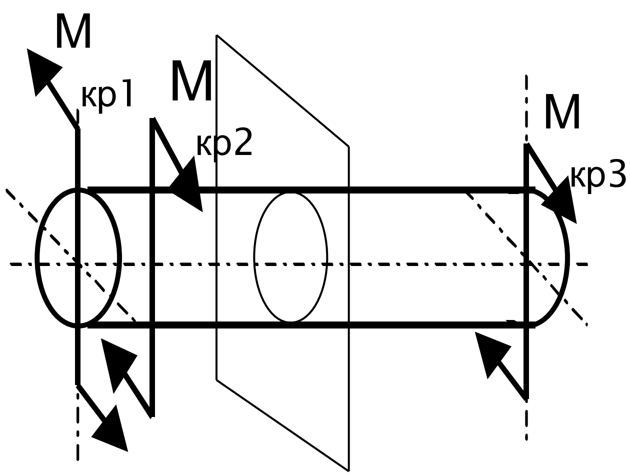
ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»
Инженерно-технический институт
Кафедра прикладной механики

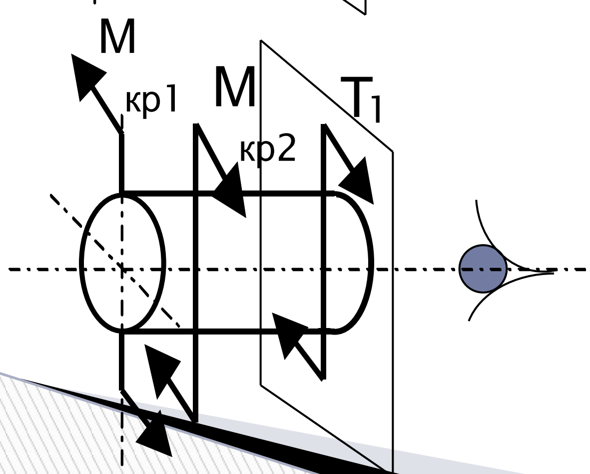
Лекции
по дисциплине «Техническая механика»
270800 - Строительство

Кручение стержней круглого сечения

Основные понятия деформации кручения

Под ***кручением*** понимают такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса действует только один силовой фактор - это крутящий момент.





Брус в поперечном сечении, которого действует крутящий момент, называется ***валом***.

Крутящий момент в рассматриваемом сечении равен алгебраической сумме всех внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от этого сечения.

$$T_1 = M_{кр} = -M_{кр1} + M_{кр2}$$

Крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец вала со стороны сечения момент направлен против хода часовой стрелки.

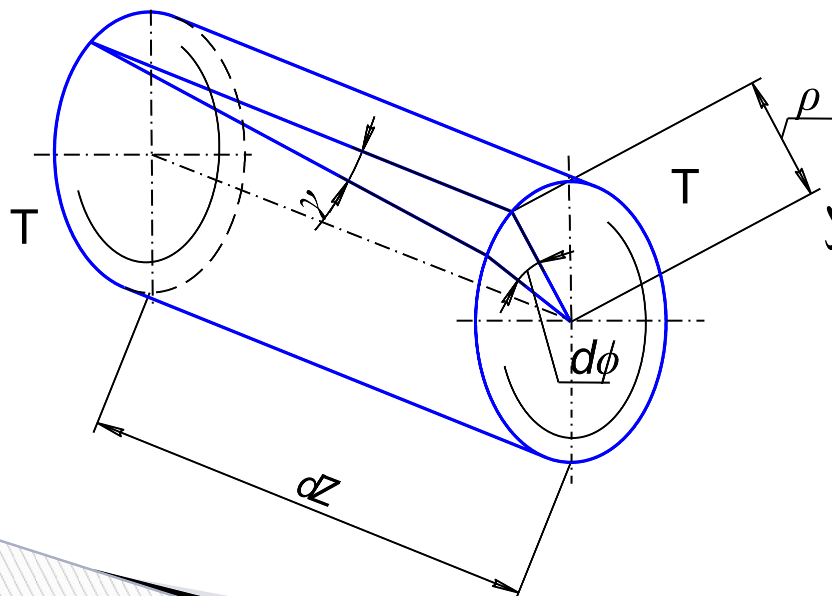
Момент T_1 – отрицательный

Закон Гука при кручении

Основные допущения:

1. Поперечные сечения вала, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси, и после деформации.
2. Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину.
3. Расстояния между поперечными сечениями не изменяются.

