11 -18	20	-17
A_2	3 60	M 9-M	25 110	19 -8	170	1
A_3	2 30	8 60	17 7	10 20	110	0
b_j	90	60	130	20	380	
v_j	2	8	24	10		

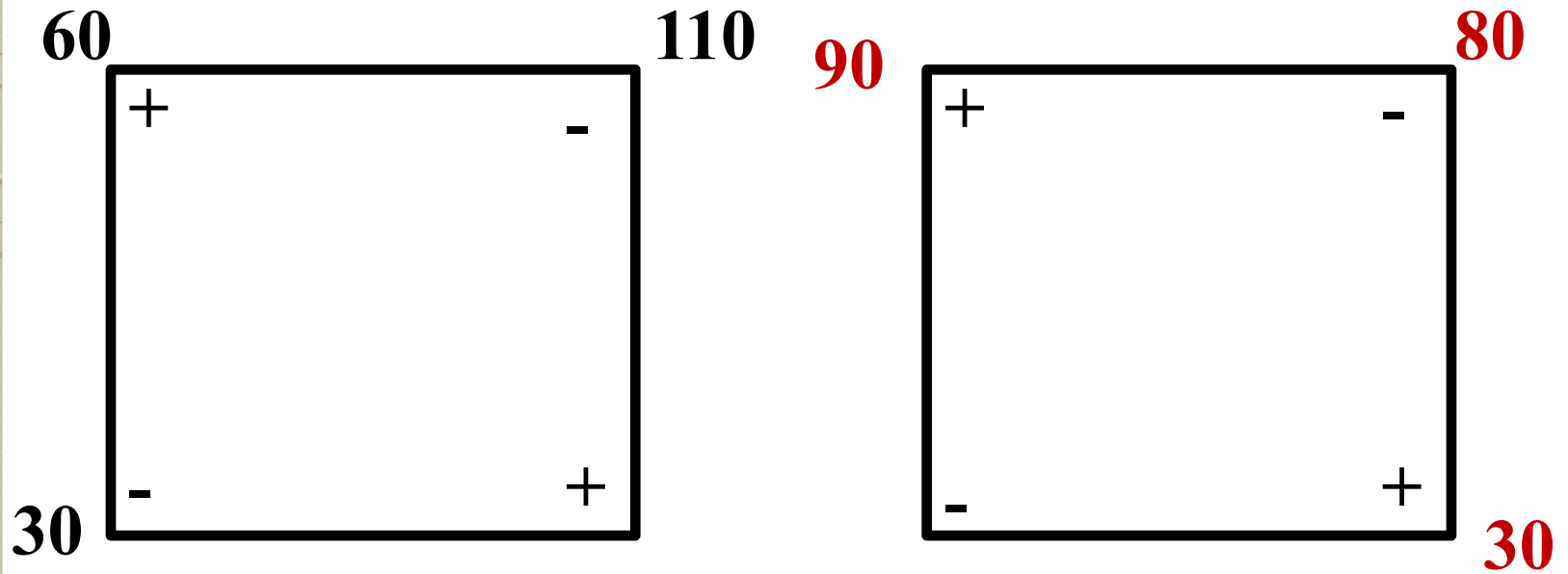
Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9 -24	6 -15	7 20	11 -18	20	-17
A_2	3 60	M 9-M	25 110	19 -8	170	1
A_3	2 30	8 60	17 7	10 20	110	0
b_j	90	60	130	20	380	
v_j	2	8	24	10		

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i	
A_1	-24	9	6	7	11	20	-17
A_2	60	3	M	25	19	170	1
A_3	30	2	8	17	10	110	0
b_j	90	60	130	20	380		
v_j	2	8	24	10			

ЦИКЛ



$$\Delta = \min (30, 110) = 30$$

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9	6	7	11	20	
A_2	90	M	25	19	170	
A_3	2	8	17	10	110	
b_j	90	60	130	20	380	
v_j						

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	-24	-8	20	-11	20	-10
A_2	90	16-M	80	-1	170	8
A_3	-7	60	30	20	110	0
b_j	90	60	130	20	380	
v_j	-5	8	17	10		

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9	6	7	11	20	-10
A_2	24	8	20	11	170	8
A_3	7	60	30	20	110	0
b_j	90	60	130	20	380	
v_j	-5	8	17	10		

**План
оптимален!**

Новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	9	6	7	11	20	-10
	-24	-8	20	-11		
A_2	3	M	25	19	170	8
	90	16-M	80	-1		
A_3	2	8	17	10	110	0
	-7	60	30	20		
b_j	90	60	130	20	380	
v_j	<p>Оптимальный план: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 50 \\ 90 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 60 & 60 & 20 \end{pmatrix}$</p>					

$$z(X) = 3 \cdot 90 + 8 \cdot 60 + 17 \cdot 60 + 25 \cdot 80 + 7 \cdot 20 + 11 \cdot 50 + 10 \cdot 20 = 4660$$



Спасибо за внимание!