При кручении наблюдается плоское напряженное состояние чистого сдвига и соблюдается **закон Гука** при сдвиге: $\tau = G\gamma$



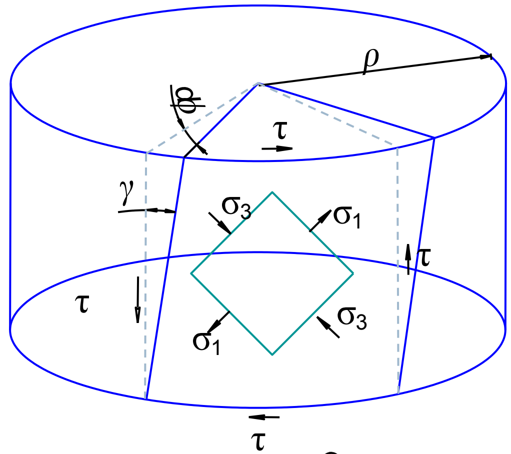
$$\gamma \cdot dz = d\phi \cdot \rho$$

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dz}\rho$$

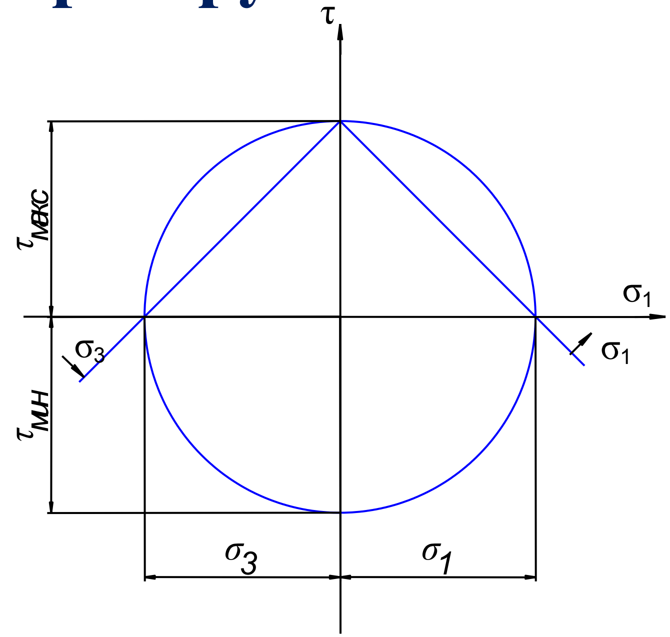
$$\gamma = \frac{d\varphi}{dz}\rho = \theta \cdot \rho$$

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot \rho$$

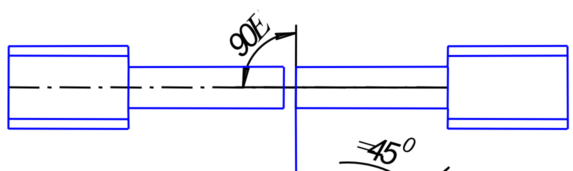
Напряженное состояние при кручении



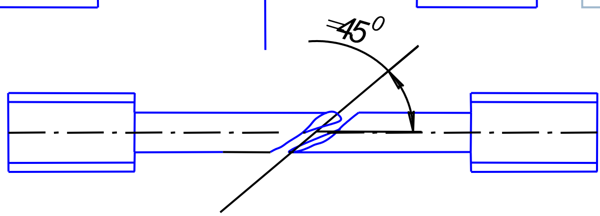
$$\sigma_1 = \tau; \qquad \sigma_2 = 0; \qquad \sigma_3 = -\tau$$



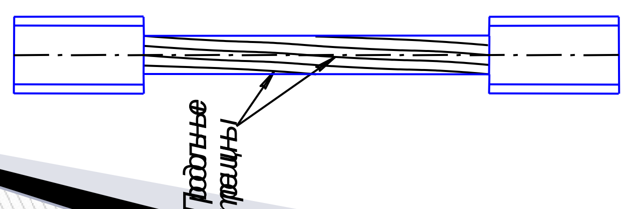
Рассмотрим особенности деформации бруса при кручении



От действия касательных напряжения в плоскости поперечного сечения. Пластичные материалы



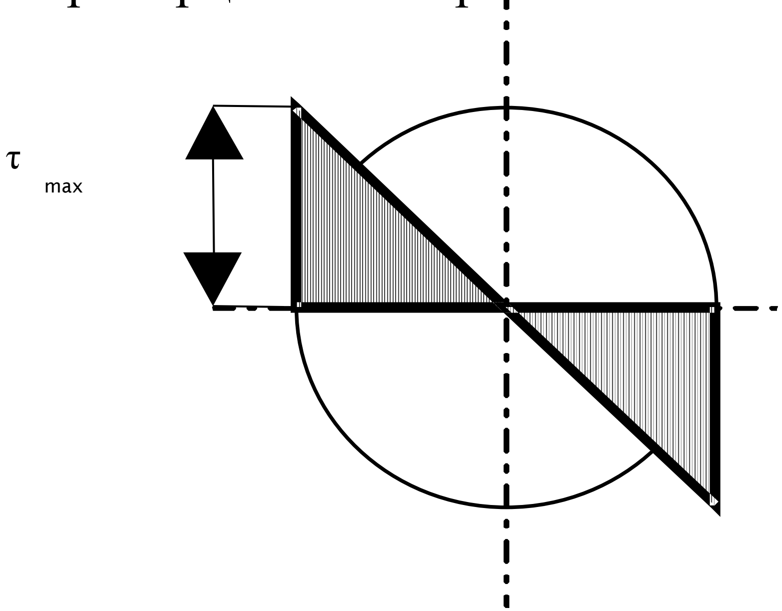
От действия главных напряжения в плоскости наклоненной под 45^0 к оси образца. Хрупкие материалы (чугуны, закаленные стали)



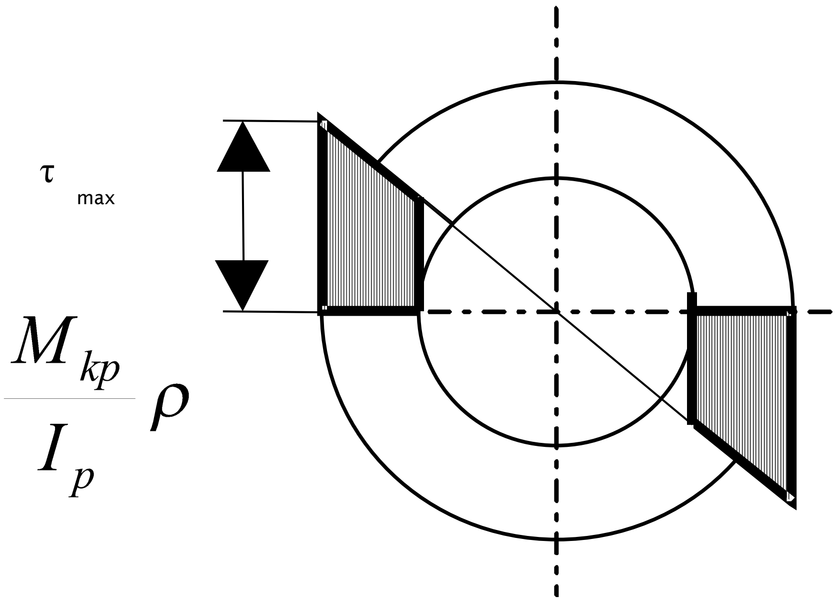
От действия касательных напряжений в плоскости параллельной образующей. Анизотропные материалы (древесина)

Напряжения при кручении

В поперечных сечениях вала возникают **касательные напряжения**, направление которых, в каждой точке перпендикулярно к радиусу, соединяющему эти точки с центром сечения, а величина прямо пропорциональна расстоянию точки от центра.



$$\tau = \frac{M_{kp}}{I_p}\rho$$



Максимальные касательные напряжения τ_{max} прямо пропорциональны крутящему моменту M в опасном сечении и обратно пропорциональны полярному моменту сопротивления сечения W_p:

$$\tau = \frac{M_{kp}}{W_p}$$

Полярный момент инерции характеризует, влияние размеров и формы поперечного сечения вала на его способность сопротивляться угловым деформациям

$$2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = I_p$$

Для круглого сечения

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32},$$

Для трубчатого сечения

$$Ip = \frac{\pi d^4 \left(1 - \alpha^4\right)}{32}$$

здесь $\alpha = d_1/d$, d_1 –внутренний диаметр трубы, d – наружный диаметр трубы
Полярный момент инерции выражается в м^4 (мм^4, см^4).

Полярный момент сопротивления характеризует влияние геометрических размеров и формы поперечного сечения вала на его прочность.

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{макс}}$$

Для круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

Для трубчатого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3 \left(1 - \alpha^4\right)}{16}$$

Условие прочности при кручении

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в скручиваемом брусе не должны превышать соответствующих допускаемых значений

$$\tau = \frac{M_{kp}^{\max}}{W_p} \leq [\tau_{кр}]$$

Типовые задачи при кручении

1. Проверочный расчет

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}^{\max}}{W_p} \leq [\tau_{кр}]$$

2. Конструкционный расчет

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{kp}^{\max}}{\pi [\tau_{kp}]}}$$

Для круглого сечения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{kp}^{\max}}{\pi (1-\alpha^4) [\tau_{kp}]}}$$

Для трубчатого сечения

3.Проектный расчет – определение допускаемого момента

$$[M_{кр}] \leq [\tau_{кр}] W_p$$

Деформации при кручении.
Условие жесткости при кручении

При кручении различают угол закручивания ϕ и относительный угол закручивания θ

Закон Гука при кручении
$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot \rho$$

Напряжения при кручении
$$\tau = \frac{M}{I_p}\rho$$

Угол закручивания
$$\varphi = \frac{Ml}{GI_p}$$

Условие жесткости при кручении

Наибольший относительный угол закручивания, возникающий в скручиваемом брусе не должен превышать соответствующих допускаемых значений

$$\theta_{\max} \le [\theta]$$

Где [θ] – допускаемы относительный угол закручивания.
[θ]=0,0045….0,02 рад/м

Потенциальная энергия деформации

Полная потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{M \cdot \varphi}{2} = \frac{M}{2} \cdot \frac{Ml}{GI_p} = \frac{M^2 l}{2GI_p}$$

Удельная потенциальная энергия (полная)

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right]$$

$$u = \frac{1}{2E}\left[2\tau^2 + 2\mu\tau^2\right] = \frac{(1+\mu)}{E}\tau^2$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема

$$u_V = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)$$

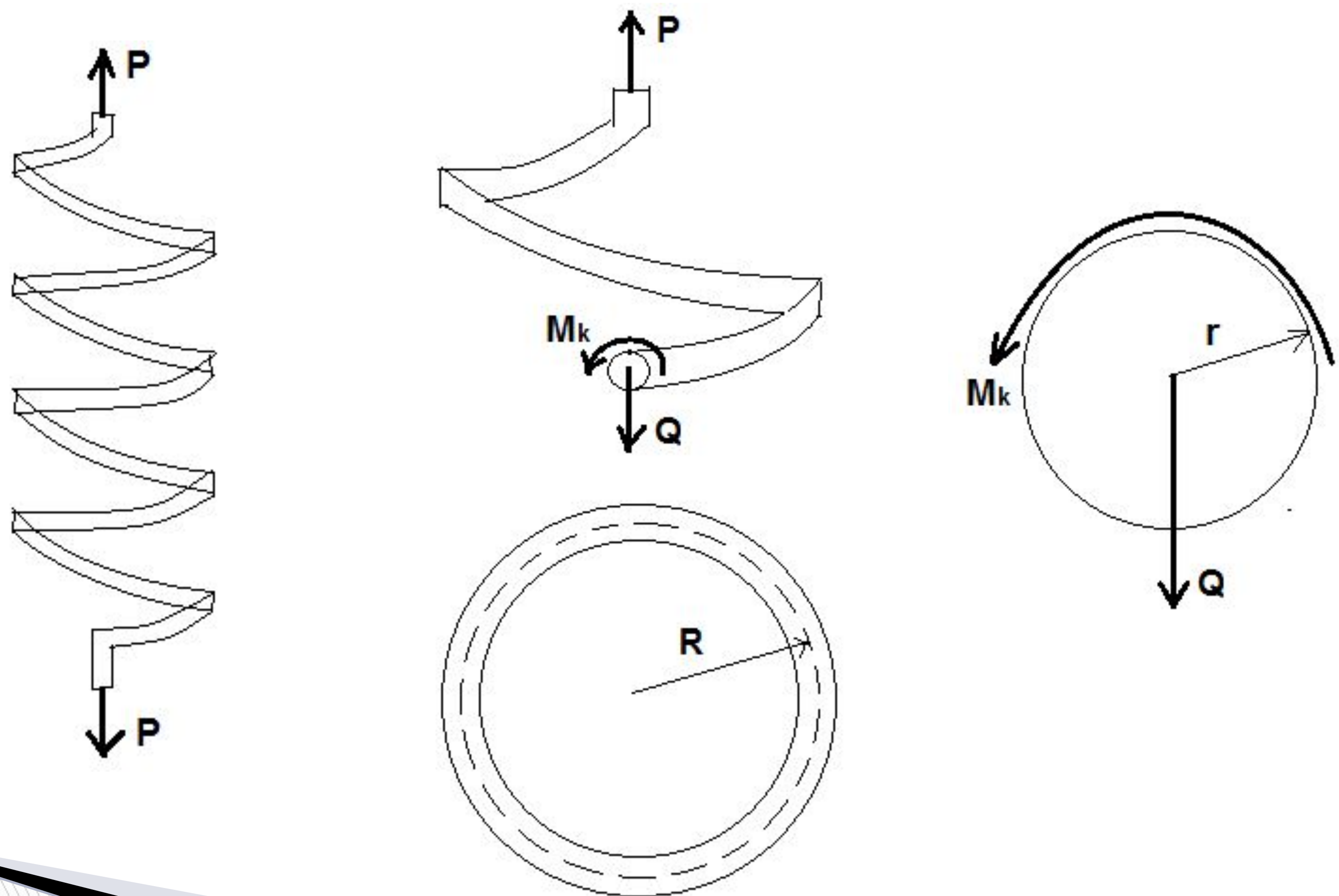
Удельная потенциальная энергия изменения формы

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right) =$$

$$= \frac{1+\mu}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]$$

Расчет винтовых пружин с малым шагом

Теория кручения цилиндрических стержней применяется для расчета винтовых пружин с малым шагом.



Касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении проволоки пружины состоят из двух составляющих, от действия сдвигающей силы Q=P и крутящего момента Мк =P*R

$$\tau = \frac{P}{A} + \frac{M_k \cdot \rho}{I_p}$$

Наибольшие значения касательных напряжений возникают в крайних волокнах проволоки пружины и равны

$$\tau = \frac{P}{\pi \cdot r^2} + \frac{2 \cdot P \cdot R}{\pi \cdot r^3} \qquad \tau_{\max} = \frac{P}{\pi r^2}\left(1 + \frac{2R}{r}\right)$$

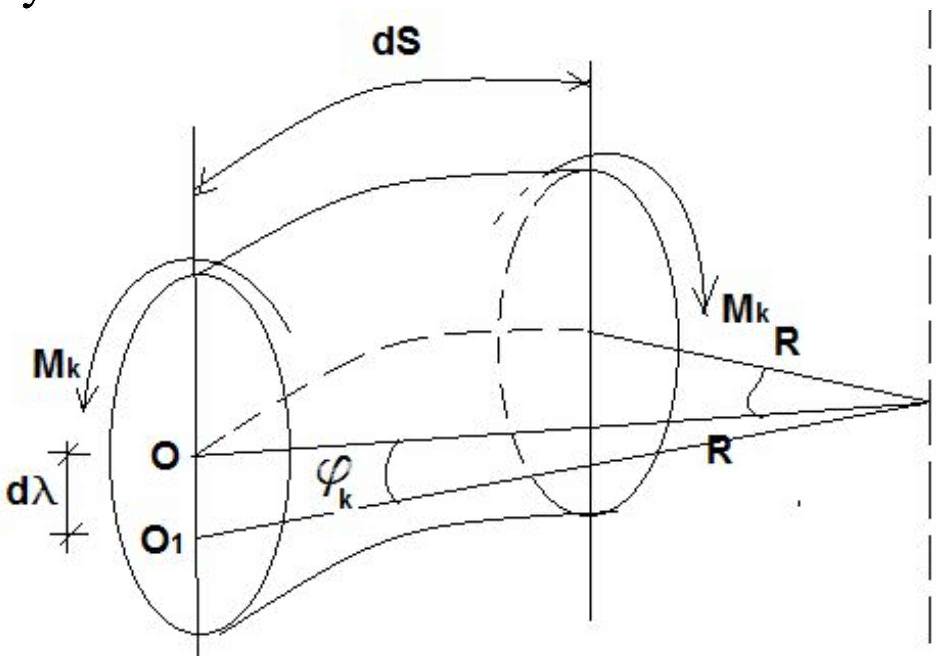
Где: r – радиус поперечного сечения проволоки пружины;
R – радиус цилиндра винтовой пружины.

Условие прочности пружины:

$$\tau_{max} \approx \frac{2PR}{\pi r^3} \leq [\tau]$$

Для определения осадки пружины рассмотрим деформацию элемента пружины dS

За счет закручивания этого элемента точка O займет положения точки O1 и получим



$$d\lambda = \varphi_k \cdot R = \frac{M_k \cdot dS}{G \cdot I_p}$$

Интегрируя это выражение получим осадку пружины

$$\lambda = \frac{4PR^3 n}{Gr^4} = CP,$$

где $C = \dfrac{4R^3 n}{Gr^4}$ – жесткость пружины.

n -- количество витков пружины

Условие жесткости пружины: $$\frac{4PR^3 n}{Gr^4} \le [\lambda]$$

из которого вытекают три задачи: проверка условия жесткости пружины, определение радиуса поперечного сечения проволоки и допускаемой нагрузки:

$$\lambda = \frac{4PR^3 n}{Gr^4} \le [\lambda]. \qquad r \ge \sqrt{\frac{4PR^3 n}{G[\lambda]}} \qquad P_{доп} \le \frac{Gr^4[\lambda]}{4R^3 n}$$

Самостоятельно законспектировать Кручение стержней некруглого сечения, особенности расчета